Partiel (L2) Mathématiques fondamentales. (Corrections)

28 mars 2024 *D. Gontier*

Une heures. Sans document.
1 page recto-verso.

Exercice 1. Analyse : le log complexe

a/ Rappeler (sans preuve) les développements en séries entières et rayon de convergence de

$$-\log(1-z) \quad \text{et} \quad \arctan(z).$$

b/ En déduire que si $x \in (-1, 1)$, on a

$$\mathrm{Re}\,[\log(1+\mathrm{i}x)] = \frac{1}{2}\log(1+x^2), \qquad \text{et} \qquad \mathrm{Im}\,[\log(1+\mathrm{i}x)] = \arctan(x).$$

c/ Avec un dessin, justifier que pour $x \in \mathbb{R}$, on a $1 + \mathrm{i}x = r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$ avec

$$r := \sqrt{1+x^2}, \quad \text{et} \quad \theta = \arctan(x).$$

Ceci montre que si $z = r\mathrm{e}^{\mathrm{i}}\theta$ est sur l'axe $1 + \mathrm{i}(-1, 1)$, on a

$$\log(z) = \log(r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}) = \log(r) + \mathrm{i}\theta. \qquad \textit{log complexe.} \qquad (*)$$

Autrement dit, la partie réelle est le log du module, et la partie imaginaire est l'argument. En fait, on peut montrer que cette égalité reste vraie pour tout $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}^-$.

Solution

a/ On a

$$-\log(1-z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n}, \quad \text{et} \quad \arctan(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n z^{2n+1}}{2n+1},$$

et les deux rayons de convergence sont $R = 1$.

b/ On a donc (attention aux nombreux signes $-$) :

$$\log(1+\mathrm{i}x) = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-\mathrm{i}x)^n}{n}.$$

En prenant la partie réelle, on voit que tous les termes avec n impair s'en vont. Il reste

$$\mathrm{Re}\,[\log(1+\mathrm{i}x)] = \sum_{m=1}^{\infty} (-1)^m \frac{x^{2m}}{2m} = \frac{1}{2}\sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-x^2)^m}{m} = \frac{1}{2}\log(1+x^2).$$

De même en prenant la partie imaginaire, on trouve que les termes pairs s'en vont, et

$$\mathrm{Im}\,[\log(1+\mathrm{i}x)] = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{2k+1} = \arctan(x).$$

c/ Evident avec un dessin ! C'est Pythagore pour r, et la définition de la tangente pour θ.

Exercice 2. Analyse, étude d'un série entière

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. On veut étudier la série entière

$$S(x) := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mathrm{e}^{in\alpha}}{n} x^n.$$

a/ Quel est le rayon de convergence R de la série ?
b/ Montrer que pour $z \in \mathcal{B}(0, R) := \{z \in \mathbb{C},\ |z| < R\}$, on a

$$S(z) = -\log(1 - \mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha} z).$$

c/ Soit $x \in (-R, R)$ un nombre réel. Montrer que (on pourra utiliser la relation $(*)$)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(n\alpha)}{n} x^n = -\log(|1 - \mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha} x|) = -\frac{1}{2} \log\left(1 + x^2 - 2x\cos(\alpha)\right).$$

d/ On admet que pour tout $\alpha \in \mathbb{R} \setminus 2\pi\mathbb{Z}$, la série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(n\alpha)}{n}$ est convergente (cf TD1). Montrer que,

$$\forall \alpha \in \mathbb{R} \setminus 2\pi\mathbb{Z}, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(n\alpha)}{n} = -\frac{1}{2} \log(2 - 2\cos(\alpha)) = -\log\left(2\left|\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)\right|\right).$$

Solution

a/ Le rayon de CV est $R = 1$. En effet, la suite $\frac{1}{n} r^n$ est borné si $r \leq 1$, et diverge si $r > 1$.
b/ On a

$$S(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} (\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha} x)^n = -\log(1 - \mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha x}),$$

où on a reconnu le DSE de log.
c/ En prenant $x \in \mathbb{R}$ réel, et la partie réelle de l'équation, on obtient

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(n\alpha)}{n} x^n = \mathrm{Re}\left(-\log(1 - \mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha} x)\right) = -\log\left(|1 - \mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha} x|\right),$$

où on a utilisé que la partie réelle de $\log(z)$ était $\log(|z|)$, d'après $(*)$. Enfin, on a

$$|1 - \mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha} x|^2 = (1 - x\cos(\alpha))^2 + (x\sin(\alpha))^2 = 1 + x^2\cos^2(\alpha) + x^2\sin^2(\alpha) - 2x\cos(\alpha) = 1 + x^2 - 2x\cos(\alpha).$$

d/ On applique le théorème d'Abel en $x = R = 1$. La série converge, donc la fonction $\mathrm{Re}\, S(x)$ admet un prolongement par continuité en $x = 1$. Or, d'après la question précédente, $\mathrm{Re}\, S(x) = -\log(|1 - \mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha} x|)$ est déjà continue en $x = 1$. On a donc, par identification

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(n\alpha)}{n} = -\frac{1}{2} \log(2 - 2\cos(\alpha)).$$

Enfin, d'après l'identité $\cos(\alpha) = 1 - 2\sin^2(\alpha/2)$, on a aussi $2 - 2\cos(\alpha) = 4\sin^2(\alpha/2)$, donc

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(n\alpha)}{n} = -\log\sqrt{4\sin^2(\alpha/2)} = -\log(2|\sin(\alpha/2)|).$$

Exercice 3. Calcul de π

a/ Dessiner un joli triangle équilatéral. Si la longueur des côtés est 1, quelle est la hauteur ? Montrer rapidement sur votre dessin que $\tan(\frac{\pi}{6}) = \frac{1}{\sqrt{3}} \approx 0.577$.
b/ En déduire que

$$\boxed{\pi = 2\sqrt{3} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{3^n(2n+1)}.}$$

c/ Soit $R_N := 2\sqrt{3} \displaystyle\sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{3^n(2n+1)}$ le reste de la série. Montrer que $|R_N| \leq \frac{\sqrt{3}}{2} \frac{1}{N3^N}$.

On trouve numériquement la suite suivante pour $S_L := 2\sqrt{3} \displaystyle\sum_{n=0}^{L} \frac{(-1)^n}{3^n(2n+1)}$

L	1	2	3	4	5	6	$\cdots$	10	15
S_L	**3.**_4_	**3.**_08_	**3.1**_56_	**3.1**_38_	**3.14**_2_	**3.141**_3_	$\cdots$	**3.14159**_3_	**3.14159265**_1_

On gagne environ une décimale tous les deux termes (ceci vient du fait que $\frac{1}{3^2} \approx 0.1$).

Solution

a/ Soit h la hauteur. Le théorème de Pythagore dans le demi-triangle donne $h^2 + (\frac{1}{2})^2 = 1$, donc $h = \frac{\sqrt{3}}{2}$. L'angle "en haut" du demi-triangle est $\frac{\pi}{6}$. Ainsi $\tan(\pi/6) = \frac{1}{2}\frac{1}{h} = \frac{1}{\sqrt{3}}$.

b/ On en déduit que $\arctan(\frac{1}{\sqrt{3}}) = \frac{\pi}{6}$. De plus, on a $0 < \frac{1}{\sqrt{3}} < 1$, donc ce point est dans le disque de CV de arctan. On en déduit

$$\frac{\pi}{6} = \arctan(\frac{1}{\sqrt{3}}) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)} \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^{2n+1} = \frac{1}{\sqrt{3}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)3^n}.$$

c/ On peut utiliser le critère des séries alternées, qui affirme que le reste de la somme est plus petite que le $N+1$ -ème terme de la somme (en module). Donc

$$|R_N| \leq \frac{6}{\sqrt{3}} \frac{1}{3^{N+1}(2N+3)} \leq \frac{6}{\sqrt{3}} \frac{1}{3 \cdot 2} \frac{1}{N3^N} = \frac{1}{\sqrt{3}} \frac{1}{N3^N}$$

On peut aussi faire la majoration (brutale) suivante (qui donne une moins bonne borne). Pour tout $n \geq N+1$, on a $2n+1 \geq 2N$. On trouve

$$|R_N| \leq 2\sqrt{3} \sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{1}{3^n(2n+1)} \leq \frac{2\sqrt{3}}{2N} \sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{1}{3^n} = \frac{\sqrt{3}}{N} \frac{1}{3^{N+1}} \frac{1}{1-\frac{1}{3}} = \frac{\sqrt{3}}{N} \frac{1}{3^{N+1}} \frac{3}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2} \frac{1}{N3^N}$$