TD7 : Séries, Intégrales et TCD.

Maths fondamentales, L2, PSL, 2023-2024 *D. Gontier, gontier@ceremade.dauphine.fr*

Autour du TCD

Exercice 1. Application du théorème de convergence dominée
a/ Calculer les limites suivantes lorsque $n \to \infty$.

$$\int_0^{\pi/4} |\tan(t)|^n \, \mathrm{d}t, \qquad \int_1^\infty \frac{\mathrm{d}t}{1+t^n}, \qquad \int_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{-t^{2n}} \mathrm{d}t, \quad \int_1^\infty \frac{\cos(\frac{t}{n})}{t^2} \mathrm{d}t$$

b/ Soit f une fonction continue sur $[0,1]$. Calculer la limite lorsque $n \to \infty$ de

$$\int_0^1 f(t^n) \mathrm{d}t, \qquad \int_0^1 f(t^{\frac{1}{n}}) \mathrm{d}t, \qquad \int_0^1 n t^n f(t) \mathrm{d}t.$$

Indice : pour la troisième intégrale, on pourra faire le changement de variable $u = t^n$.
c/ **(Césaro continue).** Soit f une fonction continue qui tend vers l en $+\infty$. Calculer la limite lorsque $n \to \infty$ de

$$\frac{1}{n} \int_0^n f(t) \mathrm{d}t.$$

Indice, on pourra faire le changement de variable $u = t/n$.

Exercice 2. Un contre-exemple à connaître
Soit ψ une fonction continue de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, telle que pour tout $|x| > L$, $\psi(x) = 0$. On pose $f_n(x) = \psi(x) + \psi(x-n)$.
a/ Montrer que f_n CVS vers ψ lorsque $n \to \infty$.
b/ Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $\int f_n = 2 \int \psi$.
c/ Cela contredit-il le théorème de convergence dominée ?

L'intégration termes à termes

Exercice 3.
On pose $u_n(x) := (-1)^n x^{2n}(1-x)$.
a/ Montrer que la série $\sum_{n=0}^\infty u_n$ converge simplement vers $\frac{1-x}{1+x^2}$ pour tout $x \in [0,1)$.
b/ En déduire que

$$\sum_{n \geq 0} \frac{(-1)^n}{(2n+1)(2n+2)} = \frac{\pi}{4} - \frac{\ln(2)}{2}.$$

Exercice 4.
On pose, pour $n, k \in \mathbb{N}$,

$$I_{n,k} := \int_0^1 x^n \left(-\ln(x)\right)^k \mathrm{d}x.$$

a/ Montrer que si $n \geq 1$, alors $I_{n,k}$ est bien défini, et $0 < I_{n,k} < \infty$.
b/ Dans le cas $n = 0$ et $k = 1$, montrer que $\ln(x)$ est aussi intégrable sur $[0,1]$, avec $\int_0^1 \ln(x) = -1$.
c/ Montrer que si $n \geq 1$,

$$\forall k \geq 1, \quad I_{n,k} = \frac{k}{n+1} I_{n,k-1}, \quad \text{et} \quad I_{n,0} = \frac{1}{n+1}.$$

En déduire que $I_{n,k} = \frac{k!}{(n+1)^{k+1}}$.
d/ Montrer que

$$\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^n} = \int_0^1 \mathrm{e}^{-x \ln(x)} \mathrm{d}x \qquad \left(= \int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{x^x}. \right)$$

Exercice 5.
On pose $u_n(x) = \frac{-1}{n} \ln(x) x^n$.
a/ Montrer que $\sum_{n=1}^\infty u_n(x)$ converge simplement vers $\ln(x)\ln(1-x)$ sur $(0,1)$.
b/ En utilisant le résultat de l'exercice précédent, en déduire que $\ln(x)\ln(1-x)$ est intégrable sur $(0,1)$, et que

$$\int_0^1 \ln(x) \ln(1-x) \mathrm{d}x = \sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n(n+1)^2}.$$

c/ En faisant une décomposition en éléments simples de $\frac{1}{x(x+1)^2}$, montrer que

$$\frac{1}{n(n+1)^2} = \frac{1}{n} - \frac{1}{(n+1)^2} - \frac{1}{n+1}.$$

En déduire que

$$\int_0^1 \ln(x)\ln(1-x)\mathrm{d}x = 2 - \frac{\pi^2}{6}.$$

Exercice 6. Sur la série $\sum \frac{\cos(nx)}{n}$

a/ Montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus 2\pi\mathbb{Z}$ et tout $t \in (0,1)$, on a

$$\mathrm{Re}\left(\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}}{1-\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}t}\right) = \frac{\cos(x)-t}{1-2t\cos(x)+t^2}.$$

b/ En déduire que (*on pourra reconnaître une intégrande de la forme* $\frac{u'}{u}$)

$$\mathrm{Re}\int_0^1 \left(\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}}{1-\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}t}\right)\mathrm{d}t = -\ln\left|2\sin\frac{x}{2}\right|.$$

c/ Montrer que (*On fera très attention à la domination ici...*)

$$\sum_{n=0}^{\infty}\int_0^1 \mathrm{e}^{\mathrm{i}(n+1)x}t^n\mathrm{d}t = \int_0^1 \left(\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}}{1-\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}t}\right)\mathrm{d}t.$$

d/ En déduire que

$$\boxed{\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos(nx)}{n} = -\ln\left|2\sin\frac{x}{2}\right|.}$$

Pour aller plus loin

Exercice 7. Le 1er théorème de Dini

Les théorèmes de Dini permettent de déduire des CVU à partir de CVS + hypothèses.

Soit (f_n) une suite de fonctions continues de $[0,1] \to \mathbb{R}$ qui converge simplement vers f sur $[0,1]$.
On suppose (1) que f est continue, et (2) que pour tout $n \in \mathbb{N}$, f_n est une fonction croissante sur $[0,1]$.
a/ Montrer que f est croissante.
b/ Montrer que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $N_0 \in \mathbb{N}$ tel que

$$\forall x,y \in [0,1], \quad |x-y| \le N_0 \implies |f(x)-f(y)| \le \varepsilon.$$

c/ On pose $a_i := \frac{i}{N_0}$ pour $0 \le i \le N_0$. Montrer qu'il existe $N_1 \in \mathbb{N}$ tel que

$$\forall 0 \le i \le 1, \quad \forall n \ge N_1, \quad |f_n(a_i) - f(a_i)| \le \varepsilon.$$

d/ Soit $x \in [0,1]$, et soit $0 \le i < N_1$ tel que $a_i \le x < a_{i+1}$. Montrer que pour tout $n \ge N_1$,

$$|f(x)-f_n(x)| \le |f(x)-f(a_i)| + |f(a_i)-f_n(a_i)| + \big(|f_n(a_i)-f(a_i)| + |f(a_i)-f(a_{i+1})| + |f(a_{i+1})-f_n(a_{i+1})|\big)$$

Indice : on montrera que la parenthèse est plus grande que $|f_n(x)-f_n(a_i)|$.
e/ En déduire que (f_n) converge uniformément vers f.
f/ En déduire que $\int_0^1 f_n$ converge vers $\int_0^1 f$. Comment démontrer ce résultat avec le TCD ?