# Partiel (L2) Mathématiques fondamentales. (Corrections)

**23 février 2023** *D. Gontier & S. Wolf*

---

*Deux heures. Sans document.*
*1 page recto-verso, 6 exercices indépendants.*
*Barème indicatif : Algèbre = 10pts, Analyse = 10pts.*

---

**Exercice 1. Analyse : séries entières 1**
a/ Calculer le développement en série entière de la fonction suivante, et donner son rayon de convergence (avec une justification rapide)

$$f(x) := \frac{x^2}{1-x}.$$

b/ Décomposer en éléments simples la fraction rationnelle $\frac{1}{x(x-1)}$.
c/ Calculer

$$\sum_{k=2}^{\infty} \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{k^n}.$$

**Solution**

---

a/ On a

$$f(x) = \frac{x^2}{1-x} = x^2 \sum_{n=0}^{\infty} x^n = \sum_{n=0}^{\infty} x^{n+2} = \sum_{n=2}^{\infty} x^n.$$

La suite $(r^n)$ est bornée ssi $r \leq 1$, donc le rayon de convergence est $R = 1$.

b/ On a directement (réduire au même dénominateur pour le vérifier)

$$\frac{1}{x(x-1)} = \frac{1}{x-1} - \frac{1}{x}.$$

c/ On commence par traiter la somme en $n$. D'après les questions 1 et 2, on a

$$\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k^n} = f(\tfrac{1}{k}) = \frac{\frac{1}{k^2}}{1-\frac{1}{k}} = \frac{1}{k(k-1)} = \frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}.$$

En sommant sur $k$, on reconnait une somme télescopique. Donc

$$\sum_{k=2}^{\infty} \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{k^n} = \sum_{k=2}^{\infty} \left( \frac{1}{k-1} - \frac{1}{k} \right) = 1.$$

---

**Exercice 2. Analyse : séries entières 2**
*Le but de cet exercice est de calculer le développement en série entière de $f(x) = \mathrm{e}^x \sin(x)$.*

a/ Montrer que $f$ est développable en série entière, avec

$$\mathrm{e}^x \sin(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \left( \frac{(1+\mathrm{i})^n - (1-\mathrm{i})^n}{2\mathrm{i}} \right) x^n.$$

Quel est le rayon de convergence ?
b/ Montrer que (un dessin suffit...)

$$1 + \mathrm{i} = \sqrt{2} \cdot \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{4}}.$$

c/ En déduire que

$$\mathrm{e}^x \sin(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sqrt{2}^n \sin\left(n\frac{\pi}{4}\right)}{n!} x^n.$$

**Solution**

---

a/ On a $\sin(x) = \frac{1}{2\mathrm{i}}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}x} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}x})$, donc $\mathrm{e}^x \sin(x) = \dfrac{1}{2\mathrm{i}}(\mathrm{e}^{(1+\mathrm{i})x} - \mathrm{e}^{(1-\mathrm{i})x})$. Cette fonction est la somme de deux exponentielle. Elle est donc DSE avec rayon de convergence $R = \infty$. Explicitement, on a

$$\mathrm{e}^x \sin(x) = \frac{1}{2\mathrm{i}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(1+\mathrm{i})^n x^n}{n!} - \frac{1}{2\mathrm{i}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(1+\mathrm{i})^n x^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \left( \frac{(1+\mathrm{i})^n - (1-\mathrm{i})^n}{2\mathrm{i}} \right) x^n, \qquad (R = \infty).$$

b/ (dessin compliqué en LaTeX...). Le module de $1+\mathrm{i}$ est $\sqrt{2}$ (diagonale d'un carré), et la phase est $\pi/4$. Donc $1 + \mathrm{i} = \sqrt{2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{4}}$.

c/ On a de même que $1 - \mathrm{i} = \sqrt{2}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{4}}$. Ainsi

$$\frac{1}{2\mathrm{i}} \left( (1+\mathrm{i})^n - (1-\mathrm{i})^n \right) = \frac{1}{2\mathrm{i}} \left( \sqrt{2}^n \mathrm{e}^{\mathrm{i}n\frac{\pi}{4}} - \sqrt{2}^n \mathrm{e}^{-\mathrm{i}n\frac{\pi}{4}} \right) = \sqrt{2}^n \sin\left(n\frac{\pi}{4}\right).$$

Le résultat suit.

---

**Exercice 3. Analyse : séries entières 3**

*On rappelle que* $\arctan(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} x^{2n+1}$.

1/ Montrer que (*on pourra dériver l'expression...*)

$$\int_0^x \frac{s - \arctan(s)}{s^2} \mathrm{d}s = \frac{\arctan(x)}{x} + \frac{1}{2}\ln(1+x^2) - 1.$$

2/ En déduire que (*on pourra poser* $x = z^2$)

$$\frac{\arctan(\sqrt{x})}{\sqrt{x}} + \frac{1}{2}\ln(1+x) - 1 = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{2n+1} \frac{x^n}{n}.$$

**Solution**

a/ Notons $f(x)$ la fonction dans le membre de droite, et calculons sa dérivée. On obtient

$$\begin{aligned} f'(x) = \left( \frac{\arctan(x)}{x} + \frac{1}{2}\ln(1+x^2) - 1 \right)' &= \frac{-\arctan(x)}{x^2} + \frac{1}{(1+x^2)x} + \frac{1}{2}\frac{2x}{1+x^2} = \frac{-\arctan(x)}{x^2} + \frac{1+x^2}{(1+x^2)x} \\ &= \frac{-\arctan(x)}{x^2} + \frac{1}{x} = \frac{x - \arctan(x)}{x^2}. \end{aligned}$$

En intégrant, on trouve que

$$\int_0^x \frac{s - \arctan(s)}{s^2} \mathrm{d}s = f(x) - f(0).$$

De plus, on a $\arctan(x) \sim x$ lorsque $x \to 0$, donc $\frac{\arctan(x)}{x} \to 1$ quand $x \to 0$. Ainsi, on trouve $f(0) = 0$, et le résultat suit.

b/ En remarquant que

$$\arctan(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} x^{2n+1} = x + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} x^{2n+1},$$

on trouve que

$$\frac{x - \arctan(x)}{x^2} = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} x^{2n-1}.$$

La suite $r^{2n-1}/(2n+1)$ est bornée ssi $r \le 1$, donc cette fonction est DSE, avec $R = 1$. Pour $|x| < 1$, on peut intégrer terme à terme, et on trouve

$$\int_0^x \frac{s - \arctan(s)}{s^2} \mathrm{d}s = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} \int_0^x s^{2n-1} \mathrm{d}s = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} \frac{x^{2n}}{2n}.$$

En prenant $x = z^2$, on en déduit que

$$f(\sqrt{z}) = \int_0^{\sqrt{z}} \frac{s - \arctan(s)}{s^2} \mathrm{d}s = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{2n+1} \frac{z^n}{2n}.$$

---