Partiel (L2) Mathématiques fondamentales. (Corrections)

11 avril 2022 *D. Gontier & S. Wolf*

Deux heures. Sans document.
1 page recto-verso, 6 exercices indépendants.
Barème indicatif : Algèbre = 10pts, Analyse = 10pts.

Exercice 1. Analyse : séries entières

Soit $S(z) = \sum_{n \geq 0} a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence $0 < R < \infty$.
On note R_1, R_2 et R_3 les rayons de convergence des séries entières

$$S_1(z) := \sum_{n \geq 0} a_n z^{2n}, \quad S_2(z) = \sum_{n \geq 0} a_n \mathrm{e}^{\sqrt{n}} z^n, \quad S_3(z) = \sum_{n \geq 0} a_n z^{n^2}.$$

a/ Montrer qu'il existe $0 < r_1 < r_2 < \infty$ tel que la suite $(a_n r_1^n)$ soit bornée, et telle que la suite $(a_n r_2^n)$ soit non bornée.

b/ Calculer R_1 (on justifiera la réponse).

c1/ Montrer que $R_2 \leq R$.
c2/ Montrer que $R_2 \geq R$ (*on pourra utiliser le nombre* r_1).

d1/ Montrer que pour tout $\rho < 1$, la suite $(a_n \rho^{n^2})$ est bornée (*on pourra utiliser le nombre* r_1)
d2/ Montrer que pour tout $\rho > 1$, la suite $(a_n \rho^{n^2})$ est non bornée (*on pourra utiliser le nombre* r_2).

Correction

a/ D'après la définition du rayon de convergence R, si $0 < r_1 < R$, la suite $a_n r_1^n$ est bornée, et si $R < r_2 < \infty$, la suite $a_n r_2^n$ est non bornée.

b/ On a $S_1(z) = S(z^2)$. On en déduit que le rayon de convergence est $R_1 = \sqrt{R}$.

c1/ On a $|a_n \mathrm{e}^{\sqrt{n}}| > |a_n|$ pour tout n. D'après le cours, cela implique que $R_2 \leq R$.
c2/ Soit $z \in \mathbb{C}$ avec $|z| < R$, et soit r_1 tel que $|z| < r_1 < R$. On a

$$|a_n \mathrm{e}^{\sqrt{n}} z^n| = |a_n r_1^n| \cdot \mathrm{e}^{\sqrt{n}} \left(\frac{|z|}{r_1} \right)^n \leq C \mathrm{e}^{\sqrt{n}} \left(\frac{|z|}{r_1} \right)^n = C \mathrm{e}^{\sqrt{n} + n \log(\alpha)},$$

avec $\alpha := |z|/r_1 < 0$. On a $\log(\alpha) < 0$, donc $\sqrt{n} + n \log(\alpha) \to -\infty$. Ainsi, la suite de droite tend vers 0, et est en particulier borné. Cela montre que $|z| \leq R_2$. Ceci étant vrai pour tout $|z| \leq R$, on a $R \leq R_2$.

d1/ Soit $\rho < 1$, on a

$$a_n \rho^{n^2} = (a_n r_1^n) \rho^{n^2} r_1^{-n} \leq C \mathrm{e}^{n^2 \log(\rho) - n \log(r_1)}.$$

Comme $\rho < 1$, on a $\log(\rho) < 0$, et $n^2 \log(\rho) - n \log(r_1) \to -\infty$ lorsque $n \to \infty$. On en déduit que la suite $a_n \rho^{n^2}$ est bornée.
d2/ Si $\rho > 1$, on a maintenant

$$|a_n| \rho^{n^2} = (|a_n| r_2^n) \mathrm{e}^{n^2 \log(\rho) - n \log(r_2)}.$$

Cette fois, la suite $|a_n| r_2^n$ est non bornée (par définition de r_2), et la suite $\mathrm{e}^{n^2 \log(\rho) - n \log(r_2)}$ non plus, car $\log(\rho) > 0$. Donc la suite $|a_n| \rho^{n^2}$ est non bornée.
Cela montre que $R_3 = 1$.

Exercice 2. Analyse : Encore des identités
On rappelle que la fonction $f(x) := \sqrt{1+x}$ est développable en série entière sur $(-1, 1)$, avec

$$\forall x \in (-1,1), \quad f(x) = S(x) := \sum_{n \geq 0} a_n x^n, \quad \text{où} \quad a_n := \frac{1}{4^n} \binom{2n}{n} \frac{(-1)^n}{2n-1}.$$

a/ Montrer que le rayon de convergence de S est $R = 1$.

b/ On rappelle la formule de Stirling $n! \sim \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n$. Calculer un équivalent de a_n lorsque $n \to \infty$.

c/ Montrer que
$$\sqrt{2} = \sum_{n\geq 0} \frac{1}{4^n}\binom{2n}{n}\frac{(-1)^n}{2n-1}.$$

d/ Montrer que la série $\sum a_n$ est absolument convergente. En déduire que
$$0 = \sum_{n\geq 0} \frac{1}{4^n}\binom{2n}{n}\frac{1}{2n-1}, \quad \text{puis que} \quad \sum_{n\geq 1} \frac{1}{4^n}\binom{2n}{n}\frac{1}{2n-1} = 1.$$

Correction

a/ C'est dans le cours.

b/ Avec Stirling, on a
$$a_n = \frac{1}{4^n}\frac{(2n)!}{n!n!}\frac{(-1)^n}{2n-1} \sim \frac{(-1)^n}{2n}\frac{1}{4^n}\frac{\sqrt{2\pi 2n}\left(\frac{2n}{e}\right)^{2n}}{2\pi n\left(\frac{n}{e}\right)^{2n}} = \frac{(-1)^n}{2n}\frac{\sqrt{2\pi 2n}}{2\pi n} = \frac{(-1)^n}{2\sqrt{\pi}n^{3/2}}.$$

c/ La série $\sum a_n$ est une série alternée, dont le terme général tend vers 0. On peut appliquer le théorème d'Abel, et en déduire que $f(1) = \sum a_n$. On obtient, comme voulu,
$$\sqrt{2} = \sum_{n\geq 0} a_n.$$

d/ On a $|a_n| \sim \frac{1}{2\sqrt{\pi}n^{3/2}}$, donc $\sum |a_n|$ est une série convergente. En remarquant que, pour $n \geq 1$, on a $|a_n| = (-1)^n a_n = a_n x^n$ avec $x = -1$, cela implique qu'on peut aussi utiliser le théorème d'Abel en $x = -1$. On obtient $f(1) = \sum_{a_n}(-1)^n$, ce qui donne
$$0 = \sum_{n\geq 0} a_n(-1)^n = \sum_{n\geq 0} \frac{1}{4^n}\binom{2n}{n}\frac{1}{2n-1}.$$

En remarquant que le terme $n = 0$ est nul sur la gauche, (en fait, $a_0 = -1$), on a
$$-a_0 = \sum_{n\geq 1} a_n(-1)^n, \quad \text{ou encore} \quad 1 = \sum_{n\geq 1} \frac{1}{4^n}\binom{2n}{n}\frac{1}{2n-1}.$$

Exercice 3. Analyse : Théorème de Cauchy

Soit $S(z) := \sum_{n\geq 0} a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence $R > 0$.

a/ Soit $0 \leq r < R$, et soit $k \in \mathbb{N}$ fixé. Pour $n \in \mathbb{N}$, on introduit la fonction $g_n : [0, 2\pi] \to \mathbb{C}$ définie par
$$g_n(\theta) := a_n r^n \mathrm{e}^{\mathrm{i}n\theta}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}k\theta}.$$

a1/ Montrer que la série $\sum g_n$ convergence normalement sur $[0, 2\pi]$.

a2/ En déduire que la série $\sum_{n\geq 0} g_n$ converge uniformément sur $[0, 2\pi]$ vers $\theta \mapsto S(r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta})\mathrm{e}^{-\mathrm{i}k\theta}$.

b/ Montrer que
$$\int_0^{2\pi} S(r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta})\mathrm{e}^{-\mathrm{i}k\theta}\mathrm{d}\theta = \sum_{n\geq 0}\int_0^{2\pi} g_n(\theta)\mathrm{d}\theta.$$

c/ En déduire que, pour tout $k \in \mathbb{N}$, on a $a_k = \dfrac{1}{r^k}\dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} S(r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta})\mathrm{e}^{-\mathrm{i}k\theta}\mathrm{d}\theta$.

d/ On suppose que $R = \infty$, et que S est une fonction bornée sur $\mathbb{C}$. Montrer que pour tout $k \geq 1$, on a $a_k = 0$ (*on pourra faire la limite $r \to \infty$...*).

Ceci montre le théorème de Cauchy suivant :

Théorème de Cauchy : *Si f est une fonction holomorphe (=SE) bornée sur $\mathbb{C}$, alors f est constante.*

Correction

a1/ On a

$$\sup_{\theta\in[0,2\pi]} |g_n(\theta)| = \sup_{\theta\in[0,2\pi]} |a_n|r^n = |a_n|r^n.$$

Comme r est plus petit que le rayon de convergence R, la série $|a_n|r^n$ est convergence, donc la série $\sum g_n$ converge absolument sur $[0, 2\pi]$.

a2/ D'après le cours, il existe une fonction $G(\theta)$ tel que $\sum g_n = G$ (convergence uniforme). En particulier, on doit avoir la convergence simple :

$$G(\theta) = \sum_{n=0}^{\infty} g_n(\theta) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n r^n \mathrm{e}^{\mathrm{i}n\theta}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}k\theta} = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}k\theta} \sum_{n=0}^{\infty} a_n \left(r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\right)^n = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}k\theta} S(r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}).$$

b/ Comme la série $\sum g_n$ converge uniformément vers G, on a $\int G = \sum \int g_n$. Cela donne

$$\int_0^{2\pi} S(r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta})\mathrm{e}^{-\mathrm{i}k\theta}\mathrm{d}\theta = \int_0^{2\pi} G(\theta)\mathrm{d}\theta = \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^{2\pi} g_n(\theta)\mathrm{d}\theta.$$

c/ On calcule maintenant $\int_0^{2\pi} g_n$. On a

$$\int_0^{2\pi} g_n(\theta)\mathrm{d}\theta = a_n r^n \int_0^{2\pi} \mathrm{e}^{\mathrm{i}(n-k)\theta}\mathrm{d}\theta = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad n \neq k \\ 2\pi a_k r^k & \text{sinon.} \end{cases}$$

Ainsi,

$$\int_0^{2\pi} S(r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta})\mathrm{e}^{-\mathrm{i}k\theta}\mathrm{d}\theta = \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^{2\pi} g_n(\theta)\mathrm{d}\theta = \int_0^{2\pi} g_k(\theta)\mathrm{d}\theta = 2\pi a_k r^k.$$

d/ Si S est une fonction bornée, on a, pour tout $k \in \mathbb{N}$,

$$|a_k| = \frac{1}{2\pi}\frac{1}{r^k}\left|\int_0^{2\pi} S(r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta})\mathrm{e}^{-\mathrm{i}k\theta}\mathrm{d}\theta\right| \leq \frac{1}{2\pi}\frac{1}{r^k} 2\pi\|S\|_\infty = \frac{1}{r^k}.$$

En faisant tendre r vers l'infini, on en déduit que, en fait, $a_k = 0$.