

Examen (L2) Mathématiques fondamentales. (Corrections)

9 juin 2022 D. Gontier & S. Wolf

Trois heures. Sans document.
1 page recto-verso, 6 exercices indépendants.
Barème indicatif : Algèbre = 10pts, Analyse = 10pts.

Exercice 1. Analyse : Dérivabilité sous le signe intégrale

Pour $t \geq 0$, on pose

$$F(t) = \int_0^{\infty} \frac{\arctan(tx)}{x(1+x^2)} dx.$$

a/ Montrer que pour tout $t \geq 0$, la fonction $x \mapsto \frac{\arctan(tx)}{x(1+x^2)}$ est intégrable sur \mathbb{R}^+ .

b/ Montrer que la fonction F est de classe C^1 , et que

$$F'(t) = \int_0^{\infty} \frac{dx}{(1+t^2x^2)(1+x^2)}.$$

c/ Montrer que, pour tout $t \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\}$, on a

$$\frac{1}{(1+t^2x^2)(1+x^2)} = \frac{1}{t^2-1} \left(\frac{t^2}{1+t^2x^2} - \frac{1}{1+x^2} \right).$$

d/ En déduire que, pour tout $t \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\}$, on a

$$F'(t) = \frac{\pi}{2} \frac{1}{t+1}.$$

e/ On admet que la formule précédente est valide en $t=1$ aussi (c'est vrai car F' est continue). Montrer que

$$F(t) = \frac{\pi}{2} \ln(1+t).$$

a/ Soit $f(t, x) := \frac{\arctan(tx)}{x(1+x^2)}$. Pour tout $t \geq 0$, la fonction $f(t, \cdot)$ est continue sur \mathbb{R}^+ . En 0, on a

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(t, x) = \frac{t}{(1+x^2)} < \infty,$$

donc cette fonction admet un prolongement par continuité en 0. De plus, en $+\infty$, on a $f(t, x) = O(x^{-3})$, donc la fonction $x \mapsto f(t, x)$ est intégrable sur \mathbb{R}^+ d'après le critère de Riemann.

b/ On vérifie les hypothèses du théorème de dérivation sous le signe \int . On a déjà montré que $x \mapsto f(t, x)$ était intégrable. On a

$$\partial_t f(t, x) = \frac{1}{(1+t^2x^2)(1+x^2)}.$$

En tant que fonction de x , cette fonction est continue sur $[0, \infty)$, et est intégrable en $+\infty$ (car elle décroît comme $O(x^{-4})$). De plus, on a la majoration

$$|\partial_t f(t, x)| \leq \frac{1}{1+x^2} =: \phi(x),$$

qui est intégrable. Le théorème de dérivation s'applique. On en déduit que F est de classe C^1 , et que

$$F'(t) = \int_0^{\infty} \partial_t f(t, x) dx = \int_0^{\infty} \frac{1}{(1+t^2x^2)(1+x^2)} dt.$$

c/ C'est une décomposition en élément simple. Il suffit de réduire au même dénominateur.

d/ On a donc

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} \frac{1}{(1+t^2x^2)(1+x^2)} dt &= \frac{1}{t^2-1} \left(t^2 \int_0^{\infty} \frac{dx}{1+t^2x^2} - \int_0^{\infty} \frac{dx}{1+x^2} \right) \\ &= \frac{1}{t^2-1} (t [\arctan(tx)]_0^{\infty} - [\arctan(tx)]_0^{\infty}) \\ &= \frac{1}{(t-1)(t+1)} \frac{\pi}{2} (t-1) = \frac{\pi}{2} \frac{1}{1+t}. \end{aligned}$$

e/ On obtient

$$F(t) = \int_0^t F'(s) ds = \int_0^t \frac{\pi}{2} \frac{1}{s+1} ds = \frac{\pi}{2} [\ln(1+s)]_0^t = \frac{\pi}{2} \ln(1+t).$$

Exercice 2. Analyse : séries de Fourier

Soit $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$, et soit f_α la fonction 2π -périodique définie sur $(-\pi, \pi)$ par $f_\alpha(t) := e^{i\alpha t}$.

a/ Montrer que f est C^1 par morceaux. Que vaut le point milieu $\frac{1}{2} [f(\pi^+) + f(\pi^-)]$?

b/ On pose $c_n(f) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) e^{-int} dt$ le n -ème coefficient de Fourier de f . Montrer que

$$\forall n \in \mathbb{Z}, \quad c_n(f) = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \frac{(-1)^n}{\alpha - n} \sin(\alpha\pi).$$

c/ Montrer que

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} \frac{1}{(\alpha - n)^2} = \frac{\pi^2}{\sin^2(\alpha\pi)}.$$

d/ Montrer que (on pourra regarder en $t = \pi$)

$$\pi \frac{\cos(\alpha\pi)}{\sin(\alpha\pi)} - \frac{1}{\alpha} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2\alpha}{\alpha^2 - n^2}. \quad (*)$$

a/ f est de classe C^∞ sur $(-\pi, \pi)$, et 2π -périodique, donc est C^1 par morceaux. On a

$$\frac{1}{2} (f(\pi^+) + f(\pi^-)) = \frac{1}{2} (f(-\pi^+) + f(\pi^-)) = \frac{1}{2} (e^{i\alpha\pi} + e^{-i\alpha\pi}) = \cos(\alpha\pi).$$

b/ On a, comme $\alpha \notin \mathbb{Z}$, que

$$\begin{aligned} c_n(f) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\pi}^{\pi} e^{i(\alpha-n)t} dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left[\frac{e^{i(\alpha-n)t}}{i(\alpha-n)} \right]_{-\pi}^{\pi} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{i(\alpha-n)} \left[e^{i(\alpha-n)\pi} - e^{-i(\alpha-n)\pi} \right] \\ &= \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{(\alpha-n)} \sin((\alpha-n)\pi) = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \frac{(-1)^n}{\alpha-n} \sin(\alpha\pi). \end{aligned}$$

c/ Comme f est C^1 par morceaux, on peut utiliser Parseval. On obtient

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} |c_n|^2 = \int_{-\pi}^{\pi} |f|^2$$

avec $\int_{-\pi}^{\pi} |f|^2 = 2\pi$, et

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} |c_n|^2 = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \frac{4}{2\pi} \frac{1}{(\alpha-n)^2} \sin^2(\alpha\pi) = \frac{2}{\pi} \sin^2(\alpha\pi) \sum_{n \in \mathbb{Z}} \frac{1}{(\alpha-n)^2}.$$

Le résultat suit.

d/ Comme f est C^1 par morceaux, on peut appliquer le théorème de Dirichlet. On obtient

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{int} = \frac{1}{2} (f(t^+) + f(t^-)).$$

En $t = \pi$, et en utilisant la première question, on obtient

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} \frac{2}{2\pi} \frac{1}{\alpha-n} \sin(\alpha\pi) = \cos(\alpha\pi).$$

On isole le terme $n = 0$, et on regroupe les terme n et $-n$ pour $n \in \mathbb{N}^*$, ce qui donne

$$\cos(\alpha\pi) = \frac{1}{\pi} \sin(\alpha\pi) \left(\frac{1}{\alpha} + \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{1}{\alpha-n} + \frac{1}{\alpha+n} \right] \right) = \frac{1}{\pi} \sin(\alpha\pi) \left(\frac{1}{\alpha} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2\alpha}{\alpha^2 - n^2} \right).$$

Exercice 3. Analyse : Développement en produit infini

Cet exercice est la suite du précédent, mais peut se traiter séparément. On pourra admettre la formule (*). Dans la suite, on fixe $0 < \varepsilon < 1$.

a/ Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $u_n(x) := \frac{2x}{x^2 - n^2}$. Montrer que $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ converge normalement sur $[0, 1 - \varepsilon]$. En déduire que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2x}{x^2 - n^2} = \pi \frac{\cos(\pi x)}{\sin(\pi x)} - \frac{1}{x} \quad (\text{convergence uniforme sur } [0, 1 - \varepsilon]).$$

b/ Montrer que, pour tout $y \in [0, 1 - \varepsilon]$, et tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a

$$\int_0^y u_n(x) = \log \left(1 - \frac{y^2}{n^2} \right).$$

c/ Montrer que, pour tout $y \in [0, 1 - \varepsilon]$, on a (on pourra dériver...)

$$\int_0^y \left(\pi \frac{\cos(\pi x)}{\sin(\pi x)} - \frac{1}{x} \right) = \ln \left(\frac{\sin(\pi y)}{\pi y} \right).$$

d/ En déduire que, pour tout $y \in [0, 1 - \varepsilon]$, on a

$$\sin(\pi y) = \pi y \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{y^2}{n^2} \right).$$

e/ En déduire que

$$\prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{4n^2} \right) = \frac{2}{\pi}.$$

a/ On a, en utilisant que pour $x \in [0, 1 - \varepsilon]$, on a $|x| \leq 1$, et $0 < n^2 - x^2 \leq n^2 - (1 - \varepsilon)^2$ que

$$\max_{x \in [0, 1 - \varepsilon]} |u_n(x)| \leq \frac{2}{n^2 - (1 - \varepsilon)^2},$$

qui est sommable en n . Donc $\sum u_n$ est ACV. Elle converge donc uniformément (donc simplement) vers une limite ψ . D'après l'exercice précédente, elle converge simplement vers (...). Par unicité de la limite, on a bien le résultat.

b/ On reconnaît que $\frac{2x}{x^2 - n^2}$ est de la forme u'/u avec $u(x) = x^2 - n^2$. Cela donne

$$\int_0^y u_n(x) = [\ln(n^2 - x^2)]_0^y = \ln(n^2 - y^2) - \ln n^2 = \ln \left(\frac{n^2 - y^2}{n^2} \right) = \ln \left(1 - \frac{y^2}{n^2} \right).$$

c/ On a

$$\left(\frac{\sin(\pi y)}{\pi y} \right)' = -\frac{\sin(\pi y)}{\pi y^2} + \pi \frac{\cos(\pi y)}{\pi y} = \frac{\sin(\pi y)}{\pi y} \left(-\frac{1}{y} + \pi \frac{\cos(\pi y)}{\sin(\pi y)} \right).$$

On obtient

$$\ln \left(\frac{\sin(\pi y)}{\pi y} \right)' = -\frac{1}{y} + \pi \frac{\cos(\pi y)}{\sin(\pi y)}.$$

En intégrant entre 0 et π , on obtient

$$\int_0^y \left(-\frac{1}{x} + \pi \frac{\cos(\pi x)}{\sin(\pi x)} \right) dx = \left[\ln \left(\frac{\sin(\pi x)}{\pi x} \right) \right]_0^y = \ln \frac{\sin(\pi y)}{\pi y}$$

d/ Comme on a convergence uniforme, on peut intégrer (*) terme à terme en x . Cela donne

$$\ln \frac{\sin(\pi y)}{\pi y} = \sum_{n=1}^{\infty} \ln \left(1 - \frac{y^2}{n^2} \right).$$

En passant à l'exponentielle, on obtient

$$\frac{\sin(\pi y)}{\pi y} = \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{y^2}{n^2} \right).$$