Examen (L2) Mathématiques fondamentales. Corrections

25 mai 2023 *D. Gontier & S. Wolf*

Deux heures. Sans document.
1 page recto-verso, 6 exercices indépendants.
Barème indicatif : Algèbre = 10pts, Analyse = 10pts.

Exercice 1. Intégration sous le signe intégrale
Pour $x > 0$, on pose

$$F(x) := \int_0^1 \frac{t^x - 1}{\ln(t)} \mathrm{d}t.$$

On rappelle que t^x est une notation pour $\mathrm{e}^{x \ln(t)}$. On pose $f(x,t) := \frac{t^x - 1}{\ln(t)}$
a/ Calculer *(on pourra poser $t = 1 - u$ et faire un DL pour la deuxième limite...)*

$$\lim_{t \to 0} f(x,t), \quad \text{et} \quad \lim_{t \to 1} f(x,t).$$

b/ Montrer que $F'(x) = \dfrac{1}{1+x}$.
c/ En déduire que

$$F(x) = \ln(1+x).$$

Solution

a/ Lorsque $t \to 0$, on a $t^x \to 0$ et $\ln(t) \to -\infty$. On trouve directement que $\lim_{t\to 0} f(x,t) = 0$.
Pour la limite en 1, on pose $t = 1 - u$. On a

$$f(x, 1-u) = \frac{\mathrm{e}^{x \ln(1-u)} - 1}{\ln(1-u)} = \frac{\mathrm{e}^{-x(u+o(u))} - 1}{-u + o(u)} = \frac{1 - x(u + o(u)) - 1}{-u + o(u)} \to [u \to 0] x.$$

Donc $\lim_{t \to 1} f(x,t) = x$.
b/ On vérifie les hypothèses du théorème de dérivation sous le signe intégrale.
La fonction f est C^∞ sur $\mathbb{R}^+ \times (0,1)$, ce qui prouve (i)-(ii) et (iii). De plus, on a

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,t) = \frac{\partial}{\partial x} \frac{\mathrm{e}^{x \ln(t)} - 1}{\ln(t)} = \mathrm{e}^{x \ln(t)} = t^x.$$

(iv). Pour tout $0 < t < 1$, on a $0 < t^x < 1$. Donc la fonction $\partial_x f$ est bornée par $\phi(t) := 1$ sur $(0,1)$, et ϕ est intégrable sur $(0,1)$.
On peut appliquer le théorème de dérivation sous le signe intégrale, et on trouve que F est dérivable, et que

$$F'(x) = \int_0^1 t^x = \left[\frac{t^x}{(x+1)} \right]_0^1 = \frac{1}{1+x}.$$

c/ En réintégrant cette expression entre 0 et x, on a

$$F(x) = F(0) + \int_0^x F'(s) \mathrm{d}s = F(0) + \int_0^x \frac{\mathrm{d}s}{1+s} = 0 + \ln(1+x).$$

Exercice 2. Une série de Fourier
Si f est une fonction 2π périodique, sont n-ème coefficient de Fourier est $c_n(f) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \mathrm{e}^{-\mathrm{i}nx} \mathrm{d}x$.
Soit $0 < h < \pi$. On étudie la fonction f qui est 2π-périodique, et qui, sur l'intervalle $(-\pi, \pi)$ vaut

$$f(x) = \begin{cases} h - |x| & \text{si} \quad |x| \le h, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

a/ Dessiner la fonction f.
b/ Montrer que

$$c_n(f) = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}} \int_0^\pi f(x) \cos(nx) \mathrm{d}x, \quad \text{puis que} \quad c_n(f) = \begin{cases} \frac{h^2}{\sqrt{2\pi}} & \text{si} \quad n = 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}} \frac{1 - \cos(nh)}{n^2} & \text{sinon.} \end{cases}$$

c/ Montrer que (on pourra regarder en $x=0$) *(on rappelle que $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$)*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(nh)}{n^2} = \frac{h^2}{4} + \frac{\pi^2}{6} - \frac{\pi h}{2}.$$

Solution

a/ f est un chapeau + 2π périodique.
b/ Comme f est paire, on a

$$c_n(f) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \mathrm{e}^{-\mathrm{i}nx} \mathrm{d}x = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\pi}^{0} f(x) \mathrm{e}^{-\mathrm{i}nx} \mathrm{d}x + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{0}^{\pi} f(x) \mathrm{e}^{-\mathrm{i}nx} \mathrm{d}x.$$

On fait le changement de variable $y=-x$ dans la première intégrale, ce qui donne

$$c_n(f) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\pi} f(x) \left(\mathrm{e}^{-\mathrm{i}nx} + \mathrm{e}^{\mathrm{i}nx} \right) \mathrm{d}x = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\pi} f(x) \cos(nx) \mathrm{d}x.$$

On calcule maintenant l'intégrale. Pour $n \neq 0$, on a, avec une IPP

$$\begin{aligned} c_n(f) &= \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}} \int_0^h (h-x) \cos(nx) \mathrm{d}x = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}} \left(\int_0^h \frac{\sin(nx)}{n} \mathrm{d}x + \left[(h-x) \frac{\sin(nx)}{n} \right]_0^h \right) \\ &= \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}} \left[\frac{-\cos(nx)}{n^2} \right]_0^h = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}} \frac{1-\cos(nh)}{n^2}. \end{aligned}$$

Pour $n=0$, on trouve

$$c_0(f) = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}} \int_0^h (h-x) \mathrm{d}x = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}} \frac{h^2}{2}.$$

c/ La fonction f est C^{∞} par morceaux. On applique le théorème de Dirichlet en $x=0$. On obtient

$$\lim_{N \to \infty} \sum_{n=-N}^{N} c_n(f) \frac{1}{\sqrt{2\pi}} = \frac{1}{2} \left(f(0^+) + f(0^-) \right) = f(0) = h.$$

La somme à gauche est aussi

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{n=-N}^{N} c_n(f) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left(\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}} \frac{h^2}{2} + 2 \sum_{n=1}^{N} \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}} \frac{1-\cos(nh)}{n^2} \right) = \frac{1}{\pi} \left(\frac{h^2}{2} + 2 \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n^2} - 2 \sum_{n=1}^{N} \frac{\cos(nh)}{n^2} \right).$$

En prenant la limite $N \to \infty$, et en rappelant que $\sum \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$, on trouve

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(nh)}{n^2} = \frac{h^2}{4} + \frac{\pi^2}{6} - \frac{\pi h}{2}.$$

Exercice 3. Analyse : Développement en série entière de $\arcsin^2$
(Difficile, ne pas hésiter à sauter des questions). On pose

$$f_n(t) := \gamma_n \sin^{2n}(t), \qquad \textit{avec} \quad \gamma_n := \frac{1}{2} \frac{4^n (n!)^2}{n^2 (2n)!}.$$

a/ Montrer que

$$\gamma_1 = 1, \qquad \text{et que} \quad (2n)(2n-1)\gamma_n = 4(n-1)^2 \gamma_{n-1}.$$

b/ En déduire que, pour tout $t \in \mathbb{R}$, on a

$$\forall n \geq 2, \qquad f_n''(t) = 4(n-1)^2 f_{n-1}(t) - 4n^2 f_n(t), \qquad \text{et} \quad f_1''(t) = 2 - 4 f_1(t).$$

c/ *On rappelle la formule de Stirling :* $n! \sim \sqrt{2\pi n} \left(\frac{n}{e}\right)^n$. Calculer un équivalent de γ_n lorsque $n \to \infty$.
d/ Soit $0 < y < \frac{\pi}{2}$, et soit $\alpha := \sin(y)$. Montrer que $0 < \alpha < 1$, puis que la série $\sum_{n=1}^{\infty} 4n^2 f_n$ converge normalement sur $[-y, y]$. En déduire que

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n''(t) = 2 \qquad \text{avec convergence uniforme sur } [-y, y].$$

e/ Montrer que

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(t) = t^2 \qquad \text{avec convergence uniforme sur } [-y, y].$$

f/ Montrer que $\arcsin^2$ est développable en série entière, et que

$$\arcsin^2(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \gamma_n x^{2n}.$$

g/ Quel est le rayon de convergence de cette série entière ?

Solution

---

a/ On a

$$\gamma_1 = \frac{1}{2}\frac{4 \cdot 1^2}{1^2 \cdot 2} = 1.$$

Par ailleurs, on calcule

$$\frac{\gamma_n}{\gamma_{n-1}} = \frac{4n^2}{n^2(2n)(2n-1)}(n-1)^2 = \frac{4(n-1)^2}{(2n)(2n-1)}.$$

b/ Les fonctions f_n sont C^∞. En dérivant, on obtient (pour $n \geq 2$ pour commencer)

$$f_n'(t) = \gamma_n (2n) \sin^{2n-1}(t) \cos(t)$$

puis

$$f_n''(t) = \gamma_n (2n)(2n-1) \sin^{2n-2}(t) \cos^2(t) - \gamma_n (2n) \sin^{2n}(t)$$

En écrivant $\cos^2 = 1 - \sin^2$, cela donne

$$\begin{aligned} f_n''(t) &= \gamma_n (2n)(2n-1) \sin^{2n-2}(t) - \gamma_n (2n)(2n-1) \sin^{2n}(t) - \gamma_n (2n) \sin^{2n}(t) \\ &= \gamma_n (2n)(2n-1) \sin^{2n-2}(t) - 4n^2 \gamma_n \sin^{2n}(t) \\ &= 4(n-1)^2 f_{n-1}(t) - 4n^2 f_n(t) \end{aligned}$$

où on a utilisé la question a/ pour la dernière ligne. Le calcul est similaire pour $f_1(t) = \sin^2(t)$. On trouve $f_1'(t) = 2\sin(t)\cos(t)$ puis

$$f_1''(t) = 2\cos^2(t) - 2\sin^2(t) = 2 - 4\sin^2(t) = 2 - 4f_1(t).$$

c/ On a, avec Stirling

$$\gamma_n \sim \frac{1}{2} \frac{4^n 2\pi n \left(\frac{n}{\mathrm{e}}\right)^{2n}}{n^2 \sqrt{2\pi 2n} \left(\frac{2n}{\mathrm{e}}\right)^{2n}} \sim \frac{1}{2} \frac{2\pi n}{n^2 \sqrt{2\pi 2n}} \sim \frac{\sqrt{\pi}}{n^{3/2} 2}.$$

d/ La fonction sin est positive et croissante sur $[0, \pi/2]$, donc, si $0 < y < \pi/2$, on a

$$\max_{t \in [0,y]} |\sin(t)| = \sin(y) =: \alpha \quad \text{avec } 0 < \alpha < 1.$$

En particulier,

$$\|4n^2 f_n\|_{\infty,[0,y]} = 4n^2 \gamma_n \alpha^{2n} \sim 4n^2 \frac{\sqrt{\pi}}{n^{3/2} 2} \alpha^n.$$

Comme $\alpha < 1$, la série $\|4n^2 f_n\|_\infty$ converge, donc la série $\sum 4n^2 f_n$ est normalement convergente. En particulier, elle converge uniformément vers une fonction F sur $[0, y]$.

La série $\sum 4(n-1)^2 f_{n-1}$ converge aussi uniformément. On en déduit que $\sum 4(n-1)^2 f_{n-1} - \sum 4n^2 f_n$ converge uniformément. On reconnait une série télescopique, et on trouve

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n''(t) = f_1''(t) + \sum_{n=2}^{\infty} f_n'' = 2 - 4f_1 + \sum_{n=2}^{\infty} 4(n-1)^2 f_{n-1} - \sum_{n=2}^{\infty} 4n^2 f_n = 2.$$

e/ La série $\sum f_n''$ converge uniformément vers 2 sur $[0, y]$. En intégrant sur $[0, t]$, on trouve que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \int_0^t f_n''(s) \mathrm{d}s \quad \text{converge uniformément vers} \quad \int_0^t 2,$$

ce qui donne, en utilisant que $f_n'(0)=0$,

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n'(t) \quad \text{converge uniformément vers } t \text{ sur } [0,y].$$

En réintégrant, et en utilisant que $f_n(0)=0$, on trouve

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(t) \quad \text{converge uniformément vers } t^2 \text{ sur } [0,y].$$

f/ On sait que arcsin est DSE avec $R=1$. Par produit de Cauchy, on en déduit que $\arcsin^2$ est DSE avec $R \geq 1$. Pour identifier les coefficients, on pose $x=\sin(t)$ (donc $t=\arcsin(x)$) dans l'expression précédente, ce qui donne

$$\sum_{n=1}^{\infty} \gamma_n x^{2n} \quad \text{converge uniformément vers } \arcsin(x)^2 \text{ sur } [0,\alpha].$$

On a en particulier la convergence simple, ce qui montre que γ_n sont les coefficients du DSE de $\arcsin^2$.

g/ On a montré que $\gamma_n \sim \frac{\sqrt{\pi}}{n^{3/2}2}$. Donc $\gamma_n r^n$ est une suite bornée ssi $r \geq 1$. Ainsi, $R=1$.