Examen (L2 PSL) Mathématiques fondamentales.

25 mai 2023 *D. Gontier & S. Wolf*

Deux heures. Sans document.
1 page recto-verso, 6 exercices indépendants.
Barème indicatif : Algèbre = 10pts, Analyse = 10pts.

Exercice 1. Intégration sous le signe intégrale
Pour $x > 0$, on pose

$$F(x) := \int_0^1 \frac{t^x - 1}{\ln(t)} \mathrm{d}t.$$

On rappelle que t^x est une notation pour $\mathrm{e}^{x \ln(t)}$. On pose $f(x,t) := \frac{t^x-1}{\ln(t)}$
a/ Calculer *(on pourra poser $t = 1 - u$ et faire un DL pour la deuxième limite...)*

$$\lim_{t \to 0} f(x,t), \quad \text{et} \quad \lim_{t \to 1} f(x,t).$$

b/ Montrer que $F'(x) = \dfrac{1}{1+x}$.
c/ En déduire que $F(x) = \ln(1+x)$.

Exercice 2. Une série de Fourier
Si f est une fonction 2π périodique, sont n-ème coefficient de Fourier est $c_n(f) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \mathrm{e}^{-\mathrm{i}nx} \mathrm{d}x$.
Soit $0 < h < \pi$. On étudie la fonction f qui est 2π-périodique, et qui, sur l'intervalle $(-\pi, \pi)$ vaut

$$f(x) = \begin{cases} h - |x| & \text{si} \quad |x| \le h, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

a/ Dessiner la fonction f.
b/ Montrer que

$$c_n(f) = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_0^\pi f(x) \cos(nx) \mathrm{d}x, \quad \text{puis que} \quad c_n(f) = \begin{cases} \dfrac{h^2}{\sqrt{2\pi}} & \text{si} \quad n = 0 \\ \dfrac{2}{\sqrt{2\pi}} \dfrac{1 - \cos(nh)}{n^2} & \text{sinon.} \end{cases}$$

c/ Montrer que (on pourra regarder en $x = 0$) *(on rappelle que $\sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$)*

$$\boxed{\sum_{n=1}^\infty \frac{\cos(nh)}{n^2} = \frac{h^2}{4} + \frac{\pi^2}{6} - \frac{\pi h}{2}.}$$

Exercice 3. Analyse : Développement en série entière de $\arcsin^2$
(Difficile, ne pas hésiter à sauter des questions). On pose

$$f_n(t) := \gamma_n \sin^{2n}(t), \qquad \textit{avec} \quad \gamma_n := \frac{1}{2} \frac{4^n (n!)^2}{n^2 (2n)!}.$$

a/ Montrer que

$$\gamma_1 = 1, \qquad \text{et que} \quad (2n)(2n-1)\gamma_n = 4(n-1)^2 \gamma_{n-1}.$$

b/ En déduire que, pour tout $t \in \mathbb{R}$, on a

$$\forall n \ge 2, \qquad f_n''(t) = 4(n-1)^2 f_{n-1}(t) - 4n^2 f_n(t), \qquad \text{et} \quad f_1''(t) = 2 - 4 f_1(t).$$

c/ *On rappelle la formule de Stirling : $n! \sim \sqrt{2\pi n} \left(\frac{n}{e}\right)^n$*. Calculer un équivalent de γ_n lorsque $n \to \infty$.
d/ Soit $0 < y < \frac{\pi}{2}$, et soit $\alpha := \sin(y)$. Montrer que $0 < \alpha < 1$, puis que la série $\sum_{n=1}^\infty 4n^2 f_n$ converge normalement sur $[-y, y]$. En déduire que

$$\sum_{n=1}^\infty f_n''(t) = 2 \qquad \text{avec convergence uniforme sur } [-y, y].$$

e/ Montrer que

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(t) = t^2 \qquad \text{avec convergence uniforme sur } [-y, y].$$

f/ Montrer que $\arcsin^2$ est développable en série entière, et que

$$\arcsin^2(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \gamma_n x^{2n}.$$

g/ Quel est le rayon de convergence de cette série entière ?