TD8 : Dérivation sous le signe intégrale.

Maths fondamentales, L2, PSL, 2023-2024 *D. Gontier, gontier@ceremade.dauphine.fr*

Exercice 1.
Le but de cet exercice est de calculer l'intégrale $I_n := \displaystyle\int_0^\infty \frac{\mathrm{d}t}{(1+t^2)^n}$. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, et $x \in \mathbb{R}$, on pose

$$I_n(x) := \int_0^\infty \frac{\mathrm{d}t}{(x^2+t^2)^n}, \quad \text{de sorte que} \quad I_n = I_n(x=1).$$

a/ Montrer que $I_n(x) = \frac{1}{x^{2n-1}} I_n$. *(on pourra faire un changement de variable).*
b/ Calculer $I_1(x)$.
c/ Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $I_n'(x) = -2nxI_{n+1}(x)$.
d/ En déduire que $I_{n+1} = \frac{2n-1}{2n} I_n$, puis que

$$I_{n+1} = \frac{(2n-1)(2n-3)\cdots 1}{(2n)(2n-2)\cdots 2} \frac{\pi}{2} = \frac{1}{4^n}\binom{2n}{n}\frac{\pi}{2}.$$

Exercice 2.
On chercher à étudier qualitativement [1] la fonction

$$F(x) := \int_0^{\pi/2} \frac{\cos(t)}{t+x} \mathrm{d}t.$$

a/ Montrer que $F(x)$ est bien défini sur $(0, \infty)$, et que F est décroissante sur $(0, \infty)$.
b/ **Étude à l'∞.** Montrer que $\lim_{x\to\infty} F(x) = 0$.
c/ **Étude en 0.** Montrer que pour tout $t \in \mathbb{R}$, on a $1 - \frac{t^2}{2} \le \cos(t) \le 1$. En déduire que $F(x) \sim_0 -\ln(x)$.
d/ **Étude à l'∞ (bis).** En s'inspirant du TCD, Montrer que pour tout $\lim_{x\to\infty} xF(x) = 1$.

Exercice 3. (Transformée de Fourier de la Gaussienne)
On note

$$F(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-t^2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}xt}\mathrm{d}t.$$

On rappelle que $F(0) = \sqrt{\pi}$ (intégrale de la Gaussienne).
a/ Montrer que F est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$, et que

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad F^{(k)}(x) = \int_{-\infty}^{\infty} (\mathrm{i}t)^k \mathrm{e}^{-t^2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}xt}\mathrm{d}t.$$

b/ Avec une intégration par partie, montrer que $F'(x) = -\frac{x}{2}F(x)$.
c/ On admet que F est réelle et ne s'annule pas (cf théorème de Cauchy-Lipschitz). Montrer que $\ln\left|\frac{F(x)}{F(0)}\right| = -\frac{x^2}{4}$.
d/ En déduire que $F(x) = \sqrt{\pi}\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{4}}$.

Exercice 4.
Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction de classe C^∞, avec $f(0) = 0$.
a/ Soit $g(x) := \frac{f(x)}{x}$. Montrer que

$$g(x) = \int_0^1 f'(tx)\mathrm{d}t.$$

b/ En déduire que g est de classe C^∞.
c/ Montrer que si $f(0) = f'(0) = \cdots = f^{(n)}(0) = 0$, alors $g_n(x) := \frac{f(x)}{x^{n+1}}$ est de classe C^∞.

---

1. On ne cherche pas l'expression exacte de F (car c'est souvent inutile), mais ses propriétés.

Exercice 5. Intégration sur un intervalle «mobile»
Soit $f(x,t) : \mathbb{R}\times\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ et $v : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ des fonctions continues. On pose

$$F(x) = \int_0^{v(x)} f(x,t)\mathrm{d}t.$$

a/ En utilisant le changement de variable $t = sv(x)$ montrer que

$$F(x) = \int_0^1 g(x,s)\mathrm{d}s, \quad \text{avec} \quad g(x,s) := v(x)f\big(x, sv(x)\big).$$

b/ En déduire que F est continue.
c*/ On suppose maintenant que f et v sont de classe C^1. Montrer que F est de classe C^1, et que

$$F'(x) = v'(x)f(x,v(x)) + \int_0^{v(x)} \partial_x f(x,t)\mathrm{d}t.$$

d/ Comment dérive-t-on des expressions de la forme $\int_{u(x)}^{v(x)} f(x,t)\mathrm{d}t$?

Exercice 6.
On veut étudier la fonction

$$F(x) := \int_{-\infty}^{\infty} \exp^{-\left(t^2+\frac{x^2}{t^2}\right)} \mathrm{d}t.$$

a/ Montrer que F est une fonction paire, de classe C^1 sur $\mathbb{R}$.
b/ Montrer que pour tout $x > 0$, on a $F'(x) = 2F(x)$. *(On pourra faire le changement de variable $u = x/t$).*
c/ En déduire que $F(x) = \sqrt{\pi}\mathrm{e}^{-2|x|}$.

Exercice 7. (Une transformée de Fourier)
Soit $f(x)$ la fonction définie par

$$f(x) = \begin{cases} 1+x & \text{si} \quad -1 \le x \le 0, \\ 1-x & \text{si} \quad 0 \le x \le 1, \\ 0 \quad \text{sinon.} \end{cases}$$

a/ Dessiner le graphe de f.
b/ Montrer que la transformée de Fourier de f (définie par $\widehat{f}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{\mathbb{R}} f(x)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega x}\mathrm{d}x$) est

$$\widehat{f}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\frac{\sin^2(\omega)}{\omega^2}.$$

c/ On admet que le théorème de Parseval marche pour la fonction f. Montrer que

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin^4(t)}{t^4}\mathrm{d}t = \frac{\pi}{3}.$$