Calcul différentiel et optimisation
Partiel du 19 mars 2024

Double licence IASO, L2, Université Paris-Dauphine-PSL, 2023-2024

Durée 2h, Calculatrice et documents non autorisés. Le barème est indicatif.

Dans toute la suite $\|\mathbf{x}\| := (x_1^2 + x_2 + \cdots + x_d^2)^{1/2}$ désigne la norme euclidienne de $\mathbb{R}^d$.

Exercice 1. (Questions de cours – 3 points)

a/ Énoncer la formule de Taylor à l'ordre 2 pour une fonction de $\mathbb{R}^3$ à valeurs réelles.
b/ Énoncer le théorème de Schwarz.
c/ Donner la définition d'une fonction convexe quelconque sur un sous-ensemble de $\mathbb{R}^d$.

Exercice 2. (Applications du cours – 6 points)

Soit $F : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ définie par $F(\mathbf{x}) = \frac{1}{4}\|\mathbf{x}\|^4$.

a/ Calculer le gradient de F.
b/ Montrer que la hessienne de F est $H_F(\mathbf{x}) = 2\mathbf{x}\mathbf{x}^T + \|\mathbf{x}\|^2 \mathbb{I}_d$.
c/ Montrer que F est convexe sur $\mathbb{R}^d$.

Soit $G : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ une fonction de classe C^2. Le **Laplacien** de G, notée ΔG, est la trace de la hessienne de G :

$$\Delta G := \frac{\partial^2 G}{\partial x_1^2} + \cdots + \frac{\partial^2 G}{\partial x_d^2}.$$

d/ Calculer le Laplacien de la fonction F définie précédemment.
e/ Calculer le Laplacien de la fonction $G : \mathbb{R}^2 \setminus \{\mathbf{0}\} \to \mathbb{R}$ définie par $G(x, y) := \ln(x^2 + y^2)$.

Exercice 3. (Étude de points critiques – 4 points)

On définit la fonction $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ par

$$f(x, y) := (x^2 + y^2)\, \mathrm{e}^{x^2 - y^2}.$$

Déterminer les points critiques de f et préciser leur nature.

Exercice 4. (Étude d'un point critique – 5 points)

Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad f(x, y) := \left(x^2 - y\right)\left(3x^2 - y\right).$$

a/ Justifier rapidement que f est de classe C^2 sur $\mathbb{R}^2$.
b/ Montrer que f n'est ni majorée ni minorée sur $\mathbb{R}^2$.
c/ Vérifier que f admet un seul point critique noté A. Que vaut la matrice hessienne en ce point ?
d/ Écrire la formule de Taylor à l'ordre 2 au point A.
e/ Représenter sur un même graphique les ensembles :

$$\mathcal{C}_1 = \left\{(\mathrm{x}, \mathrm{y}) \in \mathbb{R}^2, f(x, y) = 0\right\}, \quad \mathcal{C}_2 = \left\{(\mathrm{x}, \mathrm{y}) \in \mathbb{R}^2, f(x, y) < 0\right\}, \quad \mathcal{C}_3 = \left\{(\mathrm{x}, \mathrm{y}) \in \mathbb{R}^2, f(x, y) > 0\right\}.$$

Exercice 5. (Convexité des fonctions de Cobb-Douglas – 4 points)

Soient α, β deux nombres positifs ou nuls et soit $\mathcal{C} = (0, 1) \times (0, 1) \subset \mathbb{R}^2$. On définit la fonction $f : \mathcal{C} \to \mathbb{R}$ par

$$f(x, y) := -x^\alpha y^\beta.$$

a/ Justifier rapidement que f est de classe C^2 sur $\mathcal{C}$.
b/ Calculer le gradient et la hessienne de f en tout point de $\mathcal{C}$.
c/ Montrer que la fonction $(x, y) \mapsto -x^\alpha$ est convexe sur $\mathbb{R}_*^+ \times \mathbb{R}$ si et seulement si $0 \le \alpha \le 1$.
d/ Montrer que f est convexe sur $\mathcal{C}$ ssi α et β vérifient

$$0 \le \alpha \le 1, \quad 0 \le \beta \le 1 \quad \text{et} \quad \alpha + \beta \le 1.$$