TD6 : Séries de Fourier (suite). Corrections

Maths fondamentales, L2, PSL, 2023-2024 *D. Gontier, gontier@ceremade.dauphine.fr*

Conventions. *Dans ce TD, si f est T périodique, on note $c_n^T(f) = \langle e_n^T, f\rangle_T$ avec $\langle f, g\rangle_T := \int_0^T \overline{f}g$ et $e_n^T(x) := \frac{1}{\sqrt{T}}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{2\pi}{T}nx}$. On note c_n et e_n lorsque la valeur de T est claire.*

Échauffement

Exercice 1.
Montrer que si $f \in C_T^0$, alors

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad |c_n(f)| \le \sqrt{T}\,\|f\|_\infty .$$

Solution
On a, en utilisant que $|\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha}| = 1$ pour α réel,

$$|c_n(f)| = \left| \frac{1}{\sqrt{T}} \int_0^T f(x)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{2\pi}{T}nx}\mathrm{d}x \right| \le \frac{1}{\sqrt{T}} \int_0^T |f|(x)\mathrm{d}x \le \frac{1}{\sqrt{T}} \|f\|_\infty \int_0^T 1 = \sqrt{T}\|f\|_\infty.$$

Exercice 2. Application du théorème de Fejér
Soit $f \in C_T^0$ telle que $\|S_N(f)\|_\infty \le 1$ pour tout $N \in \mathbb{N}$. Montrer que $\|f\|_\infty \le 1$.

Solution
Le théorème de Fejér dit que si f est continue, alors la suite $C_n(f)$ converge vers f en norme uniforme, où on rappelle que

$$C_n(f) = \frac{1}{n}\left(S_0(f) + S_1(f) + \cdots + S_{n-1}(f)\right).$$

Soit $\varepsilon > 0$. Il existe N grand tel que $\|f - C_N(f)\|_\infty < \varepsilon$. Pour cet N, on a

$$\|f\|_\infty \le \|f - C_N(f)\|_\infty + \|C_N(f)\|_\infty \le \varepsilon + \frac{1}{N}\left(\|S_0(f)\|_\infty + \cdots + \|S_{N-1}(f)\|_\infty\right).$$

En particulier, si $\|S_n(f)\|_\infty \le 1$ pour tout n, on obtient $\|f\|_\infty \le \varepsilon + 1$. Ceci étant vrai pour tout $\varepsilon > 0$, on trouve bien $\|f\|_\infty \le 1$.

Exercice 3. Transformée de Fourier réelle
Soit $f \in C_{T=1}^0$ une fonction de classe C^1, 1-périodique. On note

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \begin{cases} a_n(f) := c_n(f) + c_{-n}(f) \\ b_n(f) := \mathrm{i}\left(c_n(f) - c_{-n}(f)\right). \end{cases}$$

a/ Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a

$$c_n(f) := \frac{1}{2}\left(a_n(f) - \mathrm{i}b_n(f)\right), \quad \text{et} \quad c_{-n}(f) := \frac{1}{2}\left(a_n(f) + \mathrm{i}b_n(f)\right).$$

b/ Montrer que

$$a_n(f) = 2\int_{-1/2}^{1/2} f(t)\cos(2\pi nt)\,\mathrm{d}t, \quad \text{et} \quad b_n(f) = 2\int_{-1/2}^{1/2} f(t)\sin(2\pi nt)\,\mathrm{d}t.$$

c/ Montrer que si f est à valeurs réelles, alors $a_n(f)$ et $b_n(f)$ sont réelles.
d/ Montrer que si f est une fonction paire $f(x) = f(-x)$, alors $b_n(f) = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, et que si f est une fonction impaire $f(x) = -f(x)$, alors $a_n(f) = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
e/ Montrer que

$$S_N(f)(x) = \frac{1}{2}a_0(f) + \sum_{n=1}^{N}\left[a_n(f)\cos(2\pi nx) + b_n(f)\sin(2\pi nx)\right].$$

f/ Montrer la formule de Parseval réelle :

$$\int_{-1/2}^{1/2} f^2(t)\mathrm{d}t = \frac{|a_0|^2}{4} + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\left(|a_n(f)|^2 + |b_n(f)|^2\right).$$

Solution

a/ Il suffit de multiplier l'équation pour $-\mathrm{i}b_n$ par i, puis d'additionner et soustraire les équations.
b/ On a (on rappelle que $T = 1$ ici, et qu'on peut calculer les intégrales entre $-T/2$ et $T/2$ par périodicité de l'intégrande)

$$\begin{aligned} a_n(f) = [c_n(f) + c_{-n}(f)] &= \left[\int_{-1/2}^{1/2} f(x)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}n2\pi x}\mathrm{d}x + \int_{-1/2}^{1/2} f(x)\mathrm{e}^{\mathrm{i}n2\pi x}\right] = \int_{-1/2}^{1/2} f(x)\left[\mathrm{e}^{-\mathrm{i}n2\pi x} + \mathrm{e}^{\mathrm{i}n2\pi x}\right]\mathrm{d}x \\ &= 2\int_{-1/2}^{1/2} f(x)\cos(2\pi n x)\mathrm{d}x. \end{aligned}$$

Le calcul pour b_n est similaire. On notera que le i dans la définition de b_n se justifie ici, avec l'apparition de sin (au lieu de $\mathrm{i}\sin$).
c/ Si f est réelle, on a directement que $a_n(f)$ et $b_n(f)$ sont réelles, comme intégrale de fonctions réelles.
d/ On suppose f paire, donc $f(x) = f(-x)$, et on fait le changement de variable $y = -x$. On a

$$b_n(f) = 2\int_{-1/2}^{1/2} f(x)\sin(2\pi n x)\mathrm{d}x = 2\int_{-1/2}^{1/2} f(-y)\sin(-2\pi n y)\mathrm{d}y = -2\int_{-1/2}^{1/2} f(y)\sin(2\pi n y)\mathrm{d}y = -b_n(f).$$

Donc $b_n(f) = 0$. Le deuxième calcul est similaire.
e/ On regroupe les termes n et $-n$ dans la définition de $S_N(f)$. On remarquera que le terme $n = 0$ est tout seul. On a donc

$$S_N(f) = \sum_{n=-N}^{N} c_n(f)\mathrm{e}^{\mathrm{i}2\pi n x} = c_0(f) + \sum_{n=1}^{N}\left[c_n(f)\mathrm{e}^{\mathrm{i}2\pi n x} + c_{-n}(f)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}2\pi n x}\right].$$

Pour le terme entre crochet, on utilise la question a/. On obtient

$$\begin{aligned} c_n\mathrm{e}^{\mathrm{i}2\pi n x} + c_{-n}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}2\pi n x} &= \frac{1}{2}(a_n - \mathrm{i}b_n)\mathrm{e}^{\mathrm{i}2\pi n x} + \frac{1}{2}(a_n + \mathrm{i}b_n)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}2\pi n x} \\ &= a_n\left(\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}2\pi n x} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}2\pi n x}}{2}\right) + b_n\left(\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}2\pi n x} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}2\pi n x}}{2\mathrm{i}}\right) = a_n\cos(2\pi n x) + b_n\sin(2\pi n x). \end{aligned}$$

Par ailleurs, on a $a_0 = 2c_0$ par définition, et le résultat suit.

f/ La formule de Parseval donne que

$$\|f\|_2^2 = \sum_{n\in\mathbb{Z}} |c_n(f)|^2 = |c_0(f)|^2 + \sum_{n=1}^{\infty}\left(|c_n(f)|^2 + |c_{-n}(f)|^2\right).$$

On calcule $|c_n(f)|^2 + |c_{-n}(f)|^2$ en fonction des a_n et b_n. Pour $n > 0$, on a

$$|c_n|^2 + |c_{-n}|^2 = \frac{1}{4}\left(|a_n|^2 + |b_n|^2 + 2\mathrm{Re}\left(\mathrm{i}a_n\overline{b_n}\right)\right) + \frac{1}{4}\left(|a_n|^2 + |b_n|^2 - 2\mathrm{Re}\left(\mathrm{i}a_n\overline{b_n}\right)\right) = \frac{1}{2}\left(|a_n|^2 + |b_n|^2\right).$$

Le résultat en découle directement.

Exercice 4. Calcul de la série $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin(nx)}{n}$
Soit $f(x)$ la fonction impaire, 2π-périodique, qui vaut $f(x) := \frac{\pi - x}{2}$ sur $[0, \pi]$.
a/ Montrer que

$$c_n(f) = -\mathrm{i}\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}}\int_0^{\pi} f(t)\sin(nt)\mathrm{d}t.$$

b/ Montrer que $c_0(f) = 0$, puis que pour $n \in \mathbb{Z}^*$, on a (on utilisera une intégration par partie)

$$c_n(f) = -\mathrm{i}\frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{2}}\frac{1}{n}.$$

c/ Montrer que f est C^1 par morceaux. En déduire que pour tout $x \in (0, \pi)$, on a

$$\boxed{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(nx)}{n} = \frac{\pi - x}{2}.}$$

Solution

a/ On a pris $T = 2\pi$ ici. On calcule $c_n(f)$. Comme f est impaire, on a

$$\begin{aligned} c_n(f) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \mathrm{e}^{-\mathrm{i}nx} \mathrm{d}x = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\pi} \left[f(-x)\mathrm{e}^{\mathrm{i}nx} + f(x)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}nx} \right] \mathrm{d}x = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\pi} \left[f(x) \left(\mathrm{e}^{-\mathrm{i}nx} - \mathrm{e}^{\mathrm{i}nx} \right) \right] \mathrm{d}x \\ &= \frac{-2\mathrm{i}}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\pi} f(x) \sin(nx) \mathrm{d}x. \end{aligned}$$

b/ Pour $n = 0$, on a $\sin(0x) = 0$, donc $c_0(f) = 0$. Pour $n \neq 0$, on intègre par partie, et on a

$$\begin{aligned} c_n(f) &= -\frac{\mathrm{i}}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\pi} (\pi - x) \sin(nx) \mathrm{d}x = -\frac{\mathrm{i}}{\sqrt{2\pi}} \left(-\int_0^{\pi} \frac{\cos(nx)}{n} \mathrm{d}x - \left[(\pi - x) \frac{\cos(nx)}{n} \right]_0^{\pi} \right) \\ &= -\frac{\mathrm{i}}{\sqrt{2\pi}} \left(-\frac{1}{n} \left[\frac{\sin(nx)}{n} \right]_0^{\pi} + \pi \frac{1}{n} \right) = -\frac{\mathrm{i}}{\sqrt{2\pi}} \frac{\pi}{n}. \end{aligned}$$

c/ La fonction f est linéaire par morceaux, donc C^1 par morceaux. On peut appliquer le théorème de Dirichlet. La fonction f est continue sur $(0, \pi)$, donc pour $x \in (0, \pi)$, le point milieu égal $f(x) = \frac{1}{2}(\pi - x)$. Ainsi, on a, pour $0 < x < \pi$,

$$\begin{aligned} \frac{\pi - x}{2} = f(x) &= \sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n(f) \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \mathrm{e}^{\mathrm{i}nx} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{n=1}^{\infty} \left[c_n(f) \mathrm{e}^{\mathrm{i}nx} + c_{-n}(f) \mathrm{e}^{-\mathrm{i}nx} \right] \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{n=1}^{\infty} \left[-\mathrm{i} \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{2}} \frac{1}{n} \mathrm{e}^{\mathrm{i}nx} + \mathrm{i} \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{2}} \frac{1}{n} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}nx} \right] = \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{1}{n} \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}nx} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}nx}}{2\mathrm{i}} \right] = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(nx)}{n}. \end{aligned}$$

Applications

Exercice 5. Convergence des sommes de Riemann

Soit $f \in C^0_{T=1}$ une fonction continue et 1-périodique. On note

$$I(f) := \int_0^1 f(t) \mathrm{d}t \qquad \text{(intégrale)}, \quad \text{et} \quad I_N(f) := \frac{1}{N} \sum_{j=0}^{N-1} f\left(\frac{j}{N} \right) \qquad \text{(somme de Riemann)}.$$

a/ Montrer que $I(f)$ peut-être vu comme le 0-ème coefficient de Fourier de f, c'est à dire : $I(f) = c_0(f)$.
b/ Montrer que pour la fonction e_k (k-ème mode de Fourier), on a

$$I_N(e_k) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad k \in N\mathbb{Z} \qquad \text{(k est un multiple de } N\text{)} \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

c/ Montrer que si $f \in C^1_1$ est dérivable, alors f est égale à sa série de Fourier partout, puis que

$$I_N(f) = \sum_{k \in N\mathbb{Z}} c_k(f), \quad \text{et} \quad |I_N(f) - I(f)| \leq \sum_{k \in N\mathbb{Z}^*} |c_k(f)|.$$

d/ En déduire que si $f \in C^1_1$, alors $I_N(f)$ converge vers $I(f)$.
e/ Montrer que si $f \in C^{p+1}_1$, alors il existe une constante C telle que

$$|I_N(f) - I(f)| \leq \frac{C}{N^p}.$$

Plus une fonction est régulière, plus la somme de Riemann converge vite vers l'intégrale.

Solution

a/ Le premier coefficient de f est, en utilisant le fait que $e_0(x)=1$ (on a pris $T=1$),

$$c_0(f)=\langle e_0,f\rangle=\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x=I(f).$$

b/ On calcule la somme de Riemann pour e_k. On a

$$I_N(e_k)=\frac{1}{N}\sum_{j=0}^{N-1}\mathrm{e}^{\mathrm{i}2\pi k\frac{j}{N}}.$$

On reconnaît une suite géométrique de raison $\mathrm{e}^{\mathrm{i}2\pi\frac{k}{N}}$. Si la raison est égale à 1, c'est à dire si $\frac{k}{N}\in\mathbb{Z}$, ou encore si $k\in N\mathbb{Z}$, alors on a $I_N(e_k)=1$. Sinon, dans le cas $k\notin N\mathbb{Z}$, on trouve

$$I_N(e_k)=\frac{1}{N}\frac{1-\mathrm{e}^{\mathrm{i}2\pi\frac{k}{N}N}}{1-\mathrm{e}^{\mathrm{i}2\pi\frac{k}{N}}}=0,\quad\text{car}\quad \mathrm{e}^{\mathrm{i}2\pi\frac{k}{N}N}=\mathrm{e}^{\mathrm{i}2\pi k}=1.$$

c/ Si f est de classe C^1, elle est en particulier C^1 par morceau. Le théorème de Dirichlet affirme la série de Fourier est égale au point milieu de f. Mais comme f est continue partout, cette série est, en fait, égale à f partout. Par ailleurs, on a (notez que $f\mapsto I_N(f)$ est une application linéaire, qui fait intervenir une somme finie, donc $I_N(\sum)=\sum I_N$)

$$I_N(f)=I_N\left(\sum_{k\in\mathbb{Z}}c_k(f)e_k\right)=\sum_{k\in\mathbb{Z}}c_k(f)I_N(e_k)=\sum_{k\in N\mathbb{Z}}c_k(f),$$

où on a utilisé la question précédente pour la dernière égalité. En particulier, comme $c_0(f)=I(f)$, on a

$$I_N(f)=I(f)+\sum_{k\in N\mathbb{Z}^*}c_k(f),\quad\text{et donc}\quad |I(f)-I_N(f)|=\left|\sum_{k\in N\mathbb{Z}^*}c_k(f)\right|\le\sum_{k\in N\mathbb{Z}^*}|c_k(f)|.$$

d/ On a vu en cours que si f est de classe C^1, alors la série $\sum|c_k(f)|$ convergeait. En particulier, on a

$$|I(f)-I_N(f)|\le\sum_{k\in N\mathbb{Z}^*}|c_k(f)|\le\sum_{|k|\ge N}|c_k(f)|,$$

qui est le reste d'une série convergente. Donc $I_N(f)\to I(f)$. On pourra remarquer que la théorie de Riemann prouve que $I_N(f)\to f$ dans le cas où f est continue, et même continue par morceaux. Cette preuve par Fourier ne marche que dans le cas où f est C^1.

e/ On rappelle que $c_k(f^{(p)})=(\mathrm{i}2\pi)^p k^p c_k(f)$. Ainsi, on a

$$|I(f)-I_N(f)|\le\sum_{k\in N\mathbb{Z}^*}|c_k(f)|=\frac{1}{(2\pi)^p}\sum_{k\in N\mathbb{Z}^*}\frac{1}{k^p}|c_k(f^{(p)})|\le\frac{1}{(2\pi)^p}\frac{1}{N^p}\sum_{k\in N\mathbb{Z}^*}|c_k(f^{(p)})|.$$

La fonction f étant de classe C^{p+1}, la dernière série est convergente (cf question d/ : c'est même un $o(1)$). Ainsi, on a $|I(f)-I_N(f)|\le CN^{-p}$ comme demandé.

Exercice 6. Résolution d'une équation différentielle

Soit $\lambda\in\mathbb{R}$. On cherche une solution continue et 2π-périodique à l'équation

$$f'(x)=f(x+\lambda).$$

a/ Montrer que si une solution f existe, alors $f\in C^\infty_{2\pi}$.

b/ Montrer que si f est solution, alors pour tout $n\in\mathbb{Z}$, on a

$$\left(\mathrm{i}n-\mathrm{e}^{\mathrm{i}\lambda n}\right)c_n(f)=0.$$

c/ En déduire qu'il existe des solutions non nulles ssi $\lambda\in\frac{\pi}{2}+\pi\mathbb{Z}$. Quelles sont les solutions dans ce cas ?

Solution

a/ On cherche une solution 2π–périodique. Pour la régularité, on remarque que si f est continue, alors $f'=f(\cdot+\lambda)$ est aussi continue, donc f est de classe C^1. Puis $f'=f(\cdot+\lambda)$ montre que f est de classe C^2, et ainsi

de suite. Donc f est de classe C^∞, par récurrence.
b/ On prend le produit scalaire de l'équation avec e_n. On obtient

$$\langle e_n, f \rangle = \langle e_n, f(\cdot + \lambda)\rangle \quad \text{donc} \quad c_n(f') = c_n(f(\cdot + \lambda)).$$

Pour le membre de gauche, on utilise que $c_n(f') = \mathrm{i}nc_n(f)$. Pour la partie droite, on remarque que, par le changement de variable $y = x + \lambda$ et par périodicité, on a

$$\langle e_n, f(\cdot + \lambda)\rangle = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{2\pi} f(x+\lambda)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}nx}\mathrm{d}x = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{2\pi} f(y)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}n(y-\lambda)}\mathrm{d}y = \mathrm{e}^{\mathrm{i}n\lambda}c_n(f).$$

Ainsi, on obtient

$$\forall n \in \mathbb{Z}, \quad \mathrm{i}nc_n(f) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}n\lambda}c_n(f), \quad \text{soit} \quad (\mathrm{i}n - \mathrm{e}^{\mathrm{i}n\lambda})c_n(f) = 0.$$

c/ Pour tout $n \in \mathbb{Z}$, on a soit $c_n(f) = 0$, soit $\mathrm{i}n = \mathrm{e}^{\mathrm{i}n\lambda}$. Si $c_n(f) = 0$ pour tout n, c'est la solution nulle $f \equiv 0$. Si f est une solution non nulle, il existe un $n \in \mathbb{Z}$ tel que $\mathrm{i}n = \mathrm{e}^{\mathrm{i}n\lambda}$. En prenant le module, on obtient que $n = \pm 1$. De plus, en prenant le complexe conjugué, on voit que l'équation est satisfaite pour n ssi elle est satisfaite pour $-n$.
Il suffit donc de regarder le cas $n = 1$. On veut $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\lambda} = \mathrm{i}$, donc $\lambda = \frac{\pi}{2} + 2\pi\mathbb{Z}$. Dans ce cas, on a, par Dirichlet, $f(x) = c_1(f)e_1(x) + c_{-1}(f)e_{-1}(x)$. On en déduit que les f solutions sont de la forme

$$f(x) = C_1\mathrm{e}^{\mathrm{i}x} + C_{-1}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}x}.$$

Exercice 7. Formule sommatoire de Poisson

Soit $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction C^∞ à support compact (il existe $L > 0$ tel que $F(x) = 0$ pour tout $|x| \geq L$). On pose

$$f(x) := \sum_{k\in\mathbb{Z}} F(x+k).$$

a/ Montrer que f est bien définie, et est une fonction 1-périodique. Montrer que $f \in C^\infty_{T=1}$.
b/ Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{Z}$, (on justifiera que l'intégrale sur $\mathbb{R}$ est bien définie)

$$c_n(f) = \int_{\mathbb{R}} F(t)\mathrm{e}^{-2\mathrm{i}\pi nt}\mathrm{d}t.$$

c/ En déduire la formule sommatoire de Poisson : pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}} F(x+k) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \left(\int_{\mathbb{R}} F(t)\mathrm{e}^{-2\mathrm{i}\pi nt}\mathrm{d}t \right) \mathrm{e}^{2\mathrm{i}\pi nx}.$$

Solution

a/ Comme f est à support compact, la somme est finie, pour tout $x \in \mathbb{R}$. Donc f est bien définie. De plus, f est la somme finie de fonctions de classe C^∞, donc f est de classe C^∞. Enfin, en faisant le changement de variable $k' = k+1$ dans la somme, on voit que f est 1-périodique.
b/ Soit $L > 0$ tel que $F(x) = 0$ pour tout $|x| \geq L$. Comme f est 1–périodique, on peut calculer ses coefficients de Fourier. On a

$$c_n(f) = \int_0^1 f(x)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}2\pi nx}\mathrm{d}x = \int_0^1 \left(\sum_{k\in\mathbb{Z}} F(x+k) \right) \mathrm{e}^{-\mathrm{i}2\pi nx}\mathrm{d}x = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \int_0^1 F(x+k)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}2\pi nx}\mathrm{d}x.$$

On a pu intervertir somme et intégrale, car la somme est finie. Dans chacune des intégrales, on fait le changement de variable $y = x+k$. On remarquera que $\mathrm{e}^{-\mathrm{i}2\pi n(y-k)} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}2\pi nk}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}2\pi ny} = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}2\pi ny}$. Ainsi,

$$c_n(f) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \int_k^{k+1} F(y)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}2\pi ny}\mathrm{d}y = \int_{\mathbb{R}} F(y)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}2\pi ny}\mathrm{d}y \quad \left(= \int_{-L}^{L} F(y)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}2\pi ny}\mathrm{d}y \right).$$

L'intégrale sur $\mathbb{R}$ est bien définie, car, en fait, c'est une intégrale sur $I = [-L, L]$ (de nouveau, on utilise que F est à support compact).
c/ La fonction f est de classe C^∞, donc continue. On peut utiliser le théorème de Dirichlet, et on obtient que

$$f(x) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n(f)e_n(x), \quad \text{c'est à dire} \quad \sum_{k\in\mathbb{Z}} F(x+k) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \left(\int_{\mathbb{R}} F(y)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}2\pi ny}\mathrm{d}y \right) \mathrm{e}^{\mathrm{i}2\pi nx}.$$

Par exemple, en $x = 0$, on obtient

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}} F(k) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \left(\int_{\mathbb{R}} F(y)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}2\pi ny}\mathrm{d}y \right) =: \sum_{n\in\mathbb{Z}} \widehat{F}(n),$$

où on a définit la **transformée de Fourier** de F,

$$\widehat{F}(\omega) := \int_{\mathbb{R}} F(y)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}2\pi\omega y}\mathrm{d}y.$$