TD8 : Dérivation sous le signe intégrale. Corrections

Maths fondamentales, L2, PSL, 2023-2024 *D. Gontier, gontier@ceremade.dauphine.fr*

Exercice 1.
Le but de cet exercice est de calculer l'intégrale $I_n := \displaystyle\int_0^\infty \frac{\mathrm{d}t}{(1+t^2)^n}$. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, et $x \in \mathbb{R}$, on pose

$$I_n(x) := \int_0^\infty \frac{\mathrm{d}t}{(x^2+t^2)^n}, \quad \text{de sorte que} \quad I_n = I_n(x=1).$$

a/ Montrer que $I_n(x) = \frac{1}{x^{2n-1}} I_n$. *(on pourra faire un changement de variable).*
b/ Calculer $I_1(x)$.
c/ Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $I_n'(x) = -2nx I_{n+1}(x)$.
d/ En déduire que $I_{n+1} = \frac{2n-1}{2n} I_n$, puis que

$$I_{n+1} = \frac{(2n-1)(2n-3)\cdots 1}{(2n)(2n-2)\cdots 2} \frac{\pi}{2} = \frac{1}{4^n}\binom{2n}{n}\frac{\pi}{2}.$$

Solution

a/ On voit x comme un paramètre fixé. On pose $t = xu$, de sorte que $\mathrm{d}t = x\mathrm{d}u$, et on trouve

$$I_n(x) = \int_0^\infty \frac{\mathrm{d}t}{(x^2+t^2)^n} = \int_0^\infty \frac{x\mathrm{d}u}{x^{2n}(1+u^2)^n} = \frac{1}{x^{2n-1}} I_n.$$

b/ Pour $n = 1$, on a

$$I_1 = \int_0^\infty \frac{\mathrm{d}x}{1+x^2} = [\arctan(x)]_0^\infty = \frac{\pi}{2}, \quad \text{donc} \quad I_1(x) = x\frac{\pi}{2}.$$

c/ On pose $f_n(x,t) = \frac{1}{(x^2+t^2)^n}$ sur $\mathbb{R} \times (0,\infty)$, on applique le théorème de dérivation sous le signe intégrale. Vérifions les hypothèses.
(i)-(ii)-(iii) La fonction f_n est C^∞ sur $\mathbb{R} \times (0,\infty)$, donc est continue par morceaux en t, C^1 en x, et la dérivée partielle $\frac{\partial f_n}{\partial x}$ est continue en t.
(iv). On a

$$\frac{\partial f_n}{\partial x}(x,t) = -n\frac{2x}{(x^2+t^2)^{n+1}}.$$

On cherche une domination de cette fonction, valide pour tout $x \in (0,\infty)$. En fait, il n'existe pas de telle domination intégrable... on va chercher une domination valide pour tout $x \in (\varepsilon,\infty)$ pour $\varepsilon > 0$. Ceci montrera que I_n est C^1 sur (ε, M). Mais comme ce sera vrai pour tout $\varepsilon > 0$ et $M > 0$, on en déduira que I_n est C^1 sur $(0,\infty)$.

Pour $x \in (\varepsilon, M)$, on a

$$\left|\frac{\partial f_n}{\partial x}(x,t)\right| \leq n\frac{M}{(\varepsilon^2+t^2)^{n+1}} =: \phi(t).$$

On peut appliquer le théorème de dérivation sous le signe intégrale. On trouve que I_n est de classe C^1 sur (ε, M), avec

$$I_n'(x) = \int_0^\infty \frac{\partial f_n}{\partial x}(x,t)\mathrm{d}t = -n2x\int_0^\infty \frac{1}{(x^2+t^2)^{n+1}} = -2nxI_{n+1}(x).$$

c/ Avec la question a/, on sait que $I_n(x) = \frac{1}{x^{2n-1}} I_n$. Donc

$$I_n'(x) = -(2n-1)\frac{1}{x^{2n}} I_{n+1}.$$

L'égalité précédente donne

$$-(2n-1)\frac{1}{x^{2n}} I_n = -2nxI_{n+1}(x) = -2nx\frac{1}{x^{2n+1}} I_{n+1}, \qquad \text{donc} \quad I_{n+1} = \frac{2n-1}{2n} I_n.$$

Par récurrence, on obtient

$$I_{n+1} = \frac{2n-1}{2n} I_n = \frac{2n-1}{2n}\frac{(2n-3)}{2n-2} I_{n-1} = \cdots = \frac{(2n-1)(2n-3)\cdots 1}{(2n)(2n-2)\cdots 2} I_1 = \frac{(2n-1)(2n-3)\cdots 1}{2^n n!} I_1$$

En multipliant le numérateur et le dénominateur par $(2n)(2n-2)\cdots 2$, on trouve

$$I_{n+1} = \frac{(2n)!}{4^n (n!)^2} I_1 = \frac{1}{4^n}\binom{n}{2n}\frac{\pi}{2}.$$

Exercice 2.
On chercher à étudier qualitativement[1] la fonction

$$F(x) := \int_0^{\pi/2} \frac{\cos(t)}{t+x} \mathrm{d}t.$$

a/ Montrer que $F(x)$ est bien défini sur $(0, \infty)$, et que F est décroissante sur $(0, \infty)$.
b/ **Étude à l'∞.** Montrer que $\lim_{x\to\infty} F(x) = 0$.
c/ **Étude en** 0. Montrer que pour tout $t \in \mathbb{R}$, on a $1 - \frac{t^2}{2} \le \cos(t) \le 1$. En déduire que $F(x) \sim_0 -\ln(x)$.
d/ **Étude à l'∞ (bis).** En s'inspirant du TCD, Montrer que pour tout $\lim_{x\to\infty} xF(x) = 1$.

Solution

Posons $f(x,t) := \frac{\cos(t)}{t+x}$.
a/ Soit $x > 0$. La fonction $t \mapsto f(x,t)$ est continue sur $[0, \pi/2]$, donc intégrable sur $I = (0, \pi/2)$.
Pour tout $0 < x_1 < x_2$, et pour tout $t \in (0, \pi/2)$, on a $f(x_1, t) > f(x_2, t)$. En intégrant, on obtient

$$F(x_1) = \int_0^{\pi/2} f(x_1, t)\mathrm{d}t > \int_0^{\pi/2} f(x_2, t)\mathrm{d}t = F(x_2).$$

Donc F est décroissante sur $\mathbb{R}^+$.
b/ On a, pour $x > 0$ et $t \in [0, \pi/2]$

$$|f(x,t)| \le \frac{1}{x+t} \le \frac{1}{x}.$$

En intégrant sur $(0, \pi/2)$, on trouve

$$|F(x)| \le \int_0^{\pi/2} |f(x,t)| \le \frac{1}{x} \int_0^{\pi/2} 1\mathrm{d}t = \frac{1}{x}\frac{\pi}{2} \xrightarrow[x\to\infty]{} 0.$$

c/ L'inégalité $\cos(t) \le 1$ est triviale. Posons $g(t) := 1 - \frac{t^2}{2} - \cos(t)$. On veut montrer que $g \le 0$. Par symétrie $g(-t) = g(t)$, il suffit de le montrer pour $t \ge 0$.
La fonction g est de classe C^∞, avec $g'(t) = -t + \sin(t)$, et $g''(t) = -1 + \cos(t)$. On a $g'' \le 0$, donc g' est décroissante, avec $g'(0) = 0$, donc $g'(t) \le 0$ pour tout $t \ge 0$. De même, comme $g' \le 0$, g est décroissante, et vérifie $g(0) = 0$, ce qui implique $g(t) \le 0$ pour tout $t \ge 0$. Ceci montre que $1 - \frac{t^2}{2} \le \cos(t)$.
On en déduit que

$$\int_0^{\pi/2} \frac{1 - \frac{t^2}{2}}{x+t}\mathrm{d}t \le F(x) \le \int_0^{\pi/2} \frac{1}{x+t}\mathrm{d}t.$$

On a

$$\int_0^{\pi/2} \frac{1}{x+t}\mathrm{d}t = [\ln(x+t)]_0^{\pi/2} = \ln(x + \pi/2) - \ln(x) = -\ln(x) + O(1),$$

et, en utilisant que $x + t \ge t$,

$$\left| \int_0^{\pi/2} \frac{t^2}{x+t}\mathrm{d}t \right| \le \int_0^{\pi/2} \frac{t^2}{t}\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2}\right)^2 = O(1).$$

Ainsi, on a $F(x) \sim_0 -\ln(x)$.
d/ On a

$$xF(x) = \int_0^{\pi/2} \left(\frac{x}{x+t}\right) \cos(t)\mathrm{d}t.$$

Soit (x_n) une suite qui diverge vers $+\infty$. On pose $f_n(t) := \frac{x_n}{x_n+t}\cos(t)$. On applique le TCD pour f_n.
(i) La suite f_n converge simplement vers $f(t) := \cos(t)$.
(ii) Les fonctions f_n et f sont C^∞ sur $[0, \pi/2]$, donc mesurables.
(iii) On a $x/(x+t) \le 1$. Donc, en posant $\phi(t) = 1$, on a $|f_n(t)| \le \phi(t)$ pour tout $t \in (0, \pi/2)$. De plus, ϕ est intégrable sur $(0, \pi/2)$, car continue sur $[0, \pi/2]$.
On peut appliquer le TCD, et on obtient

$$\lim_{n\to\infty} x_n F(x_n) = \lim_{n\to\infty} \int_0^{\pi/2} f_n(t)\mathrm{d}t = \int_0^{\pi/2} \cos(t)\mathrm{d}t = 1.$$

1. On ne cherche pas l'expression exacte de F (car c'est souvent inutile), mais ses propriétés.

Ceci étant vrai pour toute suite x_n, on a bien $xF(x) \xrightarrow[x\to\infty]{} 0$.

Exercice 3. (Transformée de Fourier de la Gaussienne)
On note
$$F(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-t^2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}xt}\mathrm{d}t.$$
On rappelle que $F(0) = \sqrt{\pi}$ (intégrale de la Gaussienne).
a/ Montrer que F est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$, et que
$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad F^{(k)}(x) = \int_{-\infty}^{\infty} (\mathrm{i}t)^k \mathrm{e}^{-t^2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}xt}\mathrm{d}t.$$
b/ Avec une intégration par partie, montrer que $F'(x) = -\frac{x}{2}F(x)$.
c/ On admet que F est réelle et ne s'annule pas (cf théorème de Cauchy-Lipschitz). Montrer que $\ln\left|\frac{F(x)}{F(0)}\right| = -\frac{x^2}{4}$.
d/ En déduire que $F(x) = \sqrt{\pi}\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{4}}$.

Solution
a/ On montre le résultat par récurrence. On suppose que pour un certain $k \in \mathbb{N}$, on a
$$F^{(k)}(x) = \int_{-\infty}^{\infty} (\mathrm{i}t)^k \mathrm{e}^{-t^2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}xt}\mathrm{d}t.$$
(C'est vrai pour $k = 0$). On pose $f(x,t) := (\mathrm{i}t)^k\mathrm{e}^{-t^2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}xt}$.
(i)-(ii)-(iii) La fonction f est C^∞ sur $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ par composition de fonctions C^∞.
(iv) De plus, on a
$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,t) = (\mathrm{i}t)^{k+1}\mathrm{e}^{-t^2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}xt}.$$
donc
$$\left|\frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\right| \le t^k\mathrm{e}^{-t^2} =: \phi(t).$$
La fonction ϕ est C^∞ sur $\mathbb{R}$, intégrable sur $\mathbb{R}$ et domine $\partial_x f$. D'après le théorème de dérivation sous le signe intégral, on obtient que $F^{(k)}$ est dérivable, et que
$$F^{(k+1)}(x) = \int_{-\infty}^{\infty} (\mathrm{i}t)^{k+1} \mathrm{e}^{-t^2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}xt}\mathrm{d}t.$$
Par récurrence, on obtient que F est C^∞.

b/ On fait une IPP, en remarquant que $t\mathrm{e}^{-t^2} = \frac{1}{2}(\mathrm{e}^{-t^2})'$.
$$F'(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{i}t\mathrm{e}^{-t^2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}xt}\mathrm{d}t = -\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\mathrm{i}}{2}\mathrm{e}^{-t^2}(-\mathrm{i}x)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}xt} + \left[\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-t^2}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}xt}\right]_{-\infty}^{\infty} = -\frac{x}{2}F(x) + 0.$$

c/ F est continue, réelle, ne s'annule pas, avec $F(0) = \sqrt{\pi} \ge 0$, F est positive. On peut écrire
$$\frac{F'(x)}{F(x)} = -\frac{x}{2}.$$
d/ En intégrant entre 0 et x, on obtient
$$\ln F(x) - F(0) = -\frac{x^2}{4}, \qquad \text{donc} \quad F(x) = F(0)\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{4}} = \sqrt{\pi}\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{4}}.$$

Exercice 4.
Soit $f : \mathbb{R}\to\mathbb{R}$ une fonction de classe C^∞, avec $f(0) = 0$.

a/ Soit $g(x) := \frac{f(x)}{x}$. Montrer que

$$g(x) = \int_0^1 f'(tx)\mathrm{d}t.$$

b/ En déduire que g est de classe C^∞.
c/ Montrer que si $f(0) = f'(0) = \cdots = f^{(n)}(0) = 0$, alors $g_n(x) := \frac{f(x)}{x^{n+1}}$ est de classe C^∞.

Solution

a/ On fait le changement de variable $u = tx$ (x est un paramètre fixé), donc $\mathrm{d}u = x\mathrm{d}t$. On trouve

$$g(x) = \int_0^1 f'(tx)\mathrm{d}t = \frac{1}{x}\int_0^x f'(u)\mathrm{d}u = \frac{1}{x}(f(x) - f(0)) = \frac{f(x)}{x}.$$

b/ Montrons par récurrence que $g^{(k)}(x) = \int_0^1 t^k f^{(k+1)}(tx)\mathrm{d}t$. C'est vrai pour $k = 0$. Supposons que c'est vrai pour $k \in \mathbb{N}$. On pose $h(x,t) := t^k f^{(k+1)}(tx)$ sur $\mathbb{R} \times (0,1)$.
(i)-(ii)-(iii) La fonction h est C^∞ sur son domaine (car f est C^∞).
(iv) On a

$$\frac{\partial h}{\partial x}(x,t) = t^{k+1} f^{(k+2)}(tx).$$

Posons $I_x = (x-1, x+1)$. La fonction $f^{(k+2)}$ est C^∞ sur $\mathbb{R}$, donc bornée sur $(0, x+1)$. Soit M un majorant, on pose $\phi(t) = M$, qui est intégrable sur $(0,1)$, et domine $\frac{\partial h}{\partial x}$.
On peut appliquer le théorème de dérivation sous le signe intégrale. On trouve que $g^{(k)}$ est dérivable sur I_x, avec

$$g^{(k+1)}(x) = \int_0^1 t^{k+1} f^{(k+2)}(tx)\mathrm{d}t.$$

Ceci étant vrai pour tout $x \in \mathbb{R}$, g est C^∞ sur $\mathbb{R}$.
c/ On prouve le résultat par récurrence sur n. Pour $n = 0$, c'est le résultat précédent. Supposons que $g_n := \frac{f(x)}{x^{n+1}}$ est C^∞, et que $f^{n+1}(x) = 0$. Alors, d'après le théorème de Taylor, on a, lorsque $x \to 0$, $f(x) = \frac{1}{(n+2)!} f^{(n+2)}(0)x^{n+2} + o(x^{n+2})$. En particulier

$$g_n(x) = \frac{f(x)}{x^{n+1}} = \frac{1}{(n+2)!} f^{(n+2)}(0)x + o(x) \xrightarrow[x\to 0]{} 0.$$

La fonction g_n est C^∞ avec $g_n(0) = 0$. En appliquant le résultat de la question précédente à g_n, on trouve que

$$g_{n+1}(x) := \frac{g_n(x)}{x} = \frac{f(x)}{x^{n+2}}$$

est C^∞.

Exercice 5. Intégration sur un intervalle «mobile»

Soit $f(x,t) : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ et $v : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ des fonctions continues. On pose

$$F(x) = \int_0^{v(x)} f(x,t)\mathrm{d}t.$$

a/ En utilisant le changement de variable $t = sv(x)$ montrer que

$$F(x) = \int_0^1 g(x,s)\mathrm{d}s, \quad \text{avec} \quad g(x,s) := v(x) f\big(x, sv(x)\big).$$

b/ En déduire que F est continue.
c*/ On suppose maintenant que f et v sont de classe C^1. Montrer que F est de classe C^1, et que

$$F'(x) = v'(x) f(x, v(x)) + \int_0^{v(x)} \partial_x f(x,t)\mathrm{d}t.$$

d/ Comment dérive-t-on des expressions de la forme $\int_{u(x)}^{v(x)} f(x,t)\mathrm{d}t$?

Exercice 6.

On veut étudier la fonction

$$F(x) := \int_{-\infty}^{\infty} \exp^{-\left(t^2+\frac{x^2}{t^2}\right)} \,\mathrm{d}t.$$

a/ Montrer que F est une fonction paire, de classe C^1 sur $\mathbb{R}$.
b/ Montrer que pour tout $x > 0$, on a $F'(x) = 2F(x)$. *(On pourra faire le changement de variable $u = x/t$).*
c/ En déduire que $F(x) = \sqrt{\pi}\mathrm{e}^{-2|x|}$.

Solution

a/ On a $F(-x) = F(x)$. Posons $f(x,t) := \mathrm{e}^{-(t^2+\frac{x^2}{t^2})}$ sur $\mathbb{R} \times \mathbb{R}_*$. La fonction n'est pas bien défini en $t = 0$. Du coup, on va plutôt écrire

$$\int_{-\infty}^{\infty} \exp^{-\left(t^2+\frac{x^2}{t^2}\right)} \,\mathrm{d}t = \int_{-\infty}^{0} \exp^{-\left(t^2+\frac{x^2}{t^2}\right)} \,\mathrm{d}t + \int_{0}^{\infty} \exp^{-\left(t^2+\frac{x^2}{t^2}\right)} \,\mathrm{d}t,$$

et étudier les deux intégrales séparément. On se concentre sur la première intégrale dans la suite.
(i)-(ii)-(iii) La fonction f est C^∞ sur son domaine de définition par composition de fonctions C^∞.
(iv) On a

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,t) = -2\frac{x}{t^2}\mathrm{e}^{-(t^2+\frac{x^2}{t^2})}.$$

Si $x = 0$, on a $\frac{\partial f}{\partial x}(0,t) = 0$ pour tout $t \in \mathbb{R}$, et si $x \neq 0$, on a montré dans le TD1 que $\lim_{t\to 0} \frac{x}{t}\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{t^2}} = 0$, et est une fonction bornée. Si M est un majorant de cette fonction, on a

$$\left|\frac{\partial f}{\partial x}\right|(x,t) = M\mathrm{e}^{-t^2} =: \phi(t).$$

La fonction ϕ est intégrable sur $(0,\infty)$. On en déduit qu'on peut appliquer le théorème de dérivation terme à terme. On obtient

$$F'(x) = -2x \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{t^2}\mathrm{e}^{-(t^2+\frac{x^2}{t^2})}\mathrm{d}t.$$

On fait le changement de variable $u = \frac{x}{t}$, donc $\mathrm{d}u = -\frac{x}{t^2}$, On remarquera que ce changement de variable est bien un difféomorphisme sur $\mathbb{R}^+$ et sur $\mathbb{R}^-$. Sur $\mathbb{R}^+$, on a

$$-2\int_{0}^{\infty} \frac{x}{t^2}\mathrm{e}^{-(t^2+\frac{x^2}{t^2})}\mathrm{d}t = 2\int_{\infty}^{0} \mathrm{e}^{-(\frac{x^2}{u^2}+u^2)}\mathrm{d}u.$$

Exercice 7. (Une transformée de Fourier)

Soit $f(x)$ la fonction définie par

$$f(x) = \begin{cases} 1+x & \text{si} \quad -1 \leq x \leq 0, \\ 1-x & \text{si} \quad 0 \leq x \leq 1, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

a/ Dessiner le graphe de f.
b/ Montrer que la transformée de Fourier de f (définie par $\widehat{f}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{\mathbb{R}} f(x)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega x}\mathrm{d}x$) est

$$\widehat{f}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\frac{\sin^2(\omega)}{\omega^2}.$$

c/ On admet que le théorème de Parseval marche pour la fonction f. Montrer que

$$\int_0^\infty \frac{\sin^4(t)}{t^4}\mathrm{d}t = \frac{\pi}{3}.$$