TD7 : Séries, Intégrales et TCD. Corrections

Maths fondamentales, L2, PSL, 2023-2024 *D. Gontier, gontier@ceremade.dauphine.fr*

Autour du TCD

Exercice 1. Application du théorème de convergence dominée

a/ Calculer les limites suivantes lorsque $n \to \infty$.

$$\int_0^{\pi/4} |\tan(t)|^n \, \mathrm{d}t, \qquad \int_1^\infty \frac{\mathrm{d}t}{1+t^n}, \qquad \int_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{-t^{2n}} \mathrm{d}t, \quad \int_1^\infty \frac{\cos(\frac{t}{n})}{t^2} \mathrm{d}t$$

b/ Soit f une fonction continue sur $[0,1]$. Calculer la limite lorsque $n \to \infty$ de

$$\int_0^1 f(t^n) \mathrm{d}t, \qquad \int_0^1 f(t^{\frac{1}{n}}) \mathrm{d}t, \qquad \int_0^1 n t^n f(t) \mathrm{d}t.$$

Indice : pour la troisième intégrale, on pourra faire le changement de variable $u = t^n$.

c/ **(Césaro continue).** Soit f une fonction continue qui tend vers l en $+\infty$. Calculer la limite lorsque $n \to \infty$ de

$$\frac{1}{n} \int_0^n f(t) \mathrm{d}t.$$

Indice, on pourra faire le changement de variable $u = t/n$.

Solution

a/ 1. Posons $f_n(t) := |\tan(t)|^n$.

(i) Pour tout $t \in (0, \pi/4)$, on a $0 < \tan(t) < 1$, donc la suite (f_n) converge simplement vers $f(t) := 0$ sur $(0, \pi/4)$.

(ii) Les fonctions f_n et f sont continues sur l'intervalle fermé $[0, \pi/4]$, donc intégrables.

(iii) En prenant $\phi(t) := 1$ sur $(0, \pi/4)$, on a $|f_n(t)| \le 1^n \le 1 \le \phi(t)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $t \in (0, \pi/4)$. Donc ϕ est une domination.

Ainsi, le TCD s'applique, et on en déduit que

$$\lim_{n\to\infty} |\tan(t)|^n \mathrm{d}t = \int_0^{\pi/4} 0 = 0.$$

2. Posons $f_n(t) = \frac{1}{1+t^n}$ sur $I = (1, \infty)$.

(i) Pour tout $t \in I$, on a $|t| > 1$, donc $|t|^n \to \infty$. On en déduit que la suite (f_n) converge simplement vers $f(t) := 0$ sur $I = (1, \infty)$.

(ii) La fonction f est évidemment intégrable sur I. Pour $n \ge 2$ (attention, ne marche pas pour $n = 0$!), la fonction f_n est continue sur $[1, \infty)$, et vérifie le critère de Riemann $|f_n(t)| \le \frac{1}{t^2}$ en $+\infty$. Donc f_n est intégrable sur I pour tout $n \ge 2$.

(iii) Posons $\phi(t) := \frac{1}{t^2}$, qui est intégrable sur $I = (1, \infty)$ comme précédemment. Pour tout $n \ge 2$ et tout $t \ge 1$, on a $1 + t^n \ge t^n \ge t^2$, donc $|f_n(t)| \le \phi(t)$.

Ainsi, le TCD s'applique, et on en déduit que

$$\lim_{n\to\infty} \int_1^\infty \frac{1}{1+t^n} \mathrm{d}t = \int_1^\infty 0 = 0.$$

3. Posons $f_n(t) := \mathrm{e}^{-t^{2n}}$ sur $I = \mathbb{R}$.

(i) Pour tout $|t| > 1$, on a $t^{2n} \to +\infty$, pour $|t| = 1$, on a $t^{2n} \to 1$, et pour $|t| < 1$, on a $t^{2n} \to 0$. En en déduit (on utilise que exp est une fonction continue) que $f_n(t)$ converge simplement vers $f(t)$ définie par

$$f(t) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad |t| > 1 \\ \mathrm{e}^{-1} & \text{si} \quad |t| = 1 \\ 1 & \text{si} \quad |t| < 1. \end{cases}$$

(ii) La fonction f est continue par morceau sur $\mathbb{R}$, et à support dans $(-1, 1)$, donc est intégrable. Pour tout $n \ge 1$ (ne marche pas pour $n = 0$), la fonction f_n est continue sur $\mathbb{R}$, et vérifie pour $|t| > 1$, $|f_n(t)| \le \mathrm{e}^{-t^{2n}} \le \mathrm{e}^{-|t|}$, donc est intégrable en $\pm\infty$. Ainsi, f_n est intégrable sur $\mathbb{R}$.

(iii) Posons $\phi(t) = \max\{\mathrm{e}^{-1}, f_1\}$. On a déjà montré que ϕ était intégrable. De plus, on a $|f_n(t)| \le f_1(t)$ si $|t| > 1$,

et $f_n(t) \leq \mathrm{e}^{-1}$ si $t < 1$. Dans tous les cas, on a $|f_n(t)| \leq \phi(t)$, donc ϕ est une domination.
On peut appliquer le TCD, et on trouve

$$\lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{-t^{2n}} \mathrm{d}t = \int_{\mathbb{R}} f(t)\mathrm{d}t = \int_{-1}^{1} 1 = 2.$$

4. Posons $f_n(t) := \cos(t/n)/t^2$ sur $I = (1, \infty)$.
(i) On a $x/n \to 0$, donc $\cos(x/n) \to 1$. Comme $0 \notin I$, on en déduit que la suite (f_n) converge simplement vers $f(t) := \frac{1}{t^2}$ sur I.
(ii) Les fonctions f_n et f sont continues sur $[1, \infty]$, et on a $|f_n(t)| \leq \frac{1}{t^2}$ pour tout $t \in I$ (et pareil pour f). On en déduit que f_n et f sont intégrables sur I.
(iii) Posons $\phi(t) := \frac{1}{t^2} = f(t)$. On a déjà montré que $\phi = f$ était intégrable sur I. De plus, on a $|f_n(t)| \leq \phi(t)$. Donc ϕ est une domination.
On applique le TCD, et on obtient

$$\lim_{n\to\infty} \int_1^\infty f_n(t) = \int_1^\infty \frac{1}{x^2}\mathrm{d}x = \left[\frac{-1}{x}\right]_1^\infty = 1.$$

b/ 1. Posons $f_n(t) = f(t^n)$.
(i) Pour tout $t \in (0, 1)$, on a $t^n \to 0$, donc, comme f est continue en 0, la suite (f_n) converge simplement vers la fonction constante $g(t) := f(0)$.
(ii) Les fonctions f_n et g sont continues sur $[0, 1]$, donc intégrables.
(iii) Soit M un majorant de $|f|$, et posons $\phi(t) = M$ sur $I = (0, 1)$. ϕ et intégrable sur I, et on a $|f_n(t)| \leq M$. Donc ϕ est une domination.
On peut appliquer le TCD, et on trouve que

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 f(t^n)\mathrm{d}t = \int_0^1 f(0)\mathrm{d}t = f(0).$$

2. Le raisonnement est similaire au précédent. Cette fois, on a $t^{1/n} \to 1$ pour tout $t \in (0, 1)$. Donc

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 f(t^n)\mathrm{d}t = \int_0^1 f(1)\mathrm{d}t = f(1).$$

3. On a $nt^n \to 0$ pour tout $t \in (0, 1)$. On obtient facilement que

$$\lim_{n\to\infty} nt^n f(t)\mathrm{d}t = 0.$$

c/ On fait le changement de variable $u = \frac{t}{n}$, donc $\mathrm{d}u = \frac{1}{n}\mathrm{d}t$. On trouve que

$$\frac{1}{n} \int_0^n f(t)\mathrm{d}t = \int_0^1 f(nu)\mathrm{d}u.$$

Posons $f_n(u) := f(nu)$ sur $I = (0, 1)$.
(i) Pour tout $u \in (0, 1)$, on a $nu \to \infty$, donc, par continuité de f, la suite (f_n) converge simplement vers $g(t) := l$.
(ii) Les fonctions f_n et g sont continues sur $[0, 1]$, donc intégrables.
(iii) La fonction f est continue et converge vers l en $+\infty$, donc est bornée. Soit M un majorant de $|f|$. nOn pose $\phi(t) := M$. ϕ est intégrable sur $(0, 1)$, et majore tous les f_n.
Le TCD s'applique, et on trouve

$$\int_0^1 f(nu)\mathrm{d}u \xrightarrow[n\to\infty]{} l.$$

Exercice 2. Un contre-exemple à connaître
Soit ψ une fonction continue de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, telle que pour tout $|x| > L$, $\psi(x) = 0$. On pose $f_n(x) = \psi(x)+\psi(x-n)$.
a/ Montrer que f_n CVS vers ψ lorsque $n \to \infty$.
b/ Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $\int f_n = 2 \int \psi$.
c/ Cela contredit-il le théorème de convergence dominée ?
Solution
a/ Soit $x \in \mathbb{R}$. On a $\psi(x) \xrightarrow[n\to\infty]{} \psi(x)$ (suite indépendante de n). De plus, pour $n \geq |x| + L$, on a $|n - x| \geq$

$n-|x| \geq L$, donc $\psi(x-n)=0$. Ceci étant vrai pour tout n suffisamment grand, on en déduit que $\psi(x-n) \to 0$ lorsque $n \to \infty$. Ainsi, on a

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = \lim_{n\to\infty} \psi(x) + \lim_{n\to\infty} \psi(x-n) = \psi(x).$$

b/ On a directement

$$\int f_n = \int \psi + \int \psi(\cdot - n) = 2\int \psi, \qquad \text{et} \qquad \int f = \int \psi.$$

c/ La suite (f_n) converge simplement vers f, mais $\int f_n$ ne converge pas vers $\int f$. En fait, on n'a pas la domination dans ce cas : il n'existe pas de ϕ intégrable qui domine tous les $\psi(\cdot - n)$.

L'intégration termes à termes

Exercice 3.

On pose $u_n(x) := (-1)^n x^{2n}(1-x)$.
a/ Montrer que la série $\sum_{n=0}^{\infty} u_n$ converge simplement vers $\frac{1-x}{1+x^2}$ pour tout $x \in [0,1)$.
b/ En déduire que

$$\sum_{n\geq 0} \frac{(-1)^n}{(2n+1)(2n+2)} = \frac{\pi}{4} - \frac{\ln(2)}{2}.$$

Solution

a/ Pour $x \in [0,1)$, on a $|-x^2| < 1$, donc la série géométrique de raison $(-x^2)$ converge. On obtient

$$\sum_{n=0}^{\infty} u_n(x) = (1-x)\sum_{n=0}^{\infty}(-x^2)^n = (1-x)\frac{1}{1+x^2}.$$

b/ Vérifions les hypothèses du théorème d'intégration terme à terme sur $I=[0,1)$.
(i) La série $\sum u_n$ converge simplement vers $f(x) := \frac{1-x}{1+x^2}$.
(ii) Les fonctions u_n et f sont continues sur $[0,1)$.
(iii) On a

$$\int_0^1 |u_n(x)|\mathrm{d}x = \int_0^1 x^{2n} - x^{2n+1} = \frac{1}{2n+1} - \frac{1}{2n+2} = \frac{1}{(2n+1)(2n+2)}.$$

La série numérique $\sum_n \int |u_n|$ qui converge (car elle se comporte en $O(N^{-2})$), donc le théorème d'intégration terme à terme s'applique.
On en déduit que f est intégrable, et que

$$\int_0^1 f(t)\mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{\infty}\int_0^1 u_n = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)(2n+2)}.$$

Par ailleurs, on peut calculer directement l'intégrale de f. En effet, on a

$$\int_0^1 f(t)\mathrm{d}t = \int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{1+x^2} - \int_0^1 \frac{x\mathrm{d}x}{1+x^2} = [\arctan(x)]_0^1 - \left[\frac{1}{2}\ln(1+x^2)\right]_0^1 = \frac{\pi}{4} - \frac{\ln(2)}{2}.$$

Exercice 4.

On pose, pour $n, k \in \mathbb{N}$,

$$I_{n,k} := \int_0^1 x^n \left(-\ln(x)\right)^k \mathrm{d}x.$$

a/ Montrer que si $n \geq 1$, alors $I_{n,k}$ est bien défini, et $0 < I_{n,k} < \infty$.
b/ Dans le cas $n=0$ et $k=1$, montrer que $\ln(x)$ est aussi intégrable sur $[0,1]$, avec $\int_0^1 \ln(x) = -1$.
c/ Montrer que si $n \geq 1$,

$$\forall k \geq 1, \quad I_{n,k} = \frac{k}{n+1} I_{n,k-1}, \quad \text{et} \quad I_{n,0} = \frac{1}{n+1}.$$

En déduire que $I_{n,k} = \frac{k!}{(n+1)^{k+1}}$.
d/ Montrer que

$$\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^n} = \int_0^1 \mathrm{e}^{-x\ln(x)}\mathrm{d}x \qquad \left(= \int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{x^x}. \right)$$

Solution

On pose $u_{n,k} := x^n(-\ln(x))^k$ sur $I = (0,1)$.
a/ Les fonctions $u_{n,k}$ sont C^∞ sur $(0,1]$, et lorsque $x \to 0$, on a $u_{n,k}(x) \to 0$ si $n \geq 1$. Donc les fonctions $u_{n,k}$ sont intégrables sur I.
b/ On a

$$\int_\varepsilon^1 \ln(x)\mathrm{d}x = [x\ln(x) - x]_\varepsilon^1 = -1 - \varepsilon\ln(\varepsilon) + \varepsilon \xrightarrow[\varepsilon\to 0]{} -1.$$

c/ On commencer par le cas $k = 0$. On a

$$I_{n,0} = \int_0^1 x^n \mathrm{d}x = \left[\frac{x^{n+1}}{n+1}\right]_0^1 = \frac{1}{n+1}.$$

Par ailleurs, avec une intégration par partie,

$$\begin{aligned} I_{n,k} &= \int_0^1 x^n(-\ln(x))^k\mathrm{d}x = -\int_0^1 \frac{x^{n+1}}{n+1}k(-\ln(x))^{k-1}\frac{(-1)}{x}\mathrm{d}x + \left[\frac{x^{n+1}}{n+1}(-\ln(x))^k\right]_0^1 \\ &= \frac{k}{n+1}\int_0^1 x^n(-\ln(x))^{k-1}\mathrm{d}x + 0 = \frac{k}{n+1}I_{n,k-1}. \end{aligned}$$

Par récurrence, on en déduit que

$$I_{n,k} = \frac{k}{n+1}I_{n,k-1} = \frac{k}{n+1}\frac{(k-1)}{(n+1)}I_{n,k-2} = \cdots = \frac{k!}{(n+1)^k}I_{n,0} = \frac{k!}{(n+1)^{k+1}}.$$

d/ Posons $v_n(x) := \frac{1}{n!}x^n(-\ln(x))^n$ sur $I = (0,1)$ (en fait, $v_n = \frac{1}{n!}u_{n,n}$). On vérifie les hypothèses du théorème d'intégration terme à terme sur I.
(i) La série $\sum_{n=0}^\infty v_n$ converge simplement vers $f(x) := \mathrm{e}^{-x\ln(x)}$.
(ii) Les fonctions v_n sont intégrables sur I.
(iii) Les fonctions v_n sont positives sur I, et on a

$$a_n := \int_0^1 |v_n| = \int_0^1 v_n = \frac{1}{n!}\frac{n!}{(n+1)^{n+1}} = \frac{1}{(n+1)^{n+1}}.$$

La série (a_n) est sommable. On peut appliquer le théorème d'intégration terme à terme. On en déduit que f est intégrable, avec

$$\int_0^1 f = \int_0^1 \mathrm{e}^{-x\ln(x)}\mathrm{d}x = \sum_{n=0}^\infty \frac{1}{(n+1)^{n+1}} = \sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n^n}.$$

Exercice 5.

On pose $u_n(x) = \frac{-1}{n}\ln(x)x^n$.
a/ Montrer que $\sum_{n=1}^\infty u_n(x)$ converge simplement vers $\ln(x)\ln(1-x)$ sur $(0,1)$.
b/ En utilisant le résultat de l'exercice précédent, en déduire que $\ln(x)\ln(1-x)$ est intégrable sur $(0,1)$, et que

$$\int_0^1 \ln(x)\ln(1-x)\mathrm{d}x = \sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n(n+1)^2}.$$

c/ En faisant une décomposition en éléments simples de $\frac{1}{x(x+1)^2}$, montrer que

$$\frac{1}{n(n+1)^2} = \frac{1}{n} - \frac{1}{(n+1)^2} - \frac{1}{n+1}.$$

En déduire que

$$\int_0^1 \ln(x)\ln(1-x)\mathrm{d}x = 2 - \frac{\pi^2}{6}.$$

Solution

a/ On rappelle que ln est DSE de rayon de CV $R = 1$. En particulier,

$$\ln(x)\ln(1-x) = \ln(x)\sum_{n=1}^{\infty} \frac{-1}{n} x^n = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x).$$

Donc la série $\sum u_n$ converge vers $\ln(x)\ln(1-x)$ sur $I = (0,1)$.
b/ Montrons que la série $\sum u_n$ vérifie les hypothèses du théorème d'intégration terme à terme.
(i) La série $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ converge simplement vers $f(x) := \ln(x)\ln(1-x)$ (question précédente).
(ii) Les fonctions u_n sont positives et intégrables sur I, avec (cf exercice précédent)

$$a_n := \int_0^1 |u_n| \int_0^1 u_n = \frac{1}{n}\int_0^1 (-\ln(x))x^n = \frac{1}{n} I_{n,1} = \frac{1}{n}\frac{1}{(n+1)^2}.$$

(iii) On a $a_n \sim \frac{1}{n^3}$, donc la série $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ est sommable.
On peut appliquer le théorème d'intégration terme à terme, et on déduit que f est intégrable sur I, et que

$$\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x = \int_0^1 \ln(x)\ln(1-x)\mathrm{d}x = \sum_{n=1}^{\infty}\int_0^1 u_n = \sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}\frac{1}{(n+1)^2}.$$

c/ On peut écrire la décomposition en éléments simples sous la forme

$$\frac{1}{x(x+1)^2} = \frac{a}{x} + \frac{b}{1+x} + \frac{c}{(1+x)^2}.$$

On peut facilement trouver la valeur de a en remarquant que $\lim_{x\to 0} x \cdot \frac{1}{x(x+1)} = 1$ (donc $a = 1$), et la valeur de c avec $\lim_{x\to -1}(1+x)^2 \cdot \frac{1}{x(x+1)} = -1$ (donc $c = -1$). On trouve

$$\frac{1}{x} + \frac{b}{1+x} - \frac{1}{(1+x)^2} = \frac{(1+x)^2 + bx(1+x) - x}{x(1+x)^2} = \frac{1 + x + x^2 + bx^2 + bx}{x(1+x)^2}.$$

Par identification, on doit avoir $b = -1$. On a montré que

$$\frac{1}{x(x+1)^2} = \frac{1}{x} - \frac{1}{1+x} - \frac{1}{(1+x)^2}.$$

On trouve donc que (on reconnait une série télescopique)

$$\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n(n+1)^2} = \sum_{n=1}^{N}\frac{1}{n} - \sum_{n=1}^{N}\frac{1}{n+1} - \sum_{n=1}^{N}\frac{1}{(n+1)^2} = 1 - \frac{1}{N+1} - \sum_{n=2}^{N+1}\frac{1}{n^2}$$

La dernière série est convergente, et converge vers $\frac{\pi^2}{6} - 1$. On obtient donc

$$\int_0^1 \ln(x)\ln(1-x)\mathrm{d}x = 2 - \frac{\pi^2}{6}.$$

Exercice 6. Sur la série $\sum \frac{\cos(nx)}{n}$

a/ Montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}\setminus 2\pi\mathbb{Z}$ et tout $t \in (0,1)$, on a

$$\mathrm{Re}\left(\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}}{1 - \mathrm{e}^{\mathrm{i}x}t}\right) = \frac{\cos(x) - t}{1 - 2t\cos(x) + t^2}.$$

b/ En déduire que (*on pourra reconnaître une intégrande de la forme* $\frac{u'}{u}$)

$$\mathrm{Re}\int_0^1 \left(\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}}{1 - \mathrm{e}^{\mathrm{i}x}t}\right)\mathrm{d}t = -\ln\left|2\sin\frac{x}{2}\right|.$$

c/ Montrer que (*On fera très attention à la domination ici... Peut-être un TCD ?*)

$$\sum_{n=0}^{\infty}\int_0^1 \mathrm{e}^{\mathrm{i}(n+1)x}t^n\mathrm{d}t = \int_0^1 \left(\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}}{1 - \mathrm{e}^{\mathrm{i}x}t}\right)\mathrm{d}t.$$

d/ En déduire que

$$\boxed{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(nx)}{n} = -\ln\left|2\sin\frac{x}{2}\right|.}$$

Solution

a/ On a, pour $x \in \mathbb{R} \setminus 2\pi\mathbb{Z}$ (le dénominateur ne s'annule pas)

$$\mathrm{Re}\left(\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}}{1-\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}t}\right) = \mathrm{Re}\left(\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}(1-\mathrm{e}^{-\mathrm{i}x}t)}{|1-\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}t|^2}\right) = \mathrm{Re}\left(\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}-t}{1-2\cos(x)t+t^2}\right) = \frac{\cos(x)-t}{1-2\cos(x)t+t^2}$$

b/ On pose $u(t) := 1-2\cos(x)t+t^2$, de sorte que $u'(t) = -2\cos(t)+2t$. On obtient

$$\mathrm{Re}\int_0^1 \left(\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}}{1-\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}t}\right)\mathrm{d}t = \frac{-1}{2}\int_0^1 \frac{u'(t)}{u(t)}\mathrm{d}t = -\frac{1}{2}\left[\ln u(t)\right]_0^1 = -\frac{1}{2}\left[\ln(u(1)) - \ln(u(0))\right] = -\frac{1}{2}\ln(2-2\cos(x)).$$

Enfin, on utilise la relation $\cos(x) = 1-2\sin^2(x/2)$, donc $2-2\cos(x) = 4\sin^2(x/2)$, et enfin

$$\mathrm{Re}\int_0^1 \left(\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}}{1-\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}t}\right)\mathrm{d}t = -\ln(|2\sin(x/2)|).$$

c/ On pose $u_n(t) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}(n+1)x}t^n$ (ici, x est un paramètre fixé).
(i) On a, pour $0<t<1$, la série géométrique

$$\sum_{n=0}^{\infty} u_n(t) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}x}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}t\right)^n = \mathrm{e}^{\mathrm{i}x}\frac{1}{1-\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}t}.$$

Il y a donc convergence simple de la série $\sum u_n$ vers $f(t) := \dfrac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}}{1-\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}t}$.
(ii) Les fonctions u_n sont continues sur $[0,1]$, donc intégrables.
(iii) On a

$$a_n := \int_0^1 |u_n|(t)\mathrm{d}t = \int_0^1 t^n \mathrm{d}t = \frac{1}{n+1},$$

qui est une série non sommable... On ne peut pas appliquer le théorème d'intégration terme à terme directement.

Essayons plutôt d'appliquer le TCD. On pose

$$f_N(t) := \sum_{n=0}^{N} \mathrm{e}^{\mathrm{i}(n+1)x}t^n = \mathrm{e}^{\mathrm{i}x}\frac{1-(\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}t)^{N+1}}{1-\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}t}.$$

(i) La suite f_N converge simplement vers $f(t) := \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}}{1-\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}t}$ sur $I=(0,1)$.
(ii) Les fonctions f_N et f sont continues sur $[0,1]$, donc intégrables.
(iii) Posons $\phi(t) := \frac{2}{|1-\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}t|}$. La fonction ϕ est intégrable sur I (car $x \notin 2\pi\mathbb{Z}$), et pour tout N et tout $t \in I$, on a la domination $|f_N(t)| \le \phi(t)$.
On peut appliquer le TCD, et on en déduit que

$$\int_0^1 \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}}{1-\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}t}\mathrm{d}t = \int_0^1 f(t)\mathrm{d}t = \lim_{N\to\infty}\int_0^1 f_N(t)\mathrm{d}t = \lim_{N\to\infty}\sum_{n=0}^{\infty}\int_0^1 \mathrm{e}^{\mathrm{i}(n+1)x}t^n\mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}(n+1)x}}{n+1} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}nx}}{n}.$$

d/ En prenant la partie réelle, on trouve

$$-\ln\left|2\sin\left(\frac{x}{2}\right)\right| = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos(nx)}{n}.$$

Pour aller plus loin

Exercice 7. Un théorème de Dini
Les théorèmes de Dini permettent de déduire des CVU à partir de CVS + hypothèses.

Soit (f_n) une suite de fonctions continues de $[0,1] \to \mathbb{R}$ qui converge simplement vers f sur $[0,1]$.
On suppose (1) que f est continue, et (2) que pour tout $n \in \mathbb{N}$, f_n est une fonction croissante sur $[0,1]$.
a/ Montrer que f est croissante.
b/ Montrer que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $N_0 \in \mathbb{N}$ tel que

$$\forall x, y \in [0,1], \quad |x-y| \leq \frac{1}{N_0} \implies |f(x) - f(y)| \leq \varepsilon.$$

c/ On pose $a_i := \frac{i}{N_0}$ pour $0 \leq i \leq N_0$. Montrer qu'il existe $N_1 \in \mathbb{N}$ tel que

$$\forall 0 \leq i \leq 1, \quad \forall n \geq N_1, \quad |f_n(a_i) - f(a_i)| \leq \varepsilon.$$

d/ Soit $x \in [0,1]$, et soit $0 \leq i < N_1$ tel que $a_i \leq x < a_{i+1}$. Montrer que pour tout $n \geq N_1$,

$$|f(x) - f_n(x)| \leq |f(x) - f(a_i)| + |f(a_i) - f_n(a_i)| + \big(|f_n(a_i) - f(a_i)| + |f(a_i) - f(a_{i+1})| + |f(a_{i+1}) - f_n(a_{i+1})| \big)$$

Indice : on montrera que la parenthèse est plus grande que $|f_n(x) - f_n(a_i)|$.
e/ En déduire que (f_n) converge uniformément vers f.
f/ En déduire que $\int_0^1 f_n$ converge vers $\int_0^1 f$. Comment démontrer ce résultat avec le TCD ?

Solution

a/ Soit $0 \leq a \leq b \leq 1$. Comme f_n est croissante, on a $f_n(a) \leq f_n(b)$. En prenant la limite $n \to \infty$ et par convergence simple, on trouve $f(a) \leq f(b)$. Ceci étant vrai pour tout $0 \leq a \leq b \leq 1$, f est croissante sur $[0,1]$.
b/ Soit $\varepsilon > 0$. f est continue sur le compact $[0,1]$. D'après le théorème de Heine, f est équicontinue. Donc il existe $\eta > 0$ tel que

$$\forall x, y \in [0,1], \qquad |x-y| < \eta \implies |f_n(a_i) - f(a_i)| \leq \varepsilon.$$

Il suffit de prendre N_0 tel que $1/N_0 \leq \eta$.
c/ Pour tout $0 \leq i \leq N_0$, la suite $f_n(a_i)$ converge vers $f(a_i)$. Donc il existe $n_i \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq n_i$, on a $|f_n(a_i) - f(a_i)| \leq \varepsilon$. On choisit $N_1 = \max_{0 \leq i \leq N_0} n_i$.
d/ Comme $a_i \leq x \leq a_{i+1}$, On a $|x - a_i| \leq |a_{i+1} - a_i| = \frac{1}{N_0}$ et $|x - a_{i+1}| \leq \frac{1}{N_0}$. On peut appliquer les résultats de la question b/ et c/. On obtient

$$\begin{aligned} |f(x) - f_n(x)| &\leq |f(x) - f(a_i)| + |f(a_i) - f_n(a_i)| + |f_n(a_i) - f_n(x)| \\ &\leq \varepsilon + \varepsilon + |f_n(a_i) - f_n(x)|. \end{aligned}$$

Pour évaluer le dernier terme, on utilise que $a_i \leq x \leq a_{i+1}$, et que f_n est une fonction décroissante. Donc

$$\begin{aligned} |f_n(a_i) - f_n(x)| &= f_n(a_i) - f_n(x) \leq f_n(a_i) - f_n(a_{i+1}) \\ &\leq [f_n(a_i) - f(a_i)] + [f(a_i) - f(a_{i+1})] + [f(a_{i+1}) - f_n(a_{i+1})] \leq 3\varepsilon. \end{aligned}$$

Au final, on a montré que

$$|f_n(x) - f(x)| \leq 5\varepsilon.$$

e/ Ceci étant vrai pour tout $x \in [0,1]$ et tout $\varepsilon > 0$, on en déduit que $\|f_n - f\|_\infty \to 0$, c'est à dire que la suite (f_n) converge uniformément vers f.
f/ On a

$$\left| \int_0^1 f_n - \int_0^1 f \right| \leq \int_0^1 |f_n - f| \leq \int_0^1 \|f_n - f\|_\infty = \|f_n - f\|_\infty \to 0.$$

Ainsi les intégrales convergent. On aurait pu montrer le résultat avec le TCD. (i) La suite (f_n) CVS vers $f(x)$. (ii) Les fonctions f_n et f sont continues sur $[0,1]$, donc intégrables. (iii) Comme f_n et f sont décroissantes, on a $|f_n(x)| \leq \max\{|f_n(0)|, |f_n(1)|\}$. Les deux suites $(f_n(0))$ et $(f_n(1))$ sont convergentes donc bornées. Soit M un majorant. On pose $\phi(x) = M$. ϕ est intégrable sur $[0,1]$, et majore (f_n) et f. On peut appliquer le TCD.