UNIVERSITÉ PARIS DAUPHINE

ANALYSE 3

Cours de Licence MIE, 2ème année

Département MIDO
Année universitaire 2019-2020

Jacques Féjoz

D'après les notes d'Olivier Glass, Pierre Cardaliaguet et Daniela Tonon

Dans ce troisième cours d'analyse, il sera question des outils fondamentaux de l'analyse mathématique réelle que sont : les développements de Taylor, les suites et séries numériques, les intégrales généralisées, les suites et séries de fonctions, et (en particulier) les séries entières. Il s'agit de l'alphabet fondamental de l'analyste, destiné à montrer l'existence de solutions, et de les décrire, pour des équations sans cesse plus nombreuses et plus compliquées, provenant des mathématiques, mais aussi de la physique, de la biologie ou de l'économie. Ces outils ont été forgés entre autres par le mathématicien britannique Brook Taylor (1685–1731), le mathématicien-astronome européen Joseph-Louis Lagrange (1756–1813) et le mathématicien français Augustin-Louis Cauchy (1789–1857). En particulier, c'est à ce dernier qu'il faut se plaindre pour avoir formalisé les fondements de l'analyse moderne, avec le “formalisme $\varepsilon - \delta$”, dont les quantificateurs ont depuis fait souffrir des générations d'étudiants censés étudier la notion de limite.

N.B. : Ce polycopié peut avoir des différences notables avec le cours dispensé en amphi (qui seul fixe le programme de l'examen). Il comporte des passages qui ne seront pas traités en amphi, et a contrario dans ce dernier pourront être donnés des compléments ne figurant pas dans ces notes, les preuves être plus détaillées, etc.

Table des matières

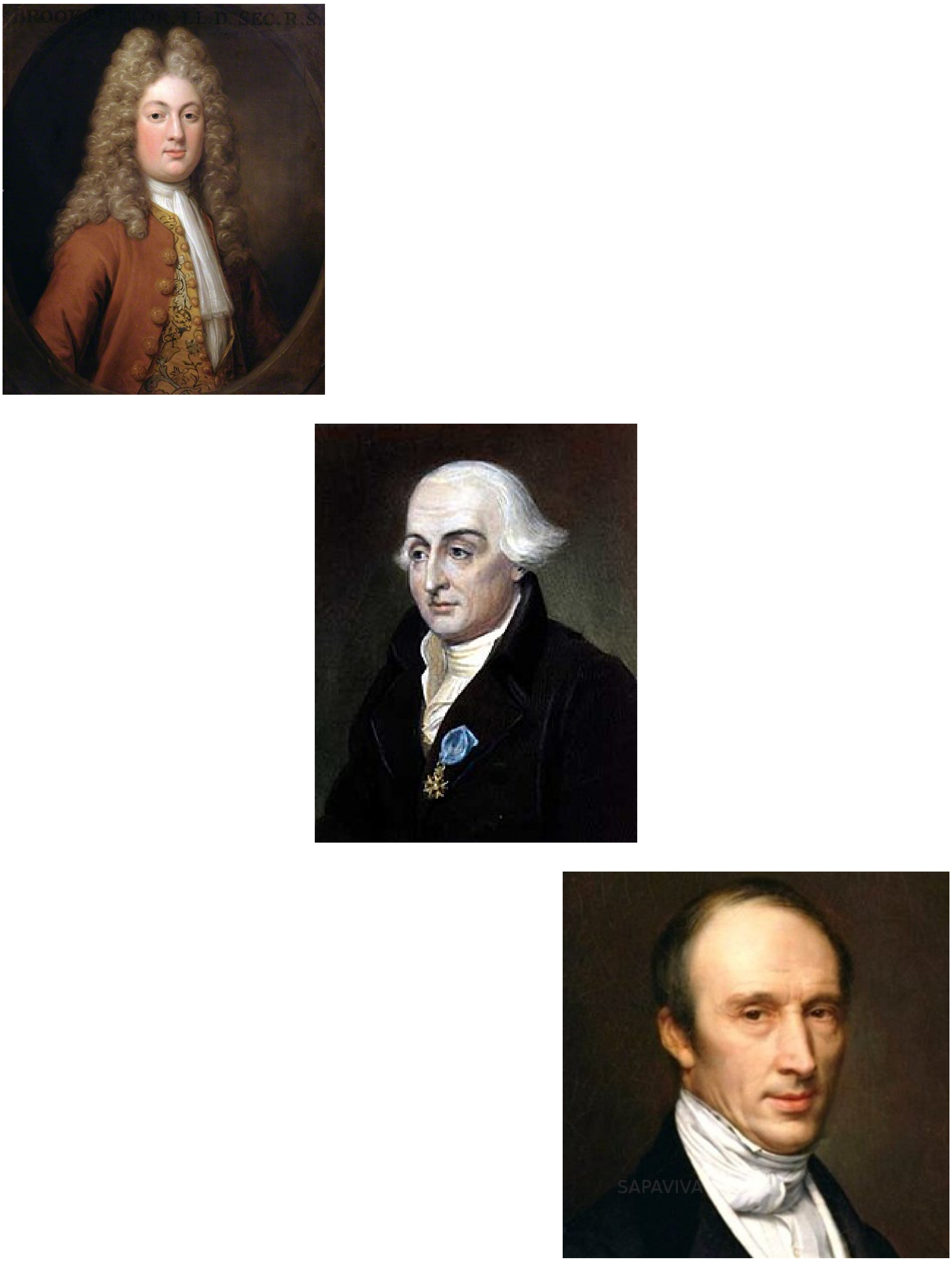

FIGURE 1 – Brook TAYLOR, Joseph-Louis LAGRANGE et Augustin-Louis CAUCHY : trois mathématiciens ayant forgé les concepts de ce cours

Chapitre 1

Développements limités

Les polynômes réels sont parmi les fonctions les plus simples ; par exemple, ils ont un nombre fini de zéros et un nombre fini de changements de sens de variation. Un théorème remarquable, le théorème de Taylor-Young, assure qu'en fait toute fonction (assez régulière) se comporte localement de la même façon, puisqu'elle admet un modèle local polynomial ! Ce modèle local s'appelle le développement limité de la fonction en un point. Il est l'outil de base pour analyser localement le comportement de la fonction au voisinage de ce point. Ceci est également valable, en particulier, pour les suites au voisinage de l'infini.

Ce chapitre étant composé de rappels, il ne contient pas de démonstration.

1.1 Comparaison de fonctions

Soient f et g deux fonctions réelles définies sur une partie A de $\mathbb{R}$. Soit $a \in \mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\}$ un point d'accumulation de A (c'est-à-dire qu'il existe des points de $A \setminus \{a\}$ arbitrairement proches de a.

Par exemple, si $a \in \mathbb{R}$, A peut être de la forme $]a-\epsilon, a+\epsilon[$ pour un $\epsilon > 0$, et, si $a = +\infty$, A peut être de la forme $]\alpha, +\infty[$ pour un $\alpha \in \mathbb{R}$. Dans ces deux cas A est un voisinage de a, mais ce n'est pas forcément le cas. Par exemple, si $a = +\infty$, A peut être l'ensemble $\mathbb{N}$; les fonctions f et $g : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ s'appellent alors des suites réelles.

Définition 1.1. On dit que f est *négligeable* par rapport à g au voisinage de a s'il existe une fonction ε définie sur un voisinage de a dans A, telle que

$$\begin{cases} f(x) = g(x)\varepsilon(x) & \text{au voisinage de } a \text{ dans } A \\ \lim_a \varepsilon = 0. \end{cases} \tag{1.1}$$

On note alors $f \underset{a}{=} o(g)$ ou encore $f = o(g)$ quand il n'y a pas d'ambiguïté. [1]

Remarque. 1. Si $g(x)$ ne s'annule pas au voisinage de a, comme $\varepsilon = f/g$, la définition prend la forme simplifiée suivante :

$$f \underset{a}{=} o(g) \Longleftrightarrow \frac{f(x)}{g(x)} \longrightarrow 0 \;\text{ lorsque } x \to a.$$

1. Une autre notation très courante que nous n'utiliserons pas est : $f \ll g$.

2. En revanche, aux points d'annulation de g, $\varepsilon(x)$ est quelconque (sous la contrainte que $\varepsilon \to_a 0$), tandis que forcément $f(x) = 0$. En particulier ($g = 0$), $f = o(0)$ si et seulement si f est *identiquement nulle* sur un voisinage de a dans A. (Si $\lim_a f = 0$, en général on n'a *pas* $f = o(0)$.)

Exemple. $f \underset{0}{=} o(1) \iff \lim_{x\to 0} f(x) = 0$.

Exemple. Si g tend vers l'infini en a et f est borné au voisinage de a, $f \underset{a}{=} o(g)$.

On a les propriétés élémentaires suivantes sur les o, qui découlent immédiatement de la définition.

Proposition 1.2.

— *Si* $f \underset{a}{=} o(g)$ *et* $g \underset{a}{=} o(h)$, $f = o(h)$ *(transitivité).*
— *Si* $f \underset{a}{=} o(g)$ *et* h *est une fonction définie au voisinage de* a, $fh = o(gh)$.
— *Si* $f \underset{a}{=} o(g)$ *et* $\hat{f} \underset{a}{=} o(\hat{g})$, $f\hat{f} = o(g\hat{g})$.
— *Si* $f \underset{a}{=} o(g)$ *et* $\hat{f} \underset{a}{=} o(g)$, $f + \hat{f} = o(g)$. *(Le même* g *!)*
— *Si* $f \underset{a}{=} o(g)$ *et* $\lambda \in \mathbb{R}$, $\lambda f \underset{a}{=} o(g)$.
— *Plus généralement si* $f \underset{a}{=} o(g)$ *et si* h *est une fonction bornée au voisinage de* a, $hf \underset{a}{=} o(g)$.

Exemple. $x^n \underset{0}{=} o(x^p) \iff n > p$ et $x^n \underset{\pm\infty}{=} o(x^p) \iff n < p$.

Exemple. $\ln x \underset{+\infty}{=} o(x)$ et $x \underset{+\infty}{=} o(\exp x)$.

Définition 1.3. On dit que f est *équivalente* à g au voisinage de a si

$$f \underset{a}{=} g\,(1 + o(1)),$$ [2]

et on écrit$f \underset{a}{\sim} g$, ou encore $f \sim g$ quand le point a n'est pas ambigu.

Remarque. Si de plus la fonction g ne s'annule pas au voisinage de a, $f \underset{a}{\sim} g$ si et seulement si

$$\frac{f(x)}{g(x)} \longrightarrow 1 \text{ lorsque } x \to a.$$

Proposition 1.4. *La relation "*$f \underset{a}{\sim} g$*" est une relation d'équivalence. i.e. induit une partition de l'ensemble des fonctions définies sur un voisinage de* a *(cf. le cours de première année), dont les éléments s'appellent les* classes d'équivalence.

Nous allons voir que l'on peut multiplier et diviser les équivalents.

Théorème 1.5. *Soient* f_1, f_2, g_1 *et* g_2 *quatre applications définies au voisinage de* a, *telles que* $f_1 \underset{a}{\sim} f_2$ *et* $g_1 \underset{a}{\sim} g_2$. *Alors*

1. $f_1 g_1 \underset{a}{\sim} f_2 g_2$
2. *si de plus* g_1 *et* g_2 *ne s'annulent pas au voisinage de* a, $f_1/g_1 \underset{a}{\sim} f_2/g_2$.

2. $1 + o(1)$ est ici en facteur de g, pas en argument.

Remarque. On ne peut pas additionner des équivalents en général ! Par exemple, si $f_1(x) = x$ et $f_2(x) = x + x^2$, tandis que $g_1(x) = -x + x^3$ et $g_2(x) = -x$, alors f_1 et f_2 sont équivalents en 0, de même que g_1 et g_2. Mais $(f_1 + g_1)(x) = x^3$ n'est pas équivalent en 0 à $(f_2 + g_2)(x) = x^2$.

De même, **on ne peut pas composer des équivalents**. Par exemple $f(x) = x$ est équivalent en $+\infty$ à $g(x) = x + \sqrt{x}$, mais $\exp(f(x)) = e^x$ n'est pas équivalente à $\exp(g(x)) = e^x e^{\sqrt{x}}$ (le rapport $\exp(f(x))/\exp(g(x))$ tend vers 0 lorsque x tend vers $+\infty$).

Les développements limités donnent des informations plus précises que de simples équivalents et pourront, eux, être additionnés et composés.

Remarque. Soient (u_n) et (v_n) deux suites réelles (qui jouent le rôle de f et g avec $A = \mathbb{N}$ ou un intervalle de la forme $[N, +\infty[\cap\mathbb{N}$). Le seul point d'accumulation de A est $a = +\infty$, donc pour les suites on omet généralement de préciser qu'on s'intéresse à leur comportement au voisinage de $+\infty$.

Les deux définitions précédentes deviennent :

1. $u_n = o(v_n)$ si (u_n) est de la forme $u_n = v_n\varepsilon_n$ où (ε_n) est une suite telle que $\lim \varepsilon_n = 0$.
2. $u_n \sim v_n$ si (u_n) est de la forme $u_n = v_n\eta_n$ où (η_n) est une suite telle que $\lim \eta_n = 0$.

La proposition suivante est immédiate.

Proposition 1.6 (Extraction de points)**.** *Soit $a \in \mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\}$ et f et g deux fonctions équivalentes lorsque $x \to a$. Soit (u_n) une suite numérique convergeant vers a. Alors*

$$f(u_n) \sim g(u_n).$$

Exemple. On sait que $\sin(x) \underset{0}{\sim} x$, et donc on déduit immédiatement que $\sin(1/n) \sim 1/n$.

Terminons avec un exemple légèrement moins direct.

Exercice 1.1. Trouver un équivalent de x en fonction de y au voisinage de $+\infty$, sachant que $y = x\,e^x$. *Réponse :* $x \sim_{+\infty} \ln y$.

1.2 Développements limités

Définition 1.7. Soit I un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$ et $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction. Si on se donne un point x_0 de I et un entier $n \geq 0$, on dit que f admet un développement limité (DL) d'ordre n en x_0 s'il existe un polynôme P de degré inférieur ou égal à n tel que

$$f(x) = P(x - x_0) + o\big((x - x_0)^n\big).$$

Le polynôme $P(x-x_0)$ s'appelle la *partie régulière* du DL, la partie $(x-x_0)^n\varepsilon(x)$ s'appelle *reste* du DL.

Autrement dit, une fonction $f : I \to \mathbb{R}$ admet un DL à l'ordre n au point x_0 si l'on peut trouver $n + 1$ réels $a_0, \dots a_n$ tels que

$$\forall x \in I,\ f(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k(x - x_0)^k + (x - x_0)^n\varepsilon(x),$$

où $\varepsilon(x)$ tend vers 0 lorsque x tend vers x_0.

Remarque. Notons que, si f admet un DL à l'ordre n en x_0, alors f admet un DL à l'ordre p pour tout entier $p \leq n$. En effet

$$\forall x \in I,\ f(x) = \sum_{k=0}^{p} a_k(x - x_0)^k + (x - x_0)^p \varepsilon_1(x)$$

où $\varepsilon_1(x) = \sum_{i=p+1}^{n}(x - x_0)^{i-p} + (x - x_0)^{n-p}\varepsilon(x)$ tend vers 0 lorsque x tend vers x_0. L'ordre d'un DL indique son degré de précision (et plus de précision réclame plus de calcul !)

Proposition 1.8 (Unicité du développement limité)**.** *Il existe au plus un développement limité au voisinage de x_0 d'ordre n d'une fonction donnée.*

Démonstration. Considérons deux développement limités de la fonctions f à l'ordre n en x_0 :

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k(x - x_0)^k + (x - x_0)^n \varepsilon_1(x) = \sum_{k=0}^{n} b_k(x - x_0)^k + (x - x_0)^n \varepsilon(x)$$

pour tout $x \in A$ voisin de a. Supposons par l'absurde que les polynômes $P(x - x_0) = \sum_{k=0}^{n} a_k(x - x_0)^k$ et $Q(x - x_0) = \sum_{k=0}^{n} b_k(x - x_0)^k$ ne soient pas égaux. Notons r le plus petit indice tel que $a_r \neq b_r$. Alors

$$0 = f(x) - f(x) = \sum_{i=r}^{n}(a_k - b_k)(x - x_0)^k + (x - x_0)^n(\varepsilon_1(x) - \varepsilon_2(x))$$

Divisons cette égalité par $(x - x_0)^r$ et faisons tendre x vers x_0 :

$$0 = \lim_{x \to x_0} \sum_{i=r}^{n}(a_k - b_k)(x - x_0)^{i-r} + (x - x_0)^{n-r}(\varepsilon_1(x) - \varepsilon_2(x)) = a_r - b_r\ .$$

Nous avons donc trouvé une contradiction avec la définition de r, et par conséquent, $P = Q$. $\square$

Une conséquence de l'unicité du DL est que les fonctions possédant certaines symétries ont une partie régulière possédant les mêmes symétries. Plus précisément :

Corollaire 1.9. *Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une application ayant un DL d'ordre N en 0, de partie régulière P. Alors :*

1. *Si f est paire, alors P est pair.*
2. *Si f est impaire, alors P est impair.*

Exemple. Vous rappelez-vous les développements limités de sinus et cosinus ?

Théorème 1.10 (de Taylor-Young)**.** *Soit f une application de classe $\mathcal{C}^n$ sur I. Alors f possède un développement limité d'ordre n en tout point x_0 de I, donné par :*

$$f(x) = f(x_0) + \frac{x - x_0}{1!}f'(x_0) + \frac{(x - x_0)^2}{2!}f''(x_0) + \cdots + \frac{(x - x_0)^n}{n!}f^{(n)}(x_0) + o\big((x - x_0)^n\big).$$

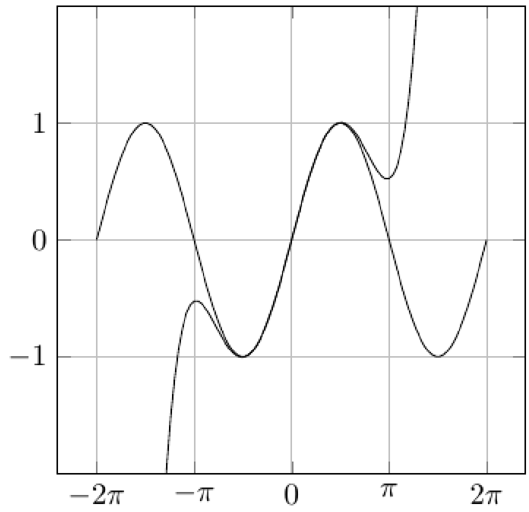

FIGURE 1.1 – La fonction sinus et son développement limité à l'ordre 5, en 0 : $x - x^3/6 + x^5/120$

Les DL de certaines fonctions usuelles sont donnés dans le tableau de la page 8. Ces DL sont des conséquences du théorème précédent. Est-il utile de préciser qu'ils sont à connaître (sauf si l'on connaît par coeur la dérivée seconde de la fonction tangente, etc.) ?

Remarquons encore que la formule de Taylor-Young est aussi souvent utilisée pour calculer des dérivées en un point ; le calcul est plus court en effet que de calculer les dérivées successives d'une fonction sur tout un voisinage, avant de se spécialiser au point voulu.

On s'intéresse maintenant aux opérations sur les développements limités, pour pouvoir calculer le développement limité de fonctions compliquées à partir du développement limité de fonctions plus simples.

La chose à laquelle il faut faire attention est l'ordre auxquel développer les fonctions intermédiaires, pour obtenir l'ordre voulu à la fin. Pour déterminer l'ordre avec lequel commencer, la méthode générale est simple : il faut imaginer qu'on commence avec un ordre supérieur, puis regarder si les termes qu'on a ajoutés influencent le résultat final (auquel cas ces termes sont nécessaires) ou non (auquel cas ces termes sont inutiles).

Exemple. Pour développer $\sin(x^2)$ à l'odre 7 en 0, il est inutile de développer $\sin y$ à l'ordre 7, ni même 6 : l'ordre 3 suffit. En effet, puisque $\sin y = y - y^3/6 + o(y^4)$, on a

$$\sin(x^2) = x^2 - \frac{x^6}{6} + o(x^8).$$

Exemple. Pour développer $\frac{\sin x}{x}$ à l'ordre 4, il faut développer le sinus à l'ordre 5 :

$$\frac{\sin x}{x} = \frac{1}{x}(x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + o(x^6)) = 1 - \frac{x^2}{6} + \frac{x^4}{120} + o(x^5).$$

Ces deux exemples montrent que certaines parties du calcul doivent donc être faites à un ordre plus bas, ou plus élevé, que l'ordre voulu pour le résultat final. Ci-dessous, on rappelle les bases de ce genre de calcul. Mais, seule la pratique permet de facilement savoir conduire ce genre de calcul.

Proposition 1.11 (Somme et produit de DL)**.** *Soient $f : I \to \mathbb{R}$ et $g : I \to \mathbb{R}$ deux fonctions admettant un DL d'ordre n en un point x_0, de partie régulière P et Q respectivement. Alors :*

- *la fonction $f + g$ admet un DL à l'ordre n en x_0 de partie régulière $P + Q$,*
- *la fonction fg admet un DL à l'ordre n en x_0 de partie régulière $\sum_{k=0}^{n} c_k(x-x_0)^k$, où $c_0, \dots, c_{2n}$ sont les coefficients du polynôme PQ.*

Remarque. Notez bien que le produit de deux DL d'ordre n **ne donne pas un DL d'ordre** $2n$, bien que le produit PQ soit de degré $2n$.

Conséquence. Comme dit plus haut, on ne peut pas additionner les équivalents. Mais on peut additionner les DL. Donc **lorsque l'envie vient d'additionner des équivalents**, il convient d'une part de s'en abstenir et d'autre part de passer à l'écriture avec des $o()$, de faire la somme, et de garder le $o()$ le moins précis (le plus grand.) Et d'ailleurs certains autres termes apparaissant dans la somme peuvent intégrer le o. Il se peut que la partie principale du DL s'annule, auquel cas la fonction est négligeable devant une autre, mais cela ne signifie généralement pas, on s'en souvient, que la fonction obtenue est équivalente à 0.

Par exemple, en zéro, on sait que $\sin(x) = x - \frac{x^3}{6} + o(x^3)$ et $\ln(1-x) = -x - \frac{x^2}{2} + o(x^2)$. Il suit que $\sin(x) + \ln(1-x) = -\frac{x^3}{6} + o(x^3) - \frac{x^2}{2} + o(x^2)$. On a $x^3 = o(x^2)$, et le $o(x^3)$ peut rejoindre le $o(x^2)$ (puisque ce dernier est nettement moins précis—il suffit d'utiliser la Proposition 1.2). Donc $\sin(x) + \ln(1-x) = -\frac{x^2}{2} + o(x^2)$. Finalement $\sin(x) + \ln(1-x) \sim -\frac{x^2}{2}$. Qu'aurions-nous obtenu en additionnant $\sin(x) \sim x$ et $\ln(1-x) \sim -x$?

Proposition 1.12 (Rapport de DL)**.** *Soient $f : I \to \mathbb{R}$ et $g : I \to \mathbb{R}$ deux fonctions admettant un DL d'ordre n en un point x_0, de partie régulière P et Q respectivement. On suppose que $g(x_0) \neq 0$. Alors la fonction $\frac{f}{g}$ admet un DL à l'ordre n en x_0 dont la partie régulière est $\sum_{k=0}^{n} c_k(x-x_0)^k$, où $c_0, \dots, c_n$ sont les coefficients du quotient suivant les puissances croissantes du polynôme P par le polynôme Q à l'ordre n.*

Rappel. Rappelons que, pour deux polynômes P et Q, avec $Q(0) \neq 0$, et pour tout entier $n \geq 1$, il existe un unique couple de polynômes (R, S), tel que $S = 0$ ou $deg(S) \leq n$ et $P = QS + X^{n+1}R$. Les polynômes S et R s'appellent respectivement le quotient et le reste de la division suivant les puissances croissantes de P par Q à l'ordre n.

Proposition 1.13 (Composition de DL)**.** *Soient I et J deux intervalles ouverts de $\mathbb{R}$. Soient $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction admettant un DL d'ordre n en un point $x_0 \in I$, de partie régulière P, avec $y_0 = f(x_0) \in J$ et $g : J \to \mathbb{R}$ une fonction admettant un DL d'ordre n en $y_0 = f(x_0)$, de partie régulière Q donnée par $Q(y - y_0) = \sum_{k=0}^{n} b_k(y-y_0)^k$.*

Alors $g \circ f$ admet un DL en x_0 d'ordre n, dont la partie régulière est la somme des termes de degré $\leq n$ du polynôme $b_0 + b_1(P(x-x_0) - y_0) + \cdots + b_n(P(x-x_0) - y_0)^n$.

Remarque. Il est **très important** de garder en tête que si l'on veut un DL à l'ordre n de $g \circ f$, il faut partir de **DL à l'ordre n pour f et pour g !**

Proposition 1.14 (Primitive de DL)**.** *Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction admettant un DL d'ordre n en un point x_0 de partie régulière donnée par $P(x-x_0) = \sum_{k=0}^{n} a_k(x-x_0)^k$. Si F est une primitive de f, alors F admet un DL en x_0 à l'ordre $n+1$, de partie régulière donnée par*

$$Q(x - x_0) = F(x_0) + \sum_{k=0}^{n} \frac{a_k}{k+1}(x-x_0)^{k+1} .$$

Remarque. Notons que Q est rien d'autre que la primitive de P qui vaut $F(x_0)$ en 0.

Application des développements limités à la recherche d'équivalents. Expliquons maintenant comment les DL peuvent être utilisés pour trouver des équivalents :

Proposition 1.15. *Soient I un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$, $x_0 \in I$ et $f : I \to \mathbb{R}$ une application. On suppose que f possède un DL d'ordre $N \geq 0$ au voisinage de x_0. Soit $P(x-x_0) = a_0 + a_1(x-x_0) + \dots a_N(x-x_0)^N$ la partie régulière de DL. Alors f est équivalent en x_0 à $a_k(x-x_0)^k$, où k est le plus petit indice tel que $a_k \neq 0$ (à supposer que ce k existe).*

Exemple. Comme $1 - \cos(x) = \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{4!} + o(x^5)$ (d'après le DL de cos à l'ordre 5 en 0), $1 - \cos(x)$ est équivalent à $\frac{x^2}{2}$ en 0.

Nous finissons ce chapitre par un rappel de quelques DL classiques qui sont à connaître. [3]

3. Rappelons que les documents sont interdits à l'examen...

$e^x = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} + o(x^n)$
$\frac{1}{1+x} = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k x^k + o(x^n)$
$\log(1+x) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{x^{k+1}}{k+1} + o(x^{n+1})$
$\cos(x) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} + o(x^{2n+1})$
$\sin(x) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} + o(x^{2n+2})$
$(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \alpha(\alpha-1)\frac{x^2}{2} + o(x^2), \quad \alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0,1\}$
$\tan(x) = x + \frac{x^3}{3} + o(x^4)$

Table 1.1 – Quelques développements limités usuels en 0

Chapitre 2

Suites de Cauchy

Parmi toutes les équations que l'on aimerait résoudre, il est rarissime qu'on sache trouver une solution d'une équation, qui soit donnée par une formule "explicite". [1] Généralement, on essaye alors de chercher une suite de solutions approchées qui converge vers une solution. Mais comment montrer que la suite converge si on ne connaît justement pas sa limite a priori ?

Deux résultats vus en première année répondre à cette question dans certaines situations. Ils peuvent être considérés comme des conséquences de la propriété de la borne supérieure ou du théorème des segments emboîtés (voir le Chapitre 7).

Théorème 2.1. *Toute suite réelle croissante et majorée converge dans* $\mathbb{R}$*.*

Théorème 2.2 (Bolzano-Weierstrass)**.** *Toute suite réelle bornée possède une sous-suite qui converge dans* $\mathbb{R}$*.*

Ce court chapitre introduit une autre propriété, géniale, qui permet de montrer qu'une suite converge (dans des conditions plutôt plus générales que les deux théorèmes précédents) : c'est la notion de suite de Cauchy.

Définition 2.3. On dit qu'une suite (x_n) est *de Cauchy* si

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists n_0,\ \forall n \geq n_0,\ \forall p \geq 0,\ |x_{n+p} - x_n| \leq \varepsilon\ .$$

C'est dire que les termes de la suite sont proches les uns des autres lorsque n est grand.

Proposition 2.4. *Toute suite qui admet une limite finie est de Cauchy.*

Démonstration. Soit (x_n) une suite qui admet une limite finie l. Alors

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists n_0,\ \forall n \geq n_0,\ |x_n - l| \leq \frac{\varepsilon}{2}\ .$$

On a donc que, pour le même $n_0, \forall n \geq n_0$,

$$\forall p \geq 0,\ |x_{n+p} - x_n| \leq |x_{n+p} - l| + |l - x_n| \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon\ .$$

□

1. Parfois, une telle formule n'existe même pas, sans parler de la trouver. La théorie de Galois, par exemple, montre que les racines d'un polynôme de degré supérieur à 5 ne sont pas, sauf cas exceptionnel, des fonctions simples des coefficients du polynôme. Pour des équations non polynomiales, la situation ne fait qu'empirer.

Proposition 2.5. *Toute suite de Cauchy est bornée.*

Démonstration. Soit (x_n) une suite de Cauchy. Alors

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists n_0,\ \forall n \geq n_0,\ \forall p \geq 0,\ |x_{n+p} - x_n| \leq \varepsilon\ .$$

En particulier pour $\varepsilon = 1$

$$\exists n_0,\ \forall p \geq 0,\ |x_{n_0+p} - x_{n_0}| \leq 1\ .$$

Donc, à partir du rang n_0, les termes de la suite appartiennent à une boule de rayon 1 et centre x_{n_0}. Par conséquent, la suite (x_n) est bornée vu que les termes $x_0, \dots x_{n_0-1}$ sont en nombre fini. □

Le résultat clef suivant est une conséquence du Théorème 2.2.

Théorème 2.6. *Toute suite de Cauchy réelle converge ; on dit que* $\mathbb{R}$ *est* complet*.*

Démonstration. Soit (x_n) une suite de Cauchy dans $\mathbb{R}$. Grace à la Proposition 2.5, elle est bornée et grace aux Théorème 2.2 elle possède une sous-suite qui converge. Soit ϕ la fonction strictement croissante de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$ qui identifie la sous-suite convergente $(x_{\phi(n)})$ et soit $l \in \mathbb{R}$ sa limite.

Alors $\forall \varepsilon > 0$,

$$\exists n_0,\ \forall n \geq n_0,\ |x_{\phi(n)} - l| \leq \frac{\varepsilon}{2}\ ,$$

et

$$\exists n_1,\ \forall n \geq n_1,\ \forall p \geq 0,\ |x_{n+p} - x_n| \leq \frac{\varepsilon}{2}\ .$$

Or, $\forall n \geq \max\{n_0, n_1\}$, vu que $\phi(n) \geq n, \forall n \in \mathbb{N}$ car ϕ est strictement croissante,

$$|x_n - l| \leq |x_n - x_{\phi(n)}| + |x_{\phi(n)} - l| \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon\ ,$$

et donc (x_n) converge. □

Remarque. Le corps des rationnels $\mathbb{Q}$ n'est pas complet. Autrement dit, il existe des suites de Cauchy dans $\mathbb{Q}$ qui ne sont pas convergentes. Par exemple, n'importe quelle suite de rationnels qui converge vers un irrationnel est de Cauchy (parce qu'elle admet une limite finie dans $\mathbb{R}$) mais elle ne converge pas dans $\mathbb{Q}$, car la limite ne lui appartient pas.

Chapitre 3

Séries numériques

Dans cette partie on s'intéresse aux séries numériques, c'est-à-dire aux suites de la forme $(\sum_{k=0}^{n} x_k)$, où (x_k) est elle-même une suite numérique. [1] (Un analogue que nous n'étudierons pas spécialement est donné par les produits infinis $(\prod_{k=0}^{n} x_k)$, que l'on ramène en fait aux séries en prenant le logarithme.)

Nous limiterons les énoncés au cas des séries de terme général réel (i.e., $x_n \in \mathbb{R}$ pour tout n). Cependant les séries de terme général complexe ($x_n \in \mathbb{C}$ pour tout n) se traitent exactement de la même façon, à condition de remplacer la valeur absolue par le module.

3.1 Vocabulaire et propriétés fondamentales

Définition 3.1. On appelle série numérique $\sum x_n$ une suite dont le terme général S_n est de la forme

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} x_k \qquad \forall n \in \mathbb{N}$$

où (x_n) est une suite numérique, i.e., une suite à termes réels.

Vocabulaire. La suite (x_n) s'appelle le **terme général** de la série, et la suite (S_n) s'appelle la suite des **sommes partielles**.

Toute suite $(S_n)_{n\geq 0}$ peut être vue comme la série $\sum(S_n - S_{n-1})$ (en convenant de poser $S_{-1} = 0$). Réciproquement, à toute série $\sum x_n$ correspond la suite (S_n) de ses sommes partielles. Donc les deux notions de suite et de série sont équivalentes. Les séries sont simplement une facçon de décrire la suite (S_n) via le terme général $x_n = S_n - S_{n-1}$.

Remarque. Il arrive que la suite (x_n) ne soit définie qu'à partir d'un certain rang n_0. Dans ce cas, on étudie les sommes partielles sont définies par

$$S_n = x_{n_0} + x_{n_0+1} + \cdots + x_n = \sum_{k=n_0}^{n} x_k \qquad \forall n \geq n_0 \ .$$

Par exemple, pour la série de terme général $x_n = 1/n$, on considère la suite des sommes partielles (S_n) définie par

$$S_n = 1 + 1/2 + 1/3 + \cdots + 1/n \qquad \forall n \geq 1.$$

1. Dans le contexte des suites, “numérique” signifie : à valeurs dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

Pour simplifier la présentation, on supposera dans tous les énoncés que le terme général de la série est défini pour tout $n \geq 0$, tous les résultats pouvant être adaptés de façon immédiate au cas général.

Définition 3.2. On dit que la série de terme général x_n *converge* si la suite des sommes partielles (S_n) admet une limite réelle. Dans ce cas, on appelle *somme de la série de terme général* x_n la limite de la suite (S_n), et la note $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} x_k$:

$$\sum_{k=0}^{\infty} x_k = \lim_{n \to +\infty} S_n.$$

Si la série de terme général ne converge pas (dans $\mathbb{R}$), on dit qu'elle *diverge.*

Exemple. Si $x_n = a^n$ avec $a \neq 1$, alors on montre par récurrence que la somme des n premiers termes d'une suite géométrique est donnée par

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} a^k = \frac{1 - a^{n+1}}{1 - a}.$$

Par conséquent la série de terme général a^n converge si et seulement si la suite (S_n) de terme général $S_n = (1 - a^{n+1})/(1 - a)$ possède une limite réelle, i.e., si et seulement si $|a| < 1$. Dans ce cas

$$\sum_{k=0}^{\infty} a^k = \lim_{n \to +\infty} \frac{1 - a^{n+1}}{1 - a} = \frac{1}{1 - a}.$$

On note que si $a > 1$, alors $\lim_{n \to +\infty} S_n = +\infty$, tandis que si $a \leq -1$, S_n ne possède pas de limite. Enfin, dans le cas où $a = 1$, on a $S_n = n + 1$ et donc $\lim_{n \to +\infty} S_n = +\infty$: la série de terme général $x_n = 1$ ne converge donc pas.

Commençons par quelques propriétés simples.

Proposition 3.3. *Si la série $\sum x_n$ converge, la suite (x_n) converge vers 0.*

(De façon équivalente : Si la suite (x_n) ne tend pas vers 0, la série $\sum x_n$ diverge.)

Démonstration. Nous observons pour commencer que la seconde assertion de l'énoncé est la contraposée de la première. Montrons donc cette première assertion. Soit (S_n) la suite des sommes partielles de la série. Comme la série converge, la suite (S_n) possède une limite finie, et est donc de Cauchy :

$$\forall \varepsilon > 0, \ \exists n_0 \text{ tel que } \forall n \geq n_0, \ \forall p \geq 0, \ |S_{n+p} - S_n| \leq \varepsilon \ .$$

En particulier, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un rang n_0 tel que, pour tout $n \geq n_0$ et pour $p = 1$,

$$|x_{n+1}| = |S_{n+1} - S_n| \leq \varepsilon \ .$$

Donc (x_n) tend vers 0. □

Remarque. Supposons que (x_n) tend vers 0. Alors il n'est pas complètement évident qu'il existe des cas où $\sum x_n$ converge, ni non plus qu'il existe des cas où $\sum x_n$ diverge.

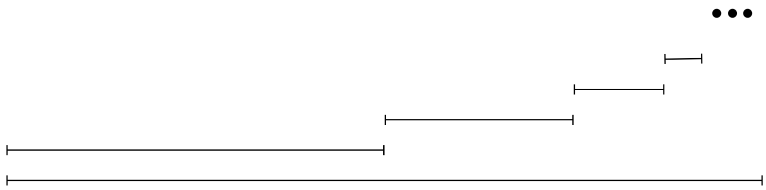

FIGURE 3.1 – En subdivisant la longueur unité en deux parties égales, puis la seconde partie en deux sous-parties égales, etc. à l'infini, on obtient une suite de segments dont la somme des longeurs > 0 converge et vaut 1 : $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} = 1$ (voir l'exemple précédent).

L'exemple de la figure 3.1 rend évident qu'il existe des séries convergentes (et dont le terme général tend forcément vers 0, d'après la proposition).

L'exemple de la *série harmonique* $\sum 1/n$ montre (voir plus loin) qu'il existe des séries dont le terme tend vers 0 et qui divergent (parce que le terme général ne tend pas vers 0 assez vite).

Remarque (Linéarité)**.** Si $\sum x_n$ et $\sum y_n$ convergent, et si λ et μ sont deux nombres réels, alors la série de terme général $\lambda x_n + \mu y_n$ converge et sa somme vaut

$$\sum_{n=0}^{\infty}(\lambda x_n + \mu y_n) = \lambda \sum_{n=0}^{\infty} x_n + \mu \sum_{n=0}^{\infty} y_n .$$

Ceci découle directement de la linéarité de la limite.

Une des questions majeures lorsque l'on étudie une série réelle est de savoir si celle-ci converge ou non. En effet, le calcul exact de la limite est la plupart du temps difficile, voire impossible. Pour savoir si une série converge ou non, on utilise des "critères de convergence", i.e., des règles simples permettant de décider si la série converge, ou non.

Avant d'établir ces règles, il nous faut mieux comprendre le problème. Montrons d'abord que la question de la convergence d'une série ne dépend que de comportement à l'infini (c'est-à-dire pour "n grand") :

Proposition 3.4. *On considère deux séries, de terme général x_n et y_n respectivement. On suppose que les suites (x_n) et (y_n) coïncident "pour tout n assez grand" : autrement dit, on suppose qu'il existe $n_0 \geq 0$ tel que, pour tout $n \geq n_0$, $x_n = y_n$. Alors la série de terme général x_n converge si et seulement si la série de terme général y_n converge.*

Démonstration. Notons la suite des sommes partielles de (x_n) par (S_n) et celle de (y_n) par (S'_n). Pour tout $n \geq n_0$, on a :

$$S'_n = S_n + \sum_{k=0}^{n_0-1} y_k - \sum_{k=0}^{n_0-1} x_k,$$

et donc les suites (S_n) et (S'_n) ne diffèrent que de la constante $\sum_{k=0}^{n_0-1} y_k - \sum_{k=0}^{n_0-1} x_k$ pour $n \geq n_0$. Par conséquent, si la suite (S_n) a une limite finie, alors (S'_n) aussi, et si (S_n) n'a pas de limite, alors (S'_n) non plus.

En cas de convergence, on a bien sûr

$$\sum_{k=0}^{\infty} y_k = \sum_{k=0}^{\infty} x_k + \sum_{k=0}^{n_0-1} y_k - \sum_{k=0}^{n_0-1} x_k.$$

En particulier, comme $\sum_{k=0}^{n_0-1} y_k - \sum_{k=0}^{n_0-1} x_k$ n'est pas forcément nul, les sommes des séries ne sont en général pas égales. $\square$

Définition 3.5. Lorsque la série $\sum_{k=0}^{\infty} x_k$ converge, on appelle reste de la série la suite (R_n) définie par

$$R_n = \sum_{k=n+1}^{\infty} x_k \qquad \forall n \in \mathbb{N}.$$

On notera que la suite (R_n) tend vers 0. En effet, si on pose $\ell = \sum_{k=0}^{\infty} x_k$, alors, d'après la linéarité des sommes des séries entières,

$$\ell - R_n = \sum_{k=0}^{n} x_k \to \ell \qquad \text{quand } n \to +\infty.$$

Le premier critère de convergence, décrit ici, est fondamental. Il repose sur la définition suivante.

Définition 3.6. On dit que la série de terme général x_n est *absolument convergente* lorsque la série de terme général $|x_n|$ converge.

Théorème 3.7. *Une série absolument convergente est convergente. Autrement dit, si la série de terme général $|x_n|$ converge, alors la série de terme général x_n converge aussi.*

Remarque. Attention ! La réciproque est fausse en général... Nous verrons par exemple que la série de terme général $(-1)^n/n$ est convergente, mais pas absolument convergente.

Démonstration. Soit (S_n) la suite des sommes partielles de la série de terme général x_n et (Σ_n) celle de terme général $|x_n|$. Comme la série de terme général $|x_n|$ converge, la suite (Σ_n) est de Cauchy :

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists n_0 \text{ tel que } \forall n \geq n_0,\ \forall p \geq 0,\ |\Sigma_{n+p} - \Sigma_n| \leq \varepsilon\ . \tag{3.1}$$

Notons que

$$\Sigma_{n+p} - \Sigma_n = \sum_{k=n+1}^{n+p} |x_k| \qquad \text{et que} \qquad S_{n+p} - S_n = \sum_{k=n+1}^{n+p} x_k$$

Comme $\mathbb{R}$ est complet, pour montrer la convergence de la série de terme général x_n (i.e., que la suite (S_n) a une limite finie), il suffit de montrer que la suite (S_n) est de Cauchy. Pour cela, fixons $\varepsilon > 0$ et choisissons n_0 comme dans (3.1). On a alors, pour tout $n \geq n_0$ et pour tout $p \geq 0$,

$$|S_{n+p} - S_n| = \left| \sum_{k=n+1}^{n+p} x_k \right| \leq \sum_{k=n+1}^{n+p} |x_k| = \Sigma_{n+p} - \Sigma_n \leq \varepsilon\ ,$$

où la seconde inégalité vient de l'inégalité triangulaire, et la dernière de (3.1). Par conséquent nous avons montré que la suite (S_n) est de Cauchy, ce qui implique qu'elle converge dans $\mathbb{R}$, et donc que la série de terme général x_n converge. $\square$

Le théorème précédent explique l'importance des séries à terme général positif, dont l'étude fait l'objet du paragraphe suivant. En effet, pour une série dont le terme général x_n change de signe, on étudie d'abord la série de terme général $|x_n|$: si cette série converge, alors on est assuré de la convergence de la série de terme général x_n converge. *Bien noter cependant que, si la série de terme général $|x_n|$ diverge, on ne sait rien sur la série initiale.*

3.2 Séries à terme général positif

Commençons d'abord par une remarque évidente, mais fondamentale.

Proposition 3.8. *Si le terme général de la série est positif, alors la suite des sommes partielles est positive et croissante.*

En particulier, il n'y a que deux cas possibles :
- *Cas 1 : la suite* (S_n) *est majorée. Dans ce cas,* (S_n) *est une suite croissante et majorée et donc admet une limite finie : la série converge.*
- *Cas 2 : la suite* (S_n) *n'est pas majorée. Dans ce cas, elle tend vers* $+\infty$*, et la série diverge.*

Démonstration. Supposons que $x_n \geq 0$ pour tout n. Alors $S_n = x_0 + x_1 + \cdots + x_n$ est une somme de réels positifs, et est donc positif. De plus,

$$S_{n+1} - S_n = x_{n+1} \geq 0 \qquad \forall n \geq 0$$

La suite (S_n) est donc croissante. □

Un exemple fondamental est le suivant. Il jouera un rôle particulier par la suite.

Exemple. Séries de terme général $1/n^\alpha$**, pour** $\alpha \in \mathbb{R}$**.** La convergence de la série de terme général $1/n^\alpha$ dépend du paramètre $\alpha \in \mathbb{R}$, ainsi que décrit dans la proposition suivante.

Proposition 3.9. *La série de terme général* $1/n^\alpha$ *converge si et seulement si* $\alpha > 1$.

Démonstration. **1.** Notons pour commencer que si $\alpha \leq 0$, alors la suite $(1/n^\alpha)$ ne tend pas vers 0, et donc que la série ne converge pas.

Pour traiter le cas $\alpha > 0$, nous comparons les sommes partielles de la série avec une intégrale que l'on sait calculer.

2. Supposons que $\alpha > 1$. Pour montrer que la série converge, il suffit de montrer que la suite des sommes partielles (S_n) est majorée. Notons que, comme la fonction $x \mapsto 1/x^\alpha$ est décroissante, on a

$$\frac{1}{k^\alpha} \leq \frac{1}{x^\alpha} \qquad \forall x \in [k-1, k],\ \forall k \geq 2\ .$$

Pour $k \geq 2$, intégrons l'inégalité ci-dessus entre $k-1$ et k (intervalle de longueur 1) :

$$\frac{1}{k^\alpha} \leq \int_{k-1}^{k} \frac{dx}{x^\alpha}.$$

Sommons l'inégalité ainsi obtenue pour k allant de 2 à n :

$$\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k^\alpha} \leq \int_{1}^{n} \frac{dx}{x^\alpha}.$$

Par conséquent, pour tout $n \geq 2$, on a (en n'oubliant pas que $1-\alpha < 0$) :

$$S_n = 1 + \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k^\alpha} \leq 1 + \int_{1}^{n} \frac{dx}{x^\alpha} = 1 + \left[\frac{x^{1-\alpha}}{1-\alpha}\right]_1^n = 1 + \frac{n^{1-\alpha} - 1}{1-\alpha} \leq 1 + \frac{1}{\alpha - 1}.$$

Donc la suite (S_n) est majorée, ce qui montre que la série de terme général $1/n^\alpha$ converge.

3. On suppose maintenant que $\alpha = 1$. Nous allons montrer que la suite des sommes partielles (S_n) de la série de terme général $1/n$ tend vers $+\infty$. Pour cela, nous cherchons à minorer S_n. Comme la fonction $x \mapsto 1/x$ est décroissante, on a

$$\frac{1}{k} \geq \frac{1}{x} \qquad \forall x \in [k, k+1],\ \forall k \geq 1\ .$$

Pour $k \geq 1$, on intègre l'inégalité ci-dessus entre k et $k+1$ (intervalle de longueur 1) :

$$\frac{1}{k} \geq \int_k^{k+1} \frac{dx}{x}\ ,$$

puis on somme l'inégalité ainsi obtenue pour k allant de 1 à n :

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \geq \int_1^{n+1} \frac{dx}{x} = \ln(n+1).$$

Comme la suite $(\ln(n+1))$ tend vers $+\infty$ lorsque $n \to +\infty$, la suite (S_n) aussi. Donc la série de terme général $1/n$ diverge.

4. Pour finir, considérons le cas $\alpha \in]0,1[$. On fait exactement les mêmes calculs que dans le cas $\alpha = 1$, en remplaçant la fonction $x \mapsto 1/x$ par la fonction $x \mapsto 1/x^\alpha$, pour obtenir l'inégalité

$$S_n \geq \int_1^{n+1} \frac{dx}{x^\alpha} = \frac{(n+1)^{1-\alpha} - 1}{1-\alpha} \to +\infty \text{ quand } n \to +\infty\ .$$

□

Voici les critères simples de convergence qui doivent être connus, et qui sont développés dans la suite :
- critère de comparaison pour les séries à termes positifs
- critère d'équivalence pour les séries à termes positifs
- critères de Cauchy et de D'Alembert
- critère en n^α.

Proposition 3.10 (Critère de comparaison pour les séries à termes positifs)**.** *Soient deux séries de terme général positif (x_n) et (y_n). On suppose qu'il existe un rang n_0 tel que*

$$\forall n \geq n_0, \qquad x_n \leq y_n\ .$$

Alors :
- *Si la série de terme général y_n converge, alors la série de terme général x_n converge aussi.*
- *Si la série de terme général x_n diverge, alors la série de terme général y_n diverge aussi.*

Remarque. Attention : ce critère n'est valable que pour les séries à terme général positif. Si par exemple $x_n \leq 0$ et $\sum x_n$ diverge, cela n'implique bien sûr pas que $\sum y_n$ diverge (par exemple $\sum 0$ converge, trivialement).

Exemple. En pratique, on se sert du critère de la façon suivante : étant donnée une série de terme général positif x_n, on cherche une série de terme général positif y_n "simple" telle que y_n majore (ou minore) x_n pour tout n. Par exemple, si $x_n = |\sin(n)|/2^n$, on note que $0 \leq x_n \leq (1/2)^n$. Comme la série de terme général $y_n = (1/2)^n$ converge, on déduit du critère de comparaison que la série de terme général x_n converge aussi.

Démonstration du critère de comparaison pour les séries à termes positifs. Du fait de la Proposition 3.4 on peut supposer sans perte de généralité que $n_0 = 0$. Soit (S_n) la suite des sommes partielles de (x_n) et (Σ_n) celle de (y_n). Par hypothèse $x_n \leq y_n$ pour tout n, et donc on a $S_n \leq \Sigma_n$ pour tout n.

Supposons d'abord que la série de terme général y_n converge. Alors on a

$$S_n \leq \Sigma_n \leq \sum_{k=0}^{\infty} y_k \qquad \forall n \geq 0 \; .$$

Donc la suite (S_n) qui est croissante, est également bornée. Par conséquent elle possède une limite réelle, ce qui prouve la série de terme général x_n converge.

Supposons maintenant que la série de terme général x_n diverge. Alors on a

$$S_n \leq \Sigma_n$$

avec $S_n \to +\infty$. Donc $\Sigma_n \to +\infty$, ce qui prouve que la série de terme général y_n diverge. □

Exemple. La série $\sum \frac{1}{n^2+n+1}$ converge parce que, pour tout n,

$$\frac{1}{n^2+n+1} \leq \frac{1}{n^2}$$

et que $\sum 1/n^2$ converge.

Proposition 3.11 (Critère d'équivalence pour les séries à termes positifs)**.** *Soient deux séries de terme général positif x_n et y_n. On suppose que les suites (x_n) et (y_n) sont équivalentes. Alors la série de terme général x_n converge si et seulement si la série de terme général y_n converge.*

Démonstration. D'après l'hypothèse, $x_n = y_n(1 + o(1))$. Il existe un rang N à partir duquel, par exemple, $|o(1)| \leq 1/2$. Pour tout $n \geq N$,

$$\frac{y_n}{2} \leq x_n \omega \frac{2y_n}{2}.$$

La minoration montre que, si $\sum y_n$ diverge (et donc $\sum y_n/2$ diverge aussi), il en est de même de $\sum x_n$. La majoration montre, elle, que, si $\sum y_n$ converge (et donc $\sum 3y_n/2$ converge aussi), il en est de même de $\sum x_n$. □

Remarque. On notera que ce critère d'équivalence donne un "si et seulement si", à la différence du critère de comparaison précédent.

Exemple. $\sum \frac{1}{n^2-2n+2}$ converge parce que

$$\frac{1}{n^2-2n+2} \sim \frac{1}{n^2}$$

et que $\sum 1/n^2$ converge. (À cause du signe négatif, l'équivalence ci-dessus n'est pas une majoration.)

Les critères qui suivent sont également classiques et à connaître.

Proposition 3.12 (Critère de Cauchy). *On considère une série de terme général x_n strictement positif. Si la suite $((x_n)^{\frac{1}{n}})$ possède une limite $0 \leq \ell \leq \infty$, alors :*
— *si $\ell < 1$, la série de terme général x_n converge,*
— *si $\ell > 1$, la série de terme général x_n diverge.*

Proposition 3.13 (Critère de D'Alembert). *On considère une série de terme général x_n strictement positif. Si la suite (x_{n+1}/x_n) possède une limite $0 \leq \ell \leq \infty$, alors :*
— *si $\ell < 1$, la série de terme général x_n converge,*
— *si $\ell > 1$, la série de terme général x_n diverge.*

Remarque. Et si $\ell = 1$? Dans ce cas, on ne sait pas conclure (que ce soit pour le critère de Cauchy ou celui de D'Alembert), sauf à ajouter d'autres hypothèses...

Exercice 3.1. Soit $\sum x_n$ une série à termes > 0. Supposons qu'il existe $s \in \mathbb{R}$ tel que

$$\frac{x_{n+1}}{x_n} = 1 - \frac{s}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right),$$

où $O\left(\frac{1}{n^2}\right)$ désigne une suite $o(1/n)$ telle que

$$\left|O\left(\frac{1}{n^2}\right)\right| \leq \frac{C}{n^2}$$

pour un certain $C \in \mathbb{R}$. Montrer que $\sum x_n$ converge si et seulement si $s > 1$.

Proposition 3.14 (Critère en n^α). *On considère une série de terme général x_n positif. Alors :*
— *s'il existe un réel $\alpha > 1$ tel que la suite $n^\alpha x_n$ possède une limite réelle finie, alors la série de terme général x_n converge,*
— *s'il existe un réel $\alpha \leq 1$ tel que la suite $n^\alpha x_n$ tend vers $+\infty$, alors la série de terme général x_n diverge.*

Remarque. Les critères d'équivalence, de Cauchy et de D'Alembert ne sont valables que pour des séries à terme général positif (fabriquer un contre-exemple dans le cas du critère d'équivalence !). Il est facile de comprendre que le critère en n^α, lui, s'applique également aux séries dont le terme général change de signe.

Exemple. On se sert en pratique de ces critères de la façon suivante :

• on utilise le critère d'équivalence lorsque l'on dispose d'équivalents simples des expressions composant le terme général de la série. Par exemple, si $x_n = \sin(1/n)/(1+n)$ alors $\sin(1/n) \sim 1/n$ tandis que $1 + n \sim n$. Donc $x_n \sim (1/n)/n = 1/n^2$ où $y_n = 1/n^2$ est le terme général d'une série convergente. On n'omettra pas, bien entendu, de justifier la positivité du terme général ! Ici, on remarque que l'on a toujours $\sin(1/n) \geq 0$, car pour n dans $\mathbb{N}^*$ on a $1/n \in]0, 1] \subset [0, \pi]\ldots$

• on utilise le critère de Cauchy lorsque l'expression composant le terme général x_n fait apparaître des puissances $n-$ièmes : par exemple, $x_n = (n/(1 + 2n))^n$. Alors $x_n^{1/n} = n/(1 + 2n)$, qui tend vers $1/2 < 1$ lorsque $n \to +\infty$.

• on utilise le critère de D'Alembert lorsque le calcul du rapport x_{n+1}/x_n est particulièrement simple : par exemple, $x_n = 2^n/n!$. Alors $x_{n+1}/x_n = 2/(n + 1)$ qui tend vers 0 lorsque $n \to +\infty$, ce qui prouve que la série converge.

• enfin, on utilise le critère en n^α lorsque l'expression $n^\alpha x_n$ met en jeu des puissances comparées : par exemple, si $x_n = \ln(n)/n^2$, alors en choisissant $\alpha = 3/2 > 1$, on a

$x_n n^\alpha = \ln(n)/n^{1/2}$. Par puissances comparées, cette suite tend vers 0 lorsque $n \to +\infty$. Donc la série converge.

La démonstration de ces assertions se fait toujours de la même façon : on montre que la suite (a_n) peut être comparée à une suite simple dont on connaît le comportement de la série associée. À titre d'exemple nous donnons une démonstration du critère de Cauchy.

Démonstration de la Proposition 3.12. Supposons d'abord que $(x_n)^{\frac{1}{n}} \to \ell$ avec $\ell < 1$. Alors il existe un rang n_0 tel que

$$\forall n \geq n_0, \qquad \left|(x_n)^{\frac{1}{n}} - \ell\right| \leq (1-\ell)/2.$$

On en déduit que, pour tout $n \geq n_0$,

$$(x_n)^{\frac{1}{n}} \leq (1+\ell)/2\ ,$$

et donc que

$$x_n \leq ((1+\ell)/2)^n\ .$$

Comme $\ell < 1$, $(1+\ell)/2 < 1$, et donc la série de terme général $((1+\ell)/2)^n$ converge. On déduit du critère de comparaison que la série à terme général positif x_n converge aussi.

Si l'on suppose maintenant que $\ell > 1$, alors il existe un rang n_0 tel que

$$\forall n \geq n_0, \qquad (x_n)^{\frac{1}{n}} \geq 1$$

et donc que

$$x_n \geq 1\ .$$

Alors (x_n) ne tend pas vers 0 et la série diverge. □

3.3 Séries semi-convergentes

Nous revenons maintenant au cas des séries dont le terme général x_n peut changer de signe. Dans ce cas, nous avons vu au début du cours que si la série de terme général x_n est absolument convergente, alors elle est convergente. Cela laisse la possibilité qu'une série converge, mais pas absolument.

Définition 3.15. Une série est *semi-convergente* si elle est convergente, mais pas absolument convergente.

Un exemple typique est le suivant.

Théorème 3.16 (Critère des séries alternées)**.** *Soit (x_n) une suite décroissant vers* 0 *(donc ≥ 0). La série $\sum(-1)^n x_n$ converge ; elle est qualifiée d'*alternée*.*

Exemple. Si $\alpha > 0$ et $x_n = 1/n^\alpha$, alors le critère s'applique et la série de terme général $(-1)^n/n^\alpha$ converge. Mais si $\alpha \leq 1$, la série n'est pas absolument convergente.

Ce résultat peut être généralisé de la manière suivante.

Théorème 3.17 (Critère d'Abel)**.** *Soit (x_n) une suite dont le terme général peut se mettre sous la forme $x_n = a_n b_n$, où :*

(i) (a_n) *est une suite décroissante tendant vers* 0*,*
(ii) la suite des sommes partielles $(B_n = \sum_{k=0}^n b_k)$ *de* (b_n) *est bornée.*

Alors $\sum x_n$ *est convergente.*

Exemple. Posons $b_n = (-1)^n$, et soit (a_n) une suite décroissante et tendant vers 0. Comme

$$B_n = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k = \begin{cases} 1 & \text{si } n \text{ est pair,} \\ 0 & \text{si } n \text{ est impair,} \end{cases}$$

la suite (B_n) des sommes partielles de (b_n) est bornée. Le critère d'Abel dit alors que la série de terme général x_n est convergente, et le Théorème 3.16 se déduit donc du Théorème 3.17.

Exemple. Le critère d'Abel s'applique également aux séries dont le terme général est de la forme $x_n = a_n b_n$, où (a_n) tend vers 0 en décroissant et (b_n) est soit la suite $\sin(\theta n)$, soit la suite $\cos(\theta n)$, avec $\theta \neq 0$ mod. 2π.

Dans le cas où b_n est de la forme $\sin(\theta n)$ ou $\cos(\theta n)$, il est utile de passer en complexes pour calculer B_n. Si $b_n = \sin(\theta n)$, on a en effet :

$$B_n = \sum_{k=0}^{n} \sin(\theta k) = \sum_{k=0}^{n} \mathrm{Im}\left(e^{i\theta k}\right) = \mathrm{Im}\left(\sum_{k=0}^{n} e^{i\theta k}\right),$$

où $\mathrm{Im}(z)$ désigne la partie imaginaire d'un nombre complexe z. Or dès que $\theta \neq 0$ mod. 2π, on a

$$\sum_{k=0}^{n} e^{i\theta k} = \frac{e^{i\theta(n+1)} - 1}{e^{i\theta} - 1} = \frac{e^{i\theta(n+1)/2}(e^{i\theta(n+1)/2} - e^{-i\theta(n+1)/2})}{e^{i\theta/2}(e^{i\theta/2} - e^{-i\theta/2})} = e^{i\theta n/2}\, \frac{\sin(\theta(n+1)/2)}{\sin(\theta/2)}.$$

Donc

$$B_n = \sin(\theta n/2)\, \frac{\sin(\theta(n+1)/2)}{\sin(\theta/2)}$$

qui est borné : $|B_n| \leq 1/|\sin(\theta/2)|$ pour tout n.

Le cas où $b_n = \cos(\theta n)$ se traite de même :

$$B_n = \sum_{k=0}^{n} \cos(\theta k) = \mathrm{Re}\left(\sum_{k=0}^{n} e^{i\theta k}\right) = \cos(\theta n/2)\, \frac{\sin(\theta(n+1)/2)}{\sin(\theta/2)},$$

où $\mathrm{Re}(z)$ désigne la partie réelle d'un nombre complexe z. Donc la suite (B_n) est bornée : $|B_n| \leq 1/|\sin(\theta/2)|$ pour tout n.

Démonstration du critère d'Abel. On utilise la *transformation d'Abel* suivante. Remarquons que $b_n = B_n - B_{n-1}$ pour $n \geq 0$ (on a posé $B_{-1} = 0$). Alors :

$$\begin{aligned} S_n = \sum_{k=0}^{n} a_k b_k = & \sum_{k=0}^{n} a_k (B_k - B_{k-1}) \\ = & \sum_{k=0}^{n} a_k B_k - \sum_{k=0}^{n} a_k B_{k-1} \\ = & \sum_{k=0}^{n} a_k B_k - \sum_{k=-1}^{n-1} a_{k+1} B_k \\ = & \sum_{k=0}^{n} a_k B_k - \sum_{k=0}^{n-1} a_{k+1} B_k \\ = & a_n B_n + \sum_{k=0}^{n-1} (a_k - a_{k+1}) B_k. \end{aligned}$$

Pour passer de la deuxième ligne à la troisième, on a fait un *changement d'indice* dans la deuxième somme, où le "nouveau k" correspond à "l'ancien k moins 1". Pour passer de la troisième ligne à la quatrième, on s'est rappelé que $B_{-1} = 0$. Enfin, pour la dernière égalité, on a séparé dans la première somme les indices k entre 0 et $n-1$ et l'indice $k = n$.

Notons que le suite $(a_n B_n)$ tend vers 0 puisque (a_n) tend vers 0 et (B_n) est bornée. Pour montrer que la série de terme général x_n converge, on est donc ramené à l'étude de la convergence de la série de terme général $y_n = (a_n - a_{n+1}) B_n$. Nous allons prouver que cette série est absolument convergente. Soit M un majorant de la suite (B_n). Comme la suite (a_n) est décroissante, on a

$$|y_n| = (a_n - a_{n+1}) |B_n| \leq M (a_n - a_{n+1}) \ .$$

D'où

$$\sum_{k=0}^{n} |y_k| \leq M \sum_{k=0}^{n} (a_k - a_{k+1}) = M (a_0 - a_{n+1}),$$

où le membre de droite est borné puisqu'il tend vers $M a_0$ lorsque $n \to +\infty$ (on se sert à nouveau ici du fait que (a_n) tend vers 0). On en déduit que la série de terme général y_n est absolument convergente, ce qui conclut la démonstration. □

Remarque. La transformation d'Abel est une version « discrète » (c'est-à-dire adaptée aux séries plutôt qu'aux intégrales) de l'intégration par parties.

3.4 Un mot des séries complexes

De la même façon que l'on peut définir une série réelle à partir d'une suite réelle, on peut définir une série complexe à partir d'une suite complexe.

Définition 3.18. On appelle série complexe une suite dont le terme général S_n est de la forme

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} z_k \qquad \forall n \in \mathbb{N}$$

où (z_n) est une suite à termes complexe.

Vocabulaire. On utilisera le même vocabulaire que dans le cas réel : *terme général* de la série, *sommes partielles*, etc.

Définition 3.19. Une série complexe $\sum z_n$ est *convergente*, lorsque la série des parties réelles $\mathrm{Re}(z_n)$ et celle des parties imaginaires $\mathrm{Im}(z_n)$ le sont. Elle est *divergente* dans tout autre cas.

Définition 3.20. Une série complexe $\sum z_n$ est *absolument convergente*, lorsque la série des parties réelles $\mathrm{Re}(z_n)$ et celle des parties imaginaires $\mathrm{Im}(z_n)$ le sont.

Cela peut sembler ambigu, car on dispose sur $\mathbb{C}$ du module, on pourrait donc définir la convergence absolue de la série complexe de terme général z_n par la convergence de la série de terme général $|z_n|$. La bonne nouvelle est que les deux choses sont équivalentes.

Proposition 3.21. *Une série complexe de terme général* (z_n) *est absolument convergente si et seulement si la série de terme général* $|z_n|$ *converge.*

Démonstration. Cela est une conséquence facile de l'inégalité suivante :

$$\forall z \in \mathbb{C}, \quad |z| \leq |\mathrm{Re}(z)| + |\mathrm{Im}(z)| \leq 2|z|.$$

L'inégalité de droite est évidente puisque $|\mathrm{Re}(z)| \leq |z|$ et $|\mathrm{Im}(z)| \leq |z|$. L'inégalité de gauche est l'inégalité triangulaire puisque $z = \mathrm{Re}(z) + i\mathrm{Im}(z)$. Ensuite, on applique cette inégalité à z_n et on utilise le critère de comparaison pour les séries positives. $\square$

Remarque. Les critères de comparaison pour les séries positives sont à réserver aux séries positives, en particulier réelles !

3.5 Quelques exercices

Ce qu'il faut absolument connaître pour faire les exercices :

- les développements limités des fonctions usuelles, comment on les manipule et comment on calcule des équivalents simples de suites numériques,
- les principaux résultats théoriques du cours : la définition de la convergence d'une série, le fait que la convergence absolue entraîne la convergence, que la suite des sommes partielles d'une série à termes positifs soit converge, soit tend vers $+\infty$,
- les conditions de convergence d'une série de terme général $1/n^\alpha$ et a^n,
- les critères de convergence des séries à termes positifs et comment on s'en sert,
- le critère spécial des séries alternées et le critère d'Abel pour les séries pour lesquelles il ne semble pas évident de montrer la convergence absolue.

Exercice 3.2. Déterminer si la série de terme général x_n converge ou diverge :

$$(i)\ x_n = \frac{1}{n(n+1)} \qquad (ii)\ x_n = \frac{\ln(n)}{n^2} \qquad (iii)\ x_n = \frac{1}{(1+\sqrt{n})^n}$$
$$(iv)\ x_n = \sqrt[3]{n^3+1} - \sqrt{n^2+1} \qquad (v)\ x_n = \frac{n^n}{n!} \qquad (vi)\ x_n = \frac{a^n}{n!} \qquad (a > 0)$$

Exercice 3.3. Déterminer si la série de terme général x_n converge ou diverge :

$$(i)\ x_n = \frac{\cos(2n)}{n} \qquad (ii)\ x_n = \frac{(-1)^n a^{2n}}{(2n)!}$$

Chapitre 4

Intégrales généralisées

En première année a été introduite l'intégrale “définie”, i.e., l'intégrale d'une fonction continue sur un intervalle fermé borné. On trouvera quelques rappels sur l'intégrale définie en appendice. L'intégrale généralisée, qui fait l'objet de ce chapitre, est une intégrale dans laquelle soit l'intervalle d'intégration n'est pas borné, soit la fonction n'est pas continue sur tout l'intervalle fermé d'intégration.

4.1 Intégrale généralisée sur un intervalle non borné

Nous abordons l'étude des intégrales généralisées par des intégrales de la forme $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$, où $f : [a,+\infty[\to \mathbb{R}$ est **continue sur l'intervalle fermé** $[a,+\infty[$.

Définition 4.1. Soit $f : [a,+\infty[\to \mathbb{R}$ est une fonction continue sur l'intervalle fermé $[a,+\infty[$. On dit que l'intégrale $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ **converge** si la limite lorsque $X \to +\infty$ de l'expression $\int_a^X f(x)\,dx$ existe et est un nombre réel. Dans ce cas, on note

$$\int_a^{+\infty} f(x)\,dx = \lim_{X\to+\infty} \int_a^X f(x)\,dx.$$

Lorsque l'expression $\int_a^X f(x)\,dx$ n'a pas de limite finie lorsque $X \to +\infty$, on dit que l'intégrale $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ **diverge**.

Vocabulaire. On parle dans ce cas d'**intégrale généralisée** ou d'**intégrale impropre**.

Exemple. Étude de l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha}\,dx$. Cet exemple fondamental est traité dans la proposition suivante.

Proposition 4.2. *L'intégrale* $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha}\,dx$ *converge si et seulement si* $\alpha > 1$.

Démonstration. Supposons d'abord que $\alpha \neq 1$. Pour tout $X > 1$, on a

$$\int_1^X \frac{1}{x^\alpha}\,dx = \left[\frac{x^{1-\alpha}}{1-\alpha}\right]_1^X = \frac{X^{1-\alpha}-1}{1-\alpha}\ .$$

Cette dernière expression n'a une limite finie lorsque $X \to +\infty$ que si $\alpha > 1$. Dans ce cas

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha}\, dx = \frac{1}{\alpha - 1} .$$

Si $\alpha = 1$, alors

$$\int_1^X \frac{1}{x}\, dx = [\log(x)]_1^X = \log(X) ,$$

qui tend vers $+\infty$ lorsque $X \to +\infty$. $\square$

Remarque. Pour $f :]-\infty, b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue sur l'intervalle fermé $]-\infty, b]$, on définit de même l'intégrale généralisée $\int_{-\infty}^b f(x)\, dx$: celle-ci converge si la limite lorsque $X \to -\infty$ de l'expression $\int_X^b f(x)\, dx$ existe et est un nombre réel, et diverge sinon.

Dans la suite de la Section 4.1, on donne les énoncés pour des intégrales généralisées de la forme $\int_a^{+\infty} f(x)\, dx$. Tous les énoncés restent valables bien entendu pour des intégrales généralisées de la forme $\int_{-\infty}^b f(x)\, dx$, mutatis mutandis. Bien sûr, les énoncés réclamant des fonctions positives continuent à le demander quand on change de côté !

Proposition 4.3 (Linéarité)**.** *Soit $f, g : [a, +\infty[\to \mathbb{R}$ des fonctions continues. Si les intégrales $\int_a^{+\infty} f(x)\, dx$ et $\int_a^{+\infty} g(x)\, dx$ convergent et si λ et μ sont deux nombres réels, alors l'intégrale $\int_a^{+\infty} (\lambda f(x) + \mu g(x))\, dx$ converge et vaut*

$$\int_a^{+\infty} (\lambda f(x) + \mu g(x))\, dx = \lambda \int_a^{+\infty} f(x)\, dx + \mu \int_a^{+\infty} g(x)\, dx .$$

Démonstration. La preuve est un simple passage à la limite, partant de

$$\int_a^X (\lambda f(x) + \mu g(x))\, dx = \lambda \int_a^X f(x)\, dx + \mu \int_a^X g(x)\, dx .$$

$\square$

Comme pour les séries, la question principale pour les intégrales généralisées est celle de la convergence : le calcul explicite de l'intégrale généralisée est au demeurant parfois impossible.

La proposition suivante exprime le fait que la convergence d'une intégrale généralisée ne dépend que du comportement à l'infini de la fonction.

Proposition 4.4. *Soit $f : [a, +\infty[\to \mathbb{R}$ une fonction continue. Si $b \geq a$, alors l'intégrale généralisée $\int_a^{+\infty} f(x)\, dx$ converge si et seulement si l'intégrale généralisée $\int_b^{+\infty} f(x)\, dx$ converge. Dans ce cas,*

$$\int_a^{+\infty} f(x)\, dx = \int_a^b f(x)\, dx + \int_b^{+\infty} f(x)\, dx \tag{4.1}$$

Démonstration. Pour tout $X > b$, on a l'égalité suivante, qui n'est autre que la relation de Chasles :

$$\int_a^X f(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_b^X f(x)\,dx. \tag{4.2}$$

Par conséquent, les expressions $\int_a^X f(x)\,dx$ et $\int_b^X f(x)\,dx$, qui ne diffèrent que de la constante $\int_a^b f(x)\,dx$, ont même comportement (convergence ou divergence) lorsque $X \to +\infty$. En passant à la limite dans (4.2), on trouve l'égalité (4.1). □

De même que pour la notion de reste pour les séries il est parfois utile, lorsque l'intégrale $\int_0^{+\infty} f(t)dt$ converge, d'introduire la notion de *reste de l'intégrale généralisée* :

$$R(x) = \int_x^{+\infty} f(t)dt \qquad \forall x \in [0, +\infty[\ .$$

Il est aisé de voir que $\lim_{x\to+\infty} R(x) = 0$.

Définition 4.5. On dit que l'intégrale généralisée $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ est absolument convergente si $\int_a^{+\infty} |f(x)|\,dx$ converge.

Théorème 4.6. *Soit $f : [a, +\infty[\to \mathbb{R}$ une fonction continue. Si l'intégrale généralisée est absolument convergente, alors l'intégrale généralisée est convergente.*

Démonstration. Rappelons que pour montrer que la limite de $\int_a^X f(x)\,dx$ lorsque $X \to +\infty$ existe, il suffit de montrer que, quelle que soit la suite (X_n) tendant vers $+\infty$, la suite $(\int_a^{X_n} f(x)\,dx)$ possède une limite (réelle).

Fixons donc une suite (X_n) tendant vers $+\infty$ et montrons que la limite de $\int_a^{X_n} f(x)\,dx$ lorsque $n \to +\infty$ existe.

Pour prouver cela, on remarque d'abord que, comme l'intégrale $\int_a^{+\infty} |f(x)|\,dx$ converge, la suite $z_n = \int_a^{X_n} |f(x)|\,dx$ converge, et donc est de Cauchy :

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists n_0 \text{ tel que } \forall n \geq n_0,\ \forall p \geq 0,\ |z_{n+p} - z_n| \leq \varepsilon \tag{4.3}$$

avec

$$z_{n+p} - z_n = \int_a^{X_{n+p}} |f(x)|\,dx - \int_a^{X_n} |f(x)|\,dx = \int_{X_n}^{X_{n+p}} |f(x)|\,dx\ .$$

Montrons maintenant que la suite de terme général $s_n = \int_a^{X_n} f(x)\,dx$ est de Cauchy. Soit $\varepsilon > 0$ fixé et n_0 défini par (4.3). Alors, pour tout $n \geq n_0$ et pour tout $p \geq 0$, on a

$$|s_{n+p} - s_n| = \left|\int_{X_n}^{X_{n+p}} f(x)\,dx\right| \leq \left|\int_{X_n}^{X_{n+p}} |f(x)|\,dx\right| = |z_{n+p} - z_n| \leq \varepsilon$$

grâce à l'inégalité triangulaire et (4.3). Donc (s_n) est de Cauchy, ce qui prouve que la suite $(\int_a^{X_n} f(x)\,dx)$ a une limite finie. □

Remarque. Contrairement au cas des suites, il n'est pas nécessaire que la fonction f tende vers 0 pour que l'intégrale converge.

Au vu du théorème sur la convergence absolue, il suffit souvent d'étudier la convergence des intégrales de fonctions positives. C'est ce à quoi on s'attèle maintenant, en commençant par cette remarque qui est l'équivalent pour les intégrales généralisées de la Proposition 3.8.

Remarque. Soit $f : [a, +\infty[\to \mathbb{R}$ une fonction continue et positive. Comme la fonction $F(X) = \int_a^X f(x)\,dx$ est croissante, on en déduit qu'il n'y a que deux cas possibles pour son comportement en $+\infty$:

— soit F est bornée. Alors la limite de $F(X)$ quand $X \to +\infty$ existe et l'intégrale $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ converge.

— soit $\lim_{X\to+\infty} F(X) = +\infty$ et l'intégrale $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ diverge.

Cette remarque centrale conduit aux critères de convergence suivants (comparer avec les critères pour les suites).

Proposition 4.7 (Critère de comparaison)**.** *Soient $f, g : [a, +\infty[\to \mathbb{R}$ deux fonctions continues, positives sur $[a, +\infty[$. On suppose qu'il existe $b \geq a$ tel que*

$$\forall x \geq b, \qquad f(x) \leq g(x)\ .$$

Alors

— *si l'intégrale $\int_a^{+\infty} g(x)\,dx$ converge, alors l'intégrale $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ converge aussi,*

— *si l'intégrale $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ diverge, alors l'intégrale $\int_a^{+\infty} g(x)\,dx$ diverge aussi.*

Proposition 4.8 (Critère d'équivalence)**.** *Soient $f, g : [a, +\infty[\to \mathbb{R}$ deux fonctions continues, positives sur $[a, +\infty[$. On suppose que les fonctions f et g sont équivalentes en $+\infty$. Alors $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ converge si et seulement si $\int_a^{+\infty} g(x)\,dx$ converge.*

Proposition 4.9 (Critère en x^α)**.** *On considère une fonction $f : [a, +\infty[\to \mathbb{R}$ fonction continue, positive sur $[a, +\infty[$. Alors :*

— *s'il existe un réel $\alpha > 1$ tel que l'expression $x^\alpha f(x)$ possède une limite réelle finie lorsque $x \to +\infty$, alors $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ converge,*

— *s'il existe un réel $\alpha \leq 1$ tel que l'expression $x^\alpha f(x)$ tende vers $+\infty$ lorsque $x \to +\infty$, alors $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ diverge.*

Remarque. Dans le cas d'intégrales généralisées en $-\infty$, on prendra soin de considérer $|x|^\alpha$ plutôt que x^α, car pour α réel, x^α n'est en général défini que pour $x > 0$!

La preuve de la Proposition 4.7 est calquée sur celle de la Proposition 3.10 dans le cas des séries. Les autres démonstrations reposent sur une application directe de cette proposition.

4.2 Intégrale généralisée sur un intervalle borné

On s'intéresse ici à l'intégrale de la forme $\int_a^b f(x)\,dx$, où $f :]a, b] \to \mathbb{R}$ est continue sur l'intervalle $]a, b]$, mais pas sur l'intervalle $[a, b]$. L'intégrale n'est donc plus définie au sens classique.

Définition 4.10. Soit $f :]a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue. On dit que l'intégrale généralisée $\int_a^b f(x)\,dx$ converge si la limite lorsque $X \to a^+$ de $\int_X^b f(x)\,dx$ existe. On note alors

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{X\to a^+} \int_X^b f(x)\,dx$$

Exemple. Un Exemple fondamental est donné dans l'énoncé suivant.

Proposition 4.11. *L'intégrale* $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{x^\alpha}\,dx$ *converge si et seulement si* $\alpha < 1$.

Démonstration. Supposons d'abord que $\alpha \neq 1$. Pour tout $X > 0$, on a

$$\int_X^1 \frac{1}{x^\alpha}\,dx = \left[\frac{x^{1-\alpha}}{1-\alpha}\right]_X^1 = \frac{1-X^{1-\alpha}}{1-\alpha} .$$

Cette dernière expression n'a une limite finie, lorsque $X \to 0$, que si $\alpha < 1$. Dans ce cas

$$\int_0^1 \frac{1}{x^\alpha}\,dx = \frac{1}{1-\alpha} .$$

Si $\alpha = 1$, alors

$$\int_X^1 \frac{1}{x}\,dx = [\log(x)]_X^1 = -\log(X) ,$$

qui tend vers $+\infty$ lorsque $X \to 0$. $\square$

Remarque. Pour $f : [a,b[\to \mathbb{R}$ une fonction continue, on définit de même l'intégrale généralisée $\int_a^b f(x)\,dx$ comme la limite lorsque $X \to b^-$ de $\int_a^X f(x)\,dx$, lorsqu'elle existe. On pourra adapter les énoncés qui suivent au cas d'une intégrale généralisée "à droite".

Proposition 4.12. *Soit* $f :]a,b] \to \mathbb{R}$ *une fonction continue. Si* $c \in]a,b]$, *alors l'intégrale généralisée* $\int_a^b f(x)\,dx$ *converge si et seulement si l'intégrale généralisée* $\int_a^c f(x)\,dx$ *converge. Dans ce cas,*

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx .$$

Définition 4.13. On dit que l'intégrale généralisée $\int_a^b f(x)\,dx$ est absolument convergente si $\int_a^b |f(x)|\,dx$ converge.

Théorème 4.14. *Soit* $f :]a,b] \to \mathbb{R}$ *une fonction continue. Si l'intégrale généralisée est absolument convergente, alors elle est convergente.*

On peut donc souvent se ramener à l'intégrale de fonctions positives. Les critères sont alors très proches de ceux déjà rencontrés.

Proposition 4.15 (Critère de comparaison)**.** *Soient* $f, g :]a,b] \to \mathbb{R}$ *deux fonctions continues, positives sur* $]a,b]$. *On suppose que*

$$\forall x \in]a,b], \qquad f(x) \leq g(x) .$$

Alors
- *si l'intégrale* $\int_a^b g(x)\,dx$ *converge, alors l'intégrale* $\int_a^b f(x)\,dx$ *converge aussi,*
- *si l'intégrale* $\int_a^b f(x)\,dx$ *diverge, alors l'intégrale* $\int_a^b g(x)\,dx$ *diverge aussi.*

Proposition 4.16 (Critère d'équivalence)**.** *Soient* $f, g :]a,b] \to \mathbb{R}$ *deux fonctions continues, positives sur* $]a,b]$. *On suppose que les fonctions* f *et* g *sont équivalentes en* a^+. *Alors* $\int_a^b f(x)\,dx$ *converge si et seulement si* $\int_a^b g(x)\,dx$ *converge.*

Proposition 4.17 (Critère en $(x-a)^\alpha$)**.** *On considère une fonction $f\,:]a,b]\to\mathbb{R}$ fonction continue, positive sur $]a,b]$. Alors*
- *s'il existe un réel $\alpha<1$ tel que l'expression $(x-a)^\alpha f(x)$ possède une limite réelle finie lorsque $x\to a^+$, alors $\int_a^b f(x)\,dx$ converge,*
- *s'il existe un réel $\alpha\geq 1$ tel que l'expression $(x-a)^\alpha f(x)$ tende vers $+\infty$ lorsque $x\to a^+$, alors $\int_a^b f(x)\,dx$ diverge.*

Remarque. En cas d'intégrale généralisée à droite, considérer $(b-x)^\alpha f(x)$.

4.3 Intégrale doublement généralisée

On appelle intégrale doublement généralisée une intégrale de la forme $\int_a^b f(x)\,dx$, où f est continue sur $]a,b[$, avec $a=-\infty$ ou f non continue en a, et $b=+\infty$ ou f non continue en b.

Par exemple, $\displaystyle\int_{-1}^{1}\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$ est une intégrale doublement généralisée.

L'analyse de ces intégrales se ramène à l'analyse de deux intégrales généralisées.

Définition 4.18. Soit $]a,b[$ un intervalle de $\mathbb{R}$ avec $a\in\{-\infty\}\cup\mathbb{R}$ et $b\in\mathbb{R}\cup\{+\infty\}$ et $f\,:]a,b[\to\mathbb{R}$ une application continue sur $]a,b[$. On dit que l'intégrale $\int_a^b f(x)\,dx$ converge s'il existe $c\in]a,b[$tel que les intégrales $\int_a^c f(x)\,dx$ et $\int_c^b f(x)\,dx$ convergent. Dans ce cas, elles convergent en fait quel que soit le choix de c dans $]a,b[$.

Par définition, le réel $\int_a^b f(x)\,dx$ est alors donné par

$$\int_a^b f(x)\,dx=\int_a^c f(x)\,dx+\int_c^b f(x)\,dx,$$

le résultat ne dépendant pas du choix de c.

Si l'une des intégrales $\int_a^c f(x)\,dx$ ou $\int_c^b f(x)\,dx$ diverge, on dit que l'intégrale $\int_a^b f(x)\,dx$ diverge.

Exemple. Par exemple, pour analyser l'intégrale $\int_{-1}^1\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$, il faut étudier les intégrales $\int_{-1}^c\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$ et $\int_c^1\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$ pour un réel $c\in]-1,1[$ que l'on peut choisir (ici $c=0$ convient parfaitement). On note que les intégrales $\int_{-1}^0\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$ et $\int_0^1\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$ convergent toutes les deux, et on peut donc dire que l'intégrale $\int_{-1}^1\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$ converge.

Exemple. Voici un autre exemple : pour étudier l'intégrale $\int_0^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{x}}\,dx$, on "doit" étudier la convergence des intégrales $\int_0^1\frac{1}{\sqrt{x}}\,dx$ et $\int_1^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{x}}\,dx$. La première est convergente, mais pas la seconde. L'intégrale $\int_0^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{x}}\,dx$ diverge donc.

Remarque. On fera bien attention que la convergence de l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)\,dx$ n'est pas équivalente au fait que $\int_{-X}^X f(x)\,dx$ ait une limite lorsque $X\to+\infty$. Par exemple $\int_{-\infty}^{+\infty}x\,dx$ est clairement divergente selon la définition ci-dessus, alors que pour tout X réel, $\int_{-X}^X x\,dx=0$, donc la limite de $\int_{-X}^X x\,dx$ est trivialement définie lorsque $X\to+\infty$!

4.4 Calcul intégral

Règle principale. Le calcul sur les intégrales généralisées se fait toujours en partant de la définition : on fait des calculs sur une intégrale **définie**, puis on passe à la limite.

Exemple. Par exemple calculons l'intégrale

$$I = \int_0^{+\infty} xe^{-x}\, dx.$$

On montre facilement que cette intégrale converge (critère en x^α par exemple). Posons $I(X) = \int_0^X xe^{-x}\, dx$. Alors I sera défini comme la limite de $I(X)$ lorsque $X \to +\infty$ si elle existe. Pour X fixé, on a (en utilisant une intégration par parties) :

$$\begin{aligned} I(X) &= [x(-e^{-x})]_0^X - \textstyle\int_0^X (-e^{-x})\, dx \\ &= -Xe^{-X} - [e^{-x}]_0^X \\ &= -Xe^{-X} - (e^{-X} - 1). \end{aligned}$$

La limite de $I(X)$ lorsque $X \to +\infty$ est donc bien définie et on a :

$$I = \lim_{X \to +\infty} I(X) = 1\ .$$

Le lecteur trouvera en appendice des règles de calcul classiques sur l'intégrale définie : intégration par parties, changement de variables.

4.5 Quelques exercices

Ce qu'il faut absolument connaître pour faire les exercices :

- Comment on manipule l'intégrale définie, et ses règles de calcul,
- les développements limités des fonctions usuelles, comment on les manipule et comment on calcule des équivalents simples de fonctions en $+\infty$ et en un point,
- les principaux résultats théoriques du cours : la définition de la convergence d'une intégrale généralisée et doublement généralisée, le fait que la convergence absolue entraîne la convergence,
- la nature des intégrales généralisées classiques :

$$\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha} \qquad \text{et} \qquad \int_0^1 \frac{dx}{x^\alpha}\ ,$$

- les critères de convergence des intégrales généralisées et comment on s'en sert.

Exercice 4.1. Déterminer la nature des intégrales suivantes :

i) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{x^2+1}\, dx$ *ii)* $\displaystyle\int_1^{+\infty} \ln(1 + \frac{1}{x^\alpha})\, dx$ (où $\alpha > 0$) *iii)* $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^x + 1}{e^{2x} + 3}\, dx$

iv) $\displaystyle\int_{4/\pi}^{+\infty} \sin^2(x)(1 - \cos(1/x))\, dx$ *v)* $\displaystyle\int_0^1 \frac{\sin(\sqrt{x})}{x}\, dx$ *vi)* $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin(x)}{x^{\frac{3}{2}}}\, dx$

Exercice 4.2. i) Montrer que l'intégrale

$$\Gamma(a) = \int_0^{+\infty} t^{a-1} e^{-t} dt$$

converge pour tout $a > 0$.

ii) En effectuant une intégration par parties, montrer que

$$\Gamma(a+1) = a\Gamma(a)$$

iii) Calculer $\Gamma(1)$ et en déduire la valeur de $\Gamma(n)$ pour tout entier naturel n.

Chapitre 5

Suites et séries de fonctions

Dans ce chapitre, on s'intéresse à des suites et séries de fonctions. Une différence majeure avec l'étude des suites et séries numériques est que la notion de convergence pour les suites et séries de fonctions n'est pas univoque : il existe plusieurs notions qui ne sont pas équivalentes entre elles.

5.1 Convergence simple et uniforme d'une suite de fonctions

Dans toute la suite, I désigne un intervalle non vide de $\mathbb{R}$.

Définition 5.1. Soit (f_n) une suite de fonctions de I dans $\mathbb{R}$. On dit que la suite de fonction (f_n) *converge simplement* vers une fonction $f : I \to \mathbb{R}$ (sur l'intervalle I) si pour tout $x \in I$ fixé, la suite de réels $(f_n(x))$ converge vers le réel $f(x)$. Autrement dit,

$$\forall x \in I,\ \forall \varepsilon > 0,\ \exists n_0 \in \mathbb{N},\ \forall n \geq n_0,\ |f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon\ .$$

Malheureusement, cette notion de convergence, qui est la plus naturelle que l'on puisse imaginer, n'a pas de bonnes propriétés. Par exemple, même si les fonctions (f_n) sont continues, la limite f ne l'est pas forcément. De plus, si $I = [a, b]$, la suite d'intégrales $\int_a^b f_n(x)\,dx$ peut ne pas converger vers $\int_a^b f(x)\,dx$. On introduit donc une notion plus forte de convergence, qui a de meilleures propriétés.

Définition 5.2. On dit qu'une suite de fonctions $f_n : I \to \mathbb{R}$ *converge uniformément* vers une fonction $f : I \to \mathbb{R}$ (sur l'intervalle I) si

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists n_0 \in \mathbb{N},\ \forall x \in I,\ \forall n \geq n_0,\ |f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon\ .$$

Fixons ε. Dans la convergence simple, l'indice n_0 dépend de x, tandis que dans la convergence uniforme, n_0 n'en dépend pas (on peut choisir un n_0 qui convient pour tous les x). Donc la notion de convergence uniforme est plus exigente que celle de convergence simple :

Proposition 5.3. *Si (f_n) converge uniformément vers f, (f_n) converge simplement vers f.*

Réciproquement, il existe des suites de fonctions qui convergent simplement, mais pas uniformément :

Exercice 5.1. Montrer que la suite de fonctions $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$ définie par

$$f_n(x) = x^n \qquad \forall x \in [0,1]$$

converge simplement, mais pas uniformément, vers une fonction f que l'on déterminera.

Une autre façon de formuler la convergence uniforme est la suivante :

Proposition 5.4. *La suite (f_n) converge uniformément vers f sur I si et seulement si*

$$\lim_{n\to+\infty} \sup_{x\in I} |f_n(x) - f(x)| \;=\; 0$$

En pratique, s'il est souvent délicat de calculer explicitement la quantité $\sup_{x\in I} |f_n(x) - f(x)|$, il est souvent possible de la **majorer** par une expression simple. Afin de prouver la convergence uniforme de la suite de fonctions (f_n) vers une fonction f, il suffit alors de trouver une suite réelle (ε_n), qui tend vers 0, et telle que $|f_n(x) - f(x)| \le \varepsilon_n$ pour tout $x \in I$ et pour tout n.

5.2 Propriétés de la convergence uniforme

On retiendra quatre principales propriétés de la convergence uniforme :

— une limite uniforme de fonctions continues est encore continue,

— si la suite de fonctions continues (f_n) converge uniformément vers f sur un intervalle I et si la suite de réels (x_n) de I tend vers $x \in I$, alors la suite $(f_n(x_n))$ tend vers $f(x)$,

— l'intégrale sur un intervalle fermé borné $[a,b]$ de la limite uniforme de fonctions continues est égale à la limite des intégrales de ces fonctions,

— la limite simple de fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ dont la dérivée converge uniformément est encore de classe $\mathcal{C}^1$.

Voici les énoncés précis de ces assertions.

Théorème 5.5 (Limite uniforme de fonctions continues)**.** *Une limite uniforme de fonctions continues est continue. Autrement dit, si (f_n) est une suite de fonctions continues de I dans $\mathbb{R}$ qui converge uniformément vers une fonction $f : I \to \mathbb{R}$ sur I, alors f est également continue sur I.*

Démonstration. Fixons $x \in I$ et montrons que f est continue en x. Soit $\varepsilon > 0$. Comme la suite (f_n) converge uniformément vers f, il existe $n_1 \ge 0$ tel que, pour tout $n \ge n_1$,

$$\forall y \in I,\ |f_n(y) - f(y)| \le \frac{\varepsilon}{4}\ .$$

De plus, la fonction f_{n_1} étant continue en x, il existe $\eta > 0$ tel que

$$\forall y \in I,\ y \in [x-\eta, x+\eta] \ \Rightarrow\ |f_{n_1}(y) - f_{n_1}(x)| \le \frac{\varepsilon}{2}\ .$$

Par conséquent, pour tout $y \in I$, avec $y \in [x-\eta, x+\eta]$, on a

$$|f(y) - f(x)| \le |f(y) - f_{n_1}(y)| + |f_{n_1}(y) - f_{n_1}(x)| + |f_{n_1}(x) - f(x)| \le \frac{\varepsilon}{4} + \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{4} = \varepsilon\ ,$$

ce qui montre f continue en x, et ce, pour tout $x \in I$. □

Théorème 5.6 (Interversion des limites)**.** *Soit* (f_n) *une suite de fonctions continues de* I *dans* $\mathbb{R}$ *qui converge uniformément vers une fonction* $f : I \to \mathbb{R}$ *sur* I*. Soit* (x_n) *une suite d'éléments de* I *qui converge vers un réel* x *appartenant à* I*. Alors la suite numérique* $(f_n(x_n))$ *converge vers* $f(x)$*.*

Démonstration. Fixons $\varepsilon > 0$. Comme (f_n) tend uniformément vers f, il existe un rang $n_1 \geq 0$ tel que, pour tout $n \geq n_1$,

$$\forall y \in I,\ |f_n(y) - f(y)| \leq \frac{\varepsilon}{2}\ . \tag{5.1}$$

Comme f est continue (comme limite uniforme de fonctions continues), la suite $(f(x_n))$ tend vers $f(x)$: il existe donc un rang n_2 tel que, pour tout $n \geq n_2$, on a

$$|f(x_n) - f(x)| \leq \frac{\varepsilon}{2}\ . \tag{5.2}$$

Alors, pour tout $n \geq n_0 = \max\{n_1, n_2\}$, on a

$$|f_n(x_n) - f(x)| \leq |f_n(x_n) - f(x_n)| + |f(x_n) - f(x)| \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon\ ,$$

où la première inégalité vient de l'inégalité triangulaire, et la seconde vient de (5.1) appliquée à $y = x_n$ et de (5.2). Donc $(f_n(x_n))$ tend vers $f(x)$. □

Théorème 5.7 (Convergence uniforme et intégration)**.** *On suppose que la suite de fonctions continues* (f_n) *de* $[a, b]$ *dans* $\mathbb{R}$ *converge uniformément sur* $[a, b]$ *vers la fonction (continue)* $f : [a, b] \to \mathbb{R}$*. Alors*

$$\lim_{n\to+\infty} \int_a^b f_n(x)\, dx \ = \ \int_a^b f(x)\, dx.$$

On dit qu'on "passe à la limite sous le signe intégral".

Remarque. Le résultat est faux sans hypothèse supplémentaire pour les intégrales généralisées. On prendra donc soin de justifier les passages à la limite sous le signe intégral.

Démonstration. Commençons par noter que les fonctions f_n pour $n \in \mathbb{N}$ sont continues sur le segment $[a, b]$, donc intégrables. De plus la convergence uniforme de la suite (f_n) et la continuité des fonctions f_n impliquent la continuité de f sur $[a, b]$. Donc f est également intégrable sur $[a, b]$.

Soit maintenant $\varepsilon > 0$. Comme (f_n) tend uniformément vers f sur $[a, b]$, il existe un rang n_0 tel que

$$\forall x \in [a, b],\ \forall n \geq n_0,\ |f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon/(b - a)\ .$$

Il suit que pour tout $n \geq n_0$,

$$\left|\int_a^b f_n(x)\, dx - \int_a^b f(x)\, dx\right| \leq \int_a^b |f_n(x) - f(x)|\, dx \leq \int_a^b \frac{\varepsilon}{b-a}\, dx = \varepsilon\ ,$$

ce qui est le résultat escompté. □

Par contre on ne peut pas "passer à la limite sous la dérivée" : même si une suite de fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ tend uniformément vers une fonction, la fonction peut ne pas être dérivable. Par exemple :

Exercice 5.2. Montrer que la suite de fonctions $f_n(x) = \sqrt{x^2 + 1/n^2}$ converge uniformément vers $f(x) = |x|$ sur $[-1, 1]$. Qu'en est-il de la suite (f_n') ?

Il existe cependant des critères suffisants pour que la fonction limite soit dérivable.

Théorème 5.8 (Convergence uniforme et dérivation)**.** *On suppose que $f_n : I \to \mathbb{R}$ est une suite de fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ sur I. Si*

1. *il existe un point $a \in I$ tel que la suite réelle $(f_n(a))$ converge vers un réel b,*
2. *la suite de dérivées (f_n') converge uniformément vers une fonction $g : I \to \mathbb{R}$ sur I,*

alors (f_n) converge simplement sur I vers la fonction f définie par

$$f(x) = b + \int_a^x g(s)ds \qquad \forall x \in I. \tag{5.3}$$

Si de plus l'intervalle I est fermé borné, i.e. $I = [c, d]$, $c \leq a \leq d$, alors (f_n) tend uniformément vers f sur I.

Remarque. En particulier, g est continue comme limite uniforme de fonctions continues, ce qui permet de définir l'intégrale dans (5.3). On déduit de (5.3) que f est dérivable de dérivée g sur I.

Démonstration. Soit $x \in I$. Alors, par convergence uniforme de (f_n') vers g sur I, la suite (f_n') converge uniformément vers g sur $[a, x]$ (ou $[x, a]$). En utilisant le théorème de passage à la limite sous le signe intégral, on obtient

$$\lim_{n\to+\infty} f_n(x) = \lim_{n\to+\infty} f_n(a) + \lim_{n\to+\infty} (f_n(x) - f_n(a)) = b + \lim_{n\to+\infty} \int_a^x f_n'(s)ds = b + \int_a^x g(s)ds = f(x)\ .$$

Donc la suite de fonctions (f_n) converge simplement vers f sur I.

On suppose maintenant que $I = [c, d]$. Fixons $\varepsilon > 0$. Comme $(f_n(a))$ tend vers $b = f(a)$, il existe n_1 tel que

$$\forall n \geq n_1, \qquad |f_n(a) - f(a)| \leq \varepsilon/2\ .$$

Comme (f_n') tend uniformément vers g, il existe un rang n_2 tel que

$$\forall x \in [c, d],\ \forall n \geq n_2,\ |f_n'(x) - g(x)| \leq \varepsilon/(2(d - c))\ .$$

Posons alors $n_0 = \max\{n_1, n_2\}$. On a, pour tout $n \geq n_0$,

$$\begin{aligned} |f_n(x) - f(x)| &= |f_n(a) - f(a) + \textstyle\int_a^x (f_n'(s) - g(s))ds| \\ &\leq |f_n(a) - f(a)| + \left| \textstyle\int_a^x |f_n'(s) - g(s)|ds \right| \\ &\leq \tfrac{\varepsilon}{2} + (d - c)\tfrac{\varepsilon}{2(d-c)} = \varepsilon\ . \end{aligned}$$

D'où la convergence uniforme de (f_n) vers f. □

5.3 Séries de fonctions

Soient I un intervalle non vide de $\mathbb{R}$ et (f_n) une suite de fonctions de I dans $\mathbb{R}$. Comme pour les séries numériques, on définit la suite des sommes partielles (S_n) où $S_n : I \to \mathbb{R}$ est donnée par

$$S_n(x) = \sum_{k=0}^{n} f_k(x) \qquad \forall x \in I\ .$$

Définition 5.9. On dit que la série de terme général f_n converge simplement (respectivement uniformément) lorsque la suite des sommes partielles (S_n) converge simplement (resp. uniformément). La limite est notée $\sum_{k=0}^{\infty} f_n$.

Introduisons à présent le principal critère de convergence pour une série de fonctions de terme général f_n. Ce critère repose sur la définition suivante.

Définition 5.10. Soit (f_n) une suite de fonctions de I dans $\mathbb{R}$. On pose $\|f_n\|_\infty = \sup_{x\in I} |f_n(x)|$. On dit la série de terme général (f_n) **converge normalement** lorsque la série numérique de terme général $\|f_n\|_\infty$ converge.

L'intérêt de la notion vient du résultat suivant.

Théorème 5.11. *Une série de fonctions normalement convergente est uniformément convergente.*

Remarque. En pratique, il n'est pas toujours aisé de calculer exactement $\|f_n\|_\infty$. Par contre il n'est souvent pas trop difficile d'en trouver un majorant a_n : $\|f_n\|_\infty \le a_n$. Si la série de terme général a_n converge, alors la série de terme général $\|f_n\|_\infty$ converge également, et donc la série général (f_n) est normalement convergente.

Remarque. Attention, la réciproque de ce théorème est fausse en général : on peut trouver des séries uniformément convergentes qui ne sont pas normalement convergentes. Par exemple, soit pour $n \in \mathbb{N}$ la fonction $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ donnée par

$$f_n(x) = \begin{cases} \frac{1}{n+1} \text{ si } x \in [n, n+1[, \\ 0 \text{ si } x \in]-\infty, n[\cup[n+1, +\infty[. \end{cases}$$

On pourra montrer en exercice que la série de terme général f_n converge uniformément, mais pas normalement sur $\mathbb{R}$. Un défi : améliorer cet exemple pour que les fonctions f_n soient continues. L'améliorer encore pour que l'intervalle de définition soit borné.

Démonstration du théorème. Fixons d'abord $x \in I$ et montrons que la série $\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)$ est convergente. Pour cela, il suffit de montrer qu'elle est absolument convergente, ce qui est bien le cas puisque

$$|f_n(x)| \le \|f_n\|_\infty$$

et que la série de terme général $\|f_n\|_\infty$ converge (critère de comparaison pour les séries positives).

On peut donc poser $S(x) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)$. Montrons maintenant que la suite des sommes partielles (S_n) converge uniformément vers S. Rappelons que

$$S_n(x) = \sum_{k=0}^{n} f_k(x) \qquad \forall x \in I\ .$$

Fixons $\varepsilon > 0$. Comme la série de terme général $\|f_n\|_\infty$ est convergente, la suite de ses sommes partielles $(\Sigma_n = \sum_{k=0}^{n} \|f_k\|_\infty)$ possède une limite, et donc est une suite de Cauchy : il existe n_0 tel que, pour tout $p \ge 0$,

$$|\Sigma_{n+p} - \Sigma_n| \le \varepsilon\ .$$

Or pour tout $p \ge 1$

$$|\Sigma_{n+p} - \Sigma_n| = \sum_{k=n+1}^{n+p} \|f_k\|_\infty.$$

On a donc, pour tout $x \in I$, $n \geq n_0$ et $p \geq 1$,

$$|S_{n+p}(x) - S_n(x)| = \left| \sum_{k=n+1}^{n+p} f_k(x) \right| \leq \sum_{k=n+1}^{n+p} |f_k(x)| \leq \sum_{k=n+1}^{n+p} \|f_k\|_\infty \leq \varepsilon \; .$$

Lorsque $p \to +\infty$, $S_{n+p}(x) \to S(x)$. On passe à la limite lorsque $p \to +\infty$ dans l'inégalité précédente pour chaque x fixé dans I et chaque $n \geq n_0$. On obtient donc : $\forall n \geq n_0$, $\forall x \in I$,

$$|S(x) - S_n(x)| \leq \varepsilon \; ,$$

ce qui prouve que la convergence de (S_n) vers S est uniforme. $\square$

Les séries normalement convergentes étant uniformément convergentes, une application directe des propriétés connues pour cette convergence donne :

Proposition 5.12. *Soit (f_n) une suite de fonctions continues de I dans $\mathbb{R}$.*

— *On suppose que la série de terme général f_n converge normalement. Alors la fonction $\sum_{k=0}^{\infty} f_k$ est continue.*
De plus, pour tout intervalle fermé borné $[a,b]$ contenu dans I, la convergence de la série de terme général f_n est uniforme. En particulier on a

$$\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} \int_a^b f_k(x)\, dx \;=\; \int_a^b \left(\sum_{k=0}^{\infty} f_k \right)(x)\, dx \; ,$$

— *On suppose maintenant que les fonctions f_n sont de classe $\mathcal{C}^1$, qu'il existe $a \in I$ tel que la série numérique de terme général $f_n(a)$ converge, tandis que la série de terme général f_n' converge normalement. Alors la fonction $\sum_{k=0}^{\infty} f_n$ est de classe $\mathcal{C}^1$ et*

$$\left(\sum_{k=0}^{\infty} f_k \right)' = \sum_{k=0}^{\infty} f_k' \; .$$

5.4 Exemple des séries trigonométriques

Une *série trigonométrique* (réelle) est une série de la forme

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx) \right), \tag{5.4}$$

où les a_n et b_n sont des nombres réels. Ces séries ont été introduites par L. Euler, J. Fourier, etc. pour résoudre toute sorte d'équations. Par exemple, en Physique on montre que la température $u(x,t)$ au temps t et au point x d'un milieu matériel vérifie, sous certaines conditions, l'*équation de diffusion de la chaleur* suivante :

$$\partial_t u(x,t) - \Delta u(x,t) = 0, \tag{5.5}$$

où, si d est la dimension de l'espace physique, Δ est l'opérateur différentiel *laplacien*, défini par

$$\Delta u(x,t) = \sum_{j=1}^{d} \frac{\partial^2 u}{\partial x_j^2}.$$

Cette équation est une équation aux dérivées partielles, et ne possède pas de solutions explicites, sauf dans des cas très particuliers.

Pour simplifier, supposons ici que le milieu matériel dont on cherche la température a la forme d'un cercle, et que x est un angle qui permet de se repérer sur ce cercle, de sorte que u est 2π-périodique par rapport à x. Les fonctions sinus et cosinus sont 2π-périodiques, mais les fonctions “harmoniques supérieures” $x \mapsto \cos(nx)$ ou $x \mapsto \sin(nx)$ aussi, ainsi que leurs combinaisons linéaires. Une riche classe de fonctions généralise les précédentes est donnée par les séries trigonométriques convergentes. Il est naturel de chercher les solutions dont la dépendance par rapport à x soit de la forme (5.4). De façon équivalente, cela revient à chercher une fonction u de la forme

$$u(x,t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} u_n(x,t), \quad u_n(x,t) = c_n(t)\, e^{inx},$$

où les $c_n(t)$ sont des fonctions complexes du temps t vérifiant $c_{-n} = \bar{c}_n$ pour tout n (pour que la fonction soit réelle [1]). Une subtilité : la notion naturelle de convergence de cette série indexée sur $\mathbb{Z}$ (c'est-à-dire celle qui est héritée de la convergence de la série trigonométrique obtenue en remplaçant e^{inx} par $\cos(nx) + i\sin(nx)$) est la convergence des sommes partielles symétriques $\sum_{n=-N}^{N} u_n(x,t)$, qui est plus faible que la convergence séparée des deux sommes partielles $\sum_{n=0}^{\pm N} u_n(x,t)$.

Supposons qu'on puisse intervertir dérivation et sommation des séries. Cette hypothèse est légitime au stade où l'on ne sait rien de plus sur les solutions de l'équation : il faut bien commencer à calculer ! Quand on substitue l'expression de u dans l'équation, on trouve alors

$$\partial_t u(x,t) - \partial_x^2 u(x,t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \left(c_n'(t) + n^2 c_n(t)\right) e^{inx} = 0.$$

Insistons sur le fait que nous faisons ici un *calcul formel*, c'est-à-dire sans se soucier de la convergence des séries, ni de justifier la dérivation terme à terme des séries ; quand on en saura plus sur les fonctions $c_n(t)$, on pourra *a posteriori* tanter de justifier les pemières étapes du calcul.

Le même théorème d'unicité que plus haut indique que l'on doit avoir, pour tout $n \in \mathbb{Z}$,

$$c_n'(t) = -n^2 c_n(t).$$

On s'est ramené à une infinité dénombrable d'équations différentielles ordinaires (dont les inconnues sont des fonctions d'une seule variable). Les solutions sont de la forme

$$c_n(t) = C_n e^{-n^2 t},\ C_n \in \mathbb{C},\ C_{-n} = \bar{C}_n.$$

Les coefficients C_n correspondent à la fonction température $u(x,0)$ à l'instant initial, et peuvent intuitivement être choisis arbitrairement, sous réserve de convergence des séries, de sorte que les solutions semblent être de la forme

$$u(x,t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} C_n e^{inx - n^2 t}.$$

1. On utilise ici l'unicité de ce type de développement : si $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n\, e^{inx} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \tilde{c}_n e^{inx}$ pour tout x, forcément $c_n = \tilde{c}_n$ pour tout n.

C'est déjà un grand pas d'être arrivé à une expression de cette forme ! Les nombreuses questions laissées en suspens (convergence de ces séries, légitimité des dérivations terme à terme, unicité de la solution à condition initiale fixée, régularité de la solution, etc.) sont l'objet d'une branche importante de l'analyse mathématique appelée *analyse harmonique*, qui dépasse le cadre de ce cours et pour laquelle nous renvoyons par exemple aux livres [KLR16, Kat04].

Nous nous contenterons ici de commencer à explorer les modes de convergence de séries trigonométriques. Pour simplifier, nous nous limiterons aux séries qui sont des limites de sommes de la forme

$$S_n(x) = \sum_{k=1}^{n} b_k \sin(kx),$$

où (b_k) est une suite réelle convergeant vers 0.

Lemme 5.13. *Si* $\sum |b_{n+1} - b_n| < \infty$, (S_n) *converge simplement.*

Démonstration. $(S_n(0))$ converge trivialement. Fixons dorénavant $x \neq 0 \pmod{2\pi}$, et notons

$$D_n = \sum_{k=1}^{n} \sin(kx) = \frac{\cos(x/2) - \cos(n+1/2)x}{2\sin(x/2)}.$$

Une transformation d'Abel montre que

$$\sum_{p}^{q} b_n \sin(nx) = \sum_{p}^{q} b_n (D_n - D_{n-1}) = \sum_{p}^{q} (b_n - b_{n+1}) D_n - b_p D_{p-1} + b_q D_{q-1}.$$

Ici, x est fixé et la suite (D_n) est bornée :

$$|D_n| \leq M = \frac{1}{|\sin(x/2)|}.$$

Donc

$$\left| \sum_{p}^{q} b_n \sin(nx) \right| \leq M \left(\sum_{p}^{q} |b_n - b_{n+1}| + |b_p| + |b_q| \right).$$

D'après les hypothèses, les trois termes entre parenthèse sont petits si p et q sont assez grands. Donc $(\sum_{k=1}^{n} b_k \sin(kx))$ est de Cauchy, donc converge. Donc (S_n) converge simplement sur $\mathbb{R}$. □

Lemme 5.14. *Supposons* (b_n) *décroissante. Alors* (S_n) *converge uniformément si et seulement si* $nb_n \to 0$.

Démonstration. Supposons que (S_n) converge uniformément sur $\mathbb{R}$. Notons $S(x)$ sa limite. Comme chaque fonction S_n est continue, on sait que, si l'on pose $x_n = \frac{\pi}{2n}$,

$$\lim S_n(x_n) = S(0) = 0.$$

Donc la suite réelle $(S_n(x_n))$ est de Cauchy. En particulier, les quantités

$$\sum_{[n/2]+1}^{n} b_k \sin(kx_n)$$

tendent vers 0 quand $n \to \infty$ ($[y]$ désigne ici la partie entière de y, soit le plus grand entier $p \in \mathbb{Z}$ tel que $p \leq y$) ; on se limite ici à une sommation à partir de $k = [n/1] + 1$ pour pouvoir facilement minorer les $\sin kx_n$, en utilisant le fait que $kx_n \geq \frac{n}{2}\frac{\pi}{2n}$, donc $\sin kx_n \geq \frac{1}{2}$ (on utilise ici le fait que $\sin y \geq \frac{2}{\pi}y$). Donc

$$\sum_{[n/2]+1}^{n} b_k \sin(kx_n) \geq \frac{1}{2} \sum_{k=[n/2]+1}^{n} b_k.$$

Comme (b_n) est supposée décroissante,

$$\sum_{[n/2]+1}^{n} b_k \sin(kx_n) \geq \frac{b_n}{2}\left(\frac{n}{2} - 1\right) \to 0.$$

Donc $nb_n \to 0$.

Réciproquement, supposons que $nb_n \to 0$ et montrons que (S_n) converge uniformément. Soit $x \in]0, \pi]$ On sait que $(S_n(x))$ converge, d'après le lemme 5.13. Il s'agit de montrer que le reste

$$\sum_{n=m}^{+\infty} b_n \sin(nx)$$

tend vers 0 uniformément par rapport à x. Coupons la somme en N tel que

$$\frac{\pi}{N+1} < x \leq \frac{\pi}{N},$$

et notons

$$S' = \sum_{m}^{m+N} b_n \sin(nx), \quad S'' = \sum_{m+N+1}^{+\infty} b_n \sin(nx).$$

D'une part, comme $|\sin nx| \leq \frac{2}{\pi}nx$

$$|S'| \leq \frac{2}{\pi}x \sum_{n=m}^{m+N} na_n \leq 2 \sup_{n \geq m}(na_n),$$

donc $|S'|$ tend vers 0 quand $m \to +\infty$, uniformément par rapport à x. D'autre part, la transformation d'Abel faite dans la démonstration du lemme 5.13 montre que

$$|S''| = \left| \sum_{n=m+N+1}^{+\infty} (a_n - a_{n+1})D_n - a_{m+N}D_{m+N-1} \right|,$$

où $|D_n| \leq \frac{\pi}{x}$, donc

$$|S''| \leq \frac{2a_{m+N+1}\pi}{x} \leq 2(N+1)a_{m+N} \leq 2\sum_{n \geq m}(na_n),$$

où le membre de droite tend aussi vers 0 quand $m \to \infty$, uniformément par rapport à x. Donc (S_n) converge uniformément sur $]0, \pi]$, donc sur $\mathbb{R}$ par imparité et périodicité (et la somme S est continue). □

5.5 Quelques exercices

Ce qu'il faut absolument connaître pour faire les exercices :

- revoir le cours de L1 sur la continuité et la dérivabilité des fonctions d'une variable réelle, ainsi que la partie du cours sur les séries pour l'étude des séries de fonctions,
- les différentes notions de convergence et leurs relations : convergence simple, uniforme d'une suite de fonctions ; convergence simple, uniforme, normale d'une série de fonctions,
- les principaux résultats sur la convergence uniforme : limite uniforme de fonctions continues, convergence uniforme et intégration, convergence uniforme et dérivation.

Exercice 5.3. Pour quelles valeurs de $\alpha > 0$ la suite de fonctions de terme général

$$f_n(x) = n^\alpha x e^{-nx} \qquad \forall x \in [0, +\infty[$$

converge-t-elle uniformément vers 0 sur $[0, +\infty[$?

Exercice 5.4. Montrer que la suite de fonctions

$$f_n(x) = \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n \qquad \forall x \in \mathbb{R}$$

converge simplement vers une fonction f que l'on déterminera.

Montrer que la convergence n'est pas uniforme sur $\mathbb{R}$.

Exercice 5.5. Montrer que la suite de fonctions $f_n(x) = \dfrac{\sin(n^2 x)}{n}$ converge uniformément vers $f(x) = 0$ sur $\mathbb{R}$. Qu'en est-il de la suite (f_n') ?

Chapitre 6

Séries entières

Dans ce chapitre, on s'intéresse aux séries entières, c'est-à-dire aux séries de fonctions dont le terme général est de la forme $f_n(x) = a_n x^n$. Ces séries jouent un rôle très important dans quasiment tous les champs des mathématiques (analyse des équations différentielles, probabilités, combinatoire, algèbre, etc.). Elles sont la généralisation la plus naturelle des polynômes, et elles en héritent d'une sorte de rigidité.

6.1 Définition

Définition 6.1. Une *série entière* est une série de fonctions dont le terme général f_n est de la forme $f_n(x) = a_n x^n$ où (a_n) est une suite réelle donnée. On parle alors de la série entière $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$.

Un des enjeux concernant ces séries est le domaine où elles convergent, comme nous le verrons dans le paragraphe suivant. La convergence a au moins lieu en $x = 0$, évidemment !

Remarque. On peut être amené à considérer des séries entières où le terme général a la forme $f_n(x) = a_n(x - c)^n$ où c est un réel fixé. Ce ≪ recentrage ≫ en $x = c$ plutôt qu'en $x = 0$ ne pose pas de problème et tous les énoncés peuvent être facilement adaptés à ce cadre.

Remarque. Il est parfois utile de pouvoir considérer le cas où les a_n sont complexes. On peut alors raisonner de manière distincte sur la partie réelle et la partie imaginaire tant que x est réel. Le cas où l'on remplace le réel x par un complexe z est également important, mais sort du cadre de ce cours.

Les séries entières représentent une sous-classe particulièrement importante de séries de fonctions : en fait la plupart des fonctions usuelles possèdent une représentation sous forme de séries entières. Cela se montre avec certaines formes de la formule de Taylor.

6.2 Rayon de convergence

Définition 6.2. Soit $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ une série entière. Le *rayon de convergence* de la série entière est la borne supérieure de l'ensemble des réels $r \geq 0$ tel que la série numérique

$\sum_{n=0}^{\infty} a_n r^n$ converge, i.e.

$$R = \sup \mathcal{C} \in [0, +\infty]$$

avec

$$\mathcal{C} = \left\{ r \geq 0 \;\middle|\; \sum_{n=0}^{\infty} a_n r^n \text{converge} \right\}.$$

N.B. : $\mathcal{C}$ est une partie non vide de $\mathbb{R}$ (puisqu'elle contient 0), donc possède une borne supérieure (éventuellement infinie si $\mathcal{C}$ n'est pas borné).

Exemple ($R = 0$)**.** Considérons la série $\sum n!\, x^n$. Pour tout $r > 0$, $n! r^n \to +\infty$; si $r > 1$, c'est évident (produit de deux facteurs tendant chancun vers l'infini), et, si $0 < r < 1$, c'est encore vrai (exercice). Donc, pour tout $r > 0$, $\sum n!\, r^n$ diverge. Donc $\mathcal{C} = \{0\}$, donc $R = 0$.

Exemple ($R = 1$)**.** Considérons la série $\sum x^n$. Ses sommes partielles valent

$$\sum_{k=0}^{n} x^n = \begin{cases} \frac{1-x^{n+1}}{1-x} & \text{si } x \neq 1 \\ n+1 & \text{si } x = 1 \end{cases}$$

donc converge si et seulement si $|x| < 1$. Donc $\mathcal{C} = [0, 1[$, donc $R = 1$.

Par simple homothétie dans la variable x, on obtient une série entière $\sum (x/\rho)^n$ de rayon de convergence $\rho \in]0, +\infty[$ quelconque.

Exemple ($R = +\infty$)**.** Considérons enfin la série $\sum x^n/n!$. Pour tout $r \geq 0$, la série $\sum r^n/n!$ converge (exercice), donc $\mathcal{C} = [0, +\infty[$, donc $R = +\infty$.

On a bien sûr reconnu ici la série de la fonction exponentielle ; c'est même probablement la meilleure façon de définir l'exponentielle, pour retrouver rapidement toutes ses propriétés fondamentales.

La caractérisation suivante de R qui est très utile pour le calculer (on pourra le vérifier avec les exemples ci-dessus).

Lemme 6.3 (Lemme d'Abel)**.**

$$R = \sup \left\{ r \geq 0 \;\middle|\; (a_n r^n)_n \textit{ est bornée} \right\}.$$

Démonstration. Notons $\mathcal{C}' = \left\{ r \geq 0 \;\middle|\; (a_n r^n)_n \text{ est bornée} \right\}$ et $R' = \sup \mathcal{C}'$. Il s'agit de montrer que $R = R'$.

Commençons par montrer que $R' \leq R$. Pour tout $r < R'$, si l'on note $r' = \frac{r+R'}{2}$, on a

$$|a_n r^n| = |a_n r'^n| \left| \frac{r}{r'} \right|^n ;$$

dans le membre de droite, le premier facteur est borné, tandis que le second est le terme général d'une série (géométrique de raison < 1) convergente, donc $r \in \mathcal{C}$. Donc $R' \leq R$.

Réciproquement, montrons que $R \leq R'$. Pour tout $r < R$, si l'on note $r' = \frac{r+R}{2} < R$, la série $\sum a_n r'^n$ converge, donc $a_n r'^n \to 0$, donc $a_n r^n \to 0$, donc $(a_n r^n)$ est bornée, donc $r \in \mathcal{C}'$. Donc $R \leq R'$. $\square$

Lemme 6.4. *1. Si $|x| < R$, $\sum a_n x^n$ converge absolument.*

2. *Si $|x| > R$, $\sum a_n x^n$ diverge.*

Démonstration. 1. Le raisonnement est le même que précédemment : si l'on pose $r = \frac{|x|+R}{2} \in]|x|, R[$, $(a_n r^n)$ est bornée et l'on en déduit que $\sum |a_n x^n|$ converge.

2. Montrons la contraposée de la seconde affirmation. Si $\sum a_n x^n$ converge, $(a_n x^n)$ tend vers 0, donc $(a_n x^n)$ est bornée, donc $|x| \leq R$.

$\square$

Remarque. Si $|x| = R$, le comportement de la série numérique $\sum a_n x^n$ dépend des a_n et de x, comme les exemples suivants le montrent :

— La série $\sum x^n$, de rayon de convergence $R = 1$, diverge en tout x tel que $|x| = 1$.

— La série $\sum x^n/n$, aussi de rayon 1, diverge en $x = 1$ mais converge pour tout $x \neq 1$ tel que $|x| = 1$ (si x est réel, la seul possibilité est $x = -1$).

— La série $\sum x^n/n^2$, toujours de rayon 1, converge pour tout x tel que $|x| = 1$.

D'ailleurs, la compréhension de la convergence et de la divergence des séries entières n'est possible qu'en complexifiant x. En guise d'exemple, considérons la série $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{2n}$. Sa somme vaut $\frac{1}{1+x^2}$, et rien de particulier ne semble se passer au voisinage de $x = \pm 1$; en particulier le dénominateur ne s'annule pas. En revanche, si on complexifie x, le problème en $|x| = 1$ apparaît immédiatement : le dénominateur s'annule en $x = \pm i$.

Remarque (Calcul du rayon de convergence)**.** On peut parfois déterminer le rayon de convergence à l'aide du critère de Cauchy ou de D'Alembert.

• Si par exemple $\sqrt[n]{|a_n|} \to \ell$ (où ℓ est soit un réel, soit égal à $+\infty$), on a

$$\sqrt[n]{|a_n||x|^n} = \sqrt[n]{|a_n|}|x| \to \ell|x|,$$

sauf dans le cas indéterminé où $\ell = +\infty$ et $x = 0$, mais dans ce cas, on a zéro des deux côtés. Le critère de Cauchy dit alors que le rayon de convergence de la série est donné par $1/\ell$ si $\ell > 0$, est égal à $+\infty$ si $\ell = 0$, et à 0 si $\ell = +\infty$.

• Si $|a_{n+1}|/|a_n|$ tend vers une limite ℓ, alors comme

$$\frac{|a_{n+1}|\,|x|^{n+1}}{|a_n|\,|x|^n} = \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}|x| \to \ell|x| \ ,$$

le critère de D'Alembert dit que le rayon de converge vaut $1/\ell$ si $\ell > 0$, est égal à $+\infty$ si $\ell = 0$, et à 0 si $\ell = +\infty$.

Cependant l'application directe du lemme d'Abel permet de conclure plus rapidement.

Aussi, les critères de comparaison de séries facilitent parfois les calculs de rayon de convergence.

Proposition 6.5. *Soient $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ et $\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$ sont deux séries entières. On suppose qu'il existe deux constantes M et n_0 telles que, pour tout $n \geq n_0$ $|a_n| \leq M|b_n|$. Alors le rayon de convergence de la série entière $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ est* supérieur ou égal *au rayon de convergence de la série entière $\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$.*

Démonstration. On suppose sans perte de géneralité que $n_0 = 0$. Si $r > 0$ est tel que $\sum_{n=0}^{\infty} |b_n| r^n$ converge, alors, par comparaison, la série $\sum_{n=0}^{\infty} (|a_n|/M) r^n$ converge aussi. Donc la série $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n| r^n$ converge, ce qui implique le résultat. $\square$

Corollaire 6.6. *Si les suites (a_n) et (b_n) sont équivalentes, alors les séries entières $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ et $\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$ ont même rayon de convergence.*

6.3 Opérations sur les séries entières

Il existe plusieurs opérations fondamentales sur les séries entières (qui permette d'associer une série entière à une ou plusieurs autres séries entières) : somme, produit, inversion (passage à $1/(\sum a_n x^n)$), composition, dérivation, intégration, inversion fonctionnelle (passage à la bijection réciproque), etc. Nous nous limiterons ici à quelques unes. La description des opérations plus sophistiquées procède en deux étapes :

— une première étape formelle (où l'on montre l'existence des coefficients du résulat jusqu'à un ordre fini quelconque, exactement comme on le fait avec des développements limités)

— et une seconde étape où l'on montre que le rayon de convergence de la série obtenue est > 0.

Nous renvoyons au livre de H. Cartan [Car61] pour un cours plus avancé.

Théorème 6.7 (Somme de deux séries entières)**.** *On suppose que $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ et $\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$ sont deux séries entières de rayons respectifs R_a et R_b. Alors la série entière $\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty}(a_n + b_n)x^n$ a pour rayon de convergence $R_c \geq \min\{R_a, R_b\}$ et pour tout x tel que $|x| < \min\{R_a, R_b\}$ on a*

$$\sum_{n=0}^{\infty}(a_n + b_n)x^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n + \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n.$$

De plus si $R_a \neq R_b$ alors $R_c = \min\{R_a, R_b\}$.

Démonstration. Si $|r| < \min\{R_a, R_b\}$, alors les deux séries $\sum_{n=0}^{\infty} a_n r^n$ et $\sum_{n=0}^{\infty} b_n r^n$ sont absolument convergentes donc $\sum_{n=0}^{\infty}(a_n + b_n)r^n$ l'est aussi. On déduit que $R_c \geq \min\{R_a, R_b\}$.

Si maintenant on suppose de plus les rayons sont diffèrents, par exemple $R_a < R_b$: supposons $R_c > R_a$, alors il existerait r tel que $R_a < |r| < \min\{R_b, R_c\}$. Alors $\sum_{n=0}^{\infty} c_n r^n$ et $\sum_{n=0}^{\infty} b_n r^n$ sont absolument convergentes. Donc $\sum_{n=0}^{\infty}(c_n - b_n)r^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n r^n$ converge, ce qui est absurde. Donc $R_c = \min\{R_a, R_b\}$. $\square$

Remarque. Dans le cas où $R_a = R_b$, il existe des suites (a_n) et (b_n) telles que $R_c > R_a = R_b$. Exercice : en trouver une !

Théorème 6.8 (Produit de deux séries entières)**.** *On suppose que $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ et $\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$ sont deux séries entières de rayons respectifs R_a et R_b. Alors la série entière $\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$, avec $c_n = a_0 b_n + \cdots + a_n b_0$, a pour rayon de convergence $R_c \geq \min\{R_a, R_b\}$ et pour tout x tel que $|x| < \min\{R_a, R_b\}$ on a*

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n = \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n\right) \cdot \left(\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n\right).$$

La démonstration de ce résultat est omise.

Théorème 6.9 (Dérivation d'une série entière)**.** *Soit R le rayon de convergence de la série entière $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$. Si $R > 0$ la série entière $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ converge uniformément sur l'intervalle $[-r, r]$ pour tout $|r| < R$.*

La fonction $x \mapsto S(x) := \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]-R,R[$, et sa dérivée est donnée par la série entière :

$$S'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1} \qquad \forall x \in]-R,R[\ ,$$

avec rayon de convergence R.

De façon symétrique, tout primitive F de S est donnée par la série entière

$$F(x) = F(0) + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} x^{n+1} \qquad \forall x \in]-R,R[\ ,$$

avec rayon de convergence R.

Remarque. 1. Par récurrence on déduit aisément l'expression de la dérivée $p-$ième de S :

$$S^{(p)}(x) = \sum_{n=p}^{\infty} \frac{a_n n!}{(n-p)!} x^{n-p} \qquad \forall p \geq 0\ ,$$

cette dernière série entière ayant un rayon de convergence égal à R.

2. En particulier, pour $x = 0$ dans l'expression précédente, on a

$$a_p = \frac{S^{(p)}(0)}{p!} \qquad \forall p \geq 0\ .$$

Démonstration du théorème. **1.** Fixons $r \in]0,R[$. Alors

$$\sup_{x \in [-r,r]} |a_n x^n| = |a_n| r^n.$$

Comme la série $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n| r^n$ converge, la série $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ est normalement convergente sur l'intervalle $[-r,r]$. La convergence est donc uniforme sur cet intervalle. Comme les fonctions $x \mapsto a_n x^n$ sont continues sur $[-r,r]$ et comme la série de fonctions $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ converge normalement vers $S(x)$ sur cet intervalle. Donc S est continue sur $[-r,r]$ pour tout $r \in]0,R[$. Cela implique la continuité de S sur $]-R,R[$: soit en effet x tel que $|x| < R$, il existe alors $r \in]|x|,R[$ et donc d'après ce qui précède S est continue sur $[-r,r]$, donc en x.

2. Montrons que si R est le rayon de convergence de la série entière $S(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$, alors R est inférieur ou égal au rayon de convergence de la série entière des dérivées :

$$g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_{n+1}(n+1)x^n,$$

et que de plus S est une primitive de g sur $]-R,R[$. Fixons $r \in]0,R[$. Soit $r_1 \in]r,R[$. Alors

$$|a_{n+1}|(n+1)r^n = |a_{n+1}| r_1^{n+1} \frac{(n+1)r^n}{r_1^{n+1}} \leq M |a_{n+1}| r_1^{n+1}$$

où M est le supremum de la suite $(\frac{(n+1)r^n}{r_1^{n+1}})$ qui est bornée, puisque cette suite tend vers 0 (rappelons que toute suite convergente est bornée). Par conséquent le terme général de la série $(|a_{n+1}|(n+1)r^n)$ est majoré par le terme général de la série $\sum_{n=0}^{\infty} M|a_{n+1}| r_1^{n+1}$, série qui converge par définition du rayon de convergence. En conclusion, la série de terme général $|a_{n+1}|(n+1)r^n$ converge pour tout $r < R$. On en déduit que le rayon de cette série entière $g(x)$ est supérieur ou égal à R.

3. Réciproquement, si $r > R$, alors par le lemme d'Abel la suite $(a_n r^n)$ ne tend pas vers zéro, autrement elle serait bornée et donc on aurait la convergence de $\sum_{n=0}^{\infty} a_n \tilde{r}^n$ pour tout $R < |\tilde{r}| < r$. Donc la suite $(a_{n+1} r^n)$ ne tend pas vers zéro non plus. A fortiori, la suite $((n+1)a_{n+1}r^n)$ ne tend pas vers zéro et la série $\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)a_{n+1}r^n$ diverge. Donc le rayon de convergence de $g(x)$ est inférieur ou égal à R et par l'étape précedente il est égal à R.

4. De plus, on déduit de ce qui précède que la série $\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)a_{n+1}x^n$ converge uniformément sur l'intervalle $[-r, r]$ vers g. Comme la série $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ converge simplement vers S, le théorème de dérivation des suites de fonctions affirme que S est de classe $\mathcal{C}^1$ et que $S' = g$.

5. Enfin, le résultat pour la primitive est une application directe du théorème d'intégration des séries uniformément convergentes. □

Exemple (Une équation différentielle)**.** Soit à résoudre le problème de Cauchy (donnée d'une équation différentielle et d'une condition initiale)

$$\begin{cases} (1-x^2)y'(x) = xy(x) + 1 \\ y(0) = 0 \end{cases},$$

d'inconnue une fonction $y(x)$ définie sur un voisinage de 0 dans $\mathbb{R}$. Cherchons la fonction y sous la forme d'une série entière de rayon de convergence > 0, $y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$.

D'après la condition initiale $y(0) = a_0 = 0$. Par ailleurs, en faisant $x = 0$ dans l'équation différentielle, on voit que $y'(0) = a_1 = 1$. Maintenant, injectons l'expression de y dans l'équation différentielle (en utilisant que, d'après ce qu'on a vu, y est dérivable au voisinage de 0 et $y'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}$) :

$$\begin{aligned} 0 = (1-x^2)y'(x) - xy(x) - 1 &= \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1} - \sum_{n=1}^{\infty} a_n x^{n+1} - 1 \\ &= (a_1 - 1) + 2a_2 x + \sum_{n=2}^{\infty} \left((n+1)a_{n+1} - n a_{n-1}\right) x^n. \end{aligned}$$

Pour que l'équation soit satisfaite, il suffit que le coefficient de x^n soit nul pour tout $n \in \mathbb{N}$ (c'est en fait une condition nécessaire, mais nous ne le savons pas à ce stade du cours). On voit qu'alors la suite (a_n) est définie par récurrence :

$$\begin{cases} a_0 = 0 \\ a_1 = 1 \\ a_{n+1} = \frac{n}{n+1} a_{n-1}. \end{cases}$$

Par récurrence, on voit que, pour tout n, $a_{2n} = 0$, et

$$a_{2n+1} = \frac{2n}{2n+1}\frac{(2n-2)}{(2n-1)} \cdots \frac{2}{3} a_1 = \frac{(2^n n!)^2}{(2n+1)!},$$

de sorte que

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2^n n!)^2}{(2n+1)!} x^{2n+1}.$$

Comme $a_{2n+3}/a_{2n+1} = \frac{2n+1}{2n+3} \to 1$, le rayon de convergence de la série trouvée vaut $R = 1$ (ce qui légitime les calculs par lesquels on a commencé), et l'on a donc bien déterminé une solution du problème de Cauchy. La théorie des équation différentielles ordinaires (voir [Arn06]) montre en fait que la solution est unique, et, en la calculant par une autre méthode, on voit que

$$y(x) = (\operatorname{Arcin} x)^2.$$

Exercice 6.1 (Équations différentielles). Soit

$$v(x,y) = \sum_{p=0}^{\infty} \sum_{q=0}^{\infty} v_{p,q} x^p y^q$$

une série entière (réelle) de deux variables. On suppose qu'il existe $R, M > 0$ tels que, pour tous entiers p, q,

$$|v_{p,q}| \leq \frac{M}{R^{p+q}}.$$

1. Montrer que v converge absolument sur $]-R, R[\times]-R, R[$.

Considérons le problème de Cauchy

$$\begin{cases} y'(x) = v(x, y(x)) & \text{sur un voisinage de } x = 0 \\ y(0) = 0. \end{cases}$$

2. Montrer l'unicité d'une solution parmi les séries entières $y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} y_n x^n$. On pourra montrer, en utilisant l'unicité du développement limité de l'équation à tout ordre, [1] que $y_0 = 0$ et que, pour tout $n \geq 1$, il existe un unique polynôme Q_n à coefficients rationnels ≥ 0 dépendant d'un nombre fini de coefficients $v_{p,q}$, tel que

$$y_n = Q_n((v_{p,q})).$$

3. Montrer que la série entière précédemment déterminée a un rayon de convergence > 0. *Indication :* Choisir $r \in]0, R[$, poser $V_{p,q} = \frac{M}{r^{p+q}}$, calculer explicitement la solution $Y(x)$ du problème de Cauchy associé, montrer que Y possède un rayon > 0, et montrer que le rayon de y est supérieur à celui de Y (Y s'appelle une *série majorante* de y). *Indication :* $Y(x) = r\left(1 - \sqrt{1 + 2M \ln(1 - \frac{x}{r})}\right)$.

6.4 Développement d'une fonction en série entière

Dans les sections qui précèdent, on partait d'une série, et on donnait des propriétés de la limite. Dans cette section, on cherche à savoir si, une fonction étant donnée, elle peut se mettre sous la forme de la somme d'une série entière.

Définition 6.10. Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction définie sur un intervalle ouvert non vide I, contenant 0. La fonction f est *développable en série entière* au voisinage de 0 (on dit aussi *analytique* en 0) s'il existe une série entière $\sum_n a_n x^n$ ayant un rayon de convergence $R > 0$ et telle que $f(x) = \sum_n a_n x^n$ sur $]-R, R[\cap I$.

1. En toute rigueur, il s'agit ici du développement limité de séries qui ne sont pas forcément convergentes. La démonstration de leur unicité est identique à la démonstration dans le cas convergent.

Remarque. Comme indiqué plus haut, le rôle de 0 est ici (comme dans toute cette partie) complètement arbitraire : en pratique il est souvent très utile d'étudier la possibilité de développer en séries entières une fonction au voisinage d'un point x_0 appartenant à l'intérieur de l'intervalle de définition de la fonction : cela signifie qu'il existe un réel $R > 0$ tel que $f(x) = \sum_n a_n(x - x_0)^n$ sur $]x_0 - R, x_0 + R[$. L'étude de cette question se ramène directement au cas où $x_0 = 0$ par translation.

Lorsque f est développable en série entière au voisinage de 0, alors f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]-R, R[$ et la suite (a_n) est donnée par

$$a_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!} \qquad \forall n \geq 0 \; .$$

Il n'est cependant pas vrai en général qu'une fonction f de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur un intervalle $]-R, R[$ coïncide avec une série entière sur cet intervalle, ou même sur un intervalle plus petit. Voici un exemple.

Exemple. Soit f la fonction définie par $f(x) = e^{-1/x^2}$ si $x \neq 0$ et $f(0) = 0$. On vérifie aisément que f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$. Cependant, f ne coïncide avec aucune série entière au voisinage de 0 car, comme $f^{(n)}(0) = 0$ pour tout n, cette série entière devrait être identiquement nulle sur l'intervalle, alors que f est positive en dehors de 0.

Comment prouver qu'une fonction est développable en série entière. Pour montrer qu'une fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$ est développable en série entière au voisinage de 0, il faut estimer le reste R_n dans la formule de Taylor-Young :

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k + R_n(x)$$

où R_n est donné, pour la formule de Taylor avec reste intégral, par

$$R_n(x) = \int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t) dt$$

et, pour la formule de Taylor-Lagrange par

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\theta_{n,x} x)}{(n+1)!} x^{n+1} \qquad \text{pour un certain } \theta_{n,x} \in [0,1].$$

Lorsque

$$\lim_{n \to +\infty} R_n(x) = 0 \qquad \text{si } x \in]-R, R[\; ,$$

alors f est développable en série entière sur l'intervalle $]-R, R[$.

Théorème 6.11. *Soit I un intervalle non vide, ouvert, contenant 0. Si $f : I \to \mathbb{R}$ est $\mathcal{C}^\infty$ sur $]-R, R[\subset I$ et s'il existe une constante M telle que :*

$$\forall x \in]-R, R[, \forall n \in \mathbb{N} \quad |f^{(n)}(x)| \leq M,$$

f est développable en série entière au voisinage de 0.

Démonstration. Il suffit de prouver que pour tout $x \in]-R, R[$ la suite $R_n(x)$ tend vers 0 lorsque n tend vers l'infini.

$$|R_n(x)| = \left| \int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)dt \right| \leq \int_0^x \left| \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t) \right| dt \leq M \int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!} dt.$$

En calculant l'intégrale, on obtient :

$$|R_n(x)| \leq M \left[-\frac{(x-t)^{n+1}}{(n+1)!} \right]_0^x = M \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} \to 0 \quad \text{lorsque } n \to \infty.$$

□

Voici quelques exemples qu'il faut connaître :

$e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} \qquad \forall x \in \mathbb{R}$	$\frac{1}{1+x} = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k x^k \qquad \forall x \in]-1, 1[$
$\log(1+x) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{k+1}}{k+1} \qquad \forall x \in]-1, 1[$	$\cos(x) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} \qquad \forall x \in \mathbb{R}$,
$\sin(x) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} \qquad \forall x \in \mathbb{R}$.	

Montrons par exemple la formule pour l'exponentielle : la formule de Tayor-Lagrange donne

$$e^x = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} + R_n(x)$$

où

$$R_n(x) = \frac{e^{\theta_{n,x} x}}{(n+1)!} x^{n+1}, \qquad \text{pour un certain } \theta_{n,x} \in [0, 1] .$$

Or

$$|R_n(x)| \leq \frac{e^{|x|}}{(n+1)!} |x|^{n+1} \to 0$$

(car $|x|^{n+1}/(n+1)!$ est le terme général d'une série convergente).

6.5 Quelques exercices

Exercice 6.2. Pour $x \in \mathbb{R}$, on pose

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)x^n .$$

1. Montrer que cette série converge pour tout $x \in]-1, 1[$.
2. Montrer que f est continue sur $]-1, 1[$.
3. Soit F la primitive de f telle que $F(0) = 1$. Exprimez F sous la forme d'une série entière et en déduire f.

Chapitre 7

Appendice 1 : Rappels sur l'ordre de $\mathbb{R}$

Nous nous intéressons ici au corps des réels $\mathbb{R}$. Par corps, on veut dire qu'il est muni des quatre opérations élémentaires ($+$, $-$, $\times$, $\div$), avec les propriétés usuelles (commutativité et associativité de $+$ et $\times$, distributivité, etc.) Nous rappelons ici quelques propriétés de l'ensemble des nombres réels liées à l'ordre.

Le corps des réels $\mathbb{R}$ est un ensemble ordonné. L'ensemble $\mathbb{R}$ est muni d'une **relation d'ordre** $\leq$, c'est-à-dire d'une relation qui vérifie les conditions suivantes :

i) *réflexivité* : pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $x \leq x$
ii) *antisymétrie* : pour tout $x \in \mathbb{R}$ et $y \in \mathbb{R}$, si $x \leq y$ et $y \leq x$, alors on a $x = y$
iii) *transitivité* : pour tout $x \in \mathbb{R}$, $y \in \mathbb{R}$ et $z \in \mathbb{R}$, si $x \leq y$ et $y \leq z$, alors on a $x \leq z$.

De plus, $\mathbb{R}$ est **totalement ordonné**, c'est-à-dire que pour tout $x \in \mathbb{R}$ et $y \in \mathbb{R}$, on a soit $x \leq y$, soit $y \leq x$. On dit aussi que la relation $\leq$ est une relation d'ordre total dans $\mathbb{R}$.

Définitions liées à l'ordre.

— On dit qu'un ensemble A de $\mathbb{R}$ est **majoré** s'il existe un nombre réel M tel que tout élément de A est inférieur ou égal à M :

$$A \text{ majoré} \quad \Leftrightarrow \quad \exists M \in \mathbb{R},\ \forall x \in A,\ x \leq M\ .$$

— On dit que M est un **majorant** de A. Notons que si M est un majorant de A et si $M' \geq M$, alors M' est aussi un majorant de A.
— On dit que M est **le plus grand élément** de A si M appartient à A et M est un majorant de A. Un tel plus grand élément (s'il existe) est unique.
— De même, on dit qu'un ensemble A de $\mathbb{R}$ est **minoré** s'il existe un nombre réel m tel que tout élément de A est supérieur ou égal à m. On dit alors que m est un **minorant** de A.
— On dit que m est **le plus petit élément** de A si m appartient à A et m est un minorant de A.
— Soit A un ensemble majoré. On appelle **borne supérieure** de A le plus petit des majorants. La borne supérieure de A est donc le réel M tel que
  i) M est un majorant de A : $\forall x \in A$, on a $x \leq M$,

ii) tout majorant de A est supérieur ou égal à M.

Remarque. Notons qu'une telle borne supérieure est forcément unique. De plus, si la borne supérieure M d'un ensemble A appartient à A, alors M est le plus grand élément de A.

Le résultat fondamental sur $\mathbb{R}$, qui peut même être vu comme faisant partie de sa définition, est le théorème suivant.

Théorème 7.1 (Propriété de la borne supérieure)**.** *Soit A un ensemble non vide et majoré. Alors A possède une borne supérieure.*

Un résultat tout aussi fondamental s'en déduit. Cet énoncé pourrait être au demeurant utilisé pour une définition alternative (mais équivalente) de $\mathbb{R}$.

Théorème 7.2 (des segments emboîtés)**.** *Soit (I_n) une suite de segments emboîtés, c'est-à-dire que chaque I_n est de la forme $[a_n, b_n]$ avec $a_n \leq b_n$ et que de plus $I_{n+1} \subset I_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Alors l'intersection $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} I_n$ est non vide, c'est-à-dire qu'il existe un point $x \in \mathbb{R}$ appartenant à tous les intervalles I_n.*

Rappelons au passage qu'un segment est, par définition, un intervalle borné et fermé des deux côtés.

Chapitre 8

Appendice 2 : L'intégrale définie

8.1 Existence d'une primitive et définition de l'intégrale

Théorème 8.1 (Existence d'une primitive)**.** *Soient I un intervalle ouvert non vide de $\mathbb{R}$ et $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction continue. Alors f admet une primitive sur I, i.e., il existe une fonction $F : I \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$ telle que*

$$\forall x \in I,\ F'(x) = f(x)\ .$$

Remarque. La fonction f admet en fait une infinité de primitives sur l'intervalle I, deux primitives ne différant que d'une constante.

Proposition 8.2. *Soient I un intervalle ouvert non vide de $\mathbb{R}$, $f : I \to \mathbb{R}$ et $g : I \to \mathbb{R}$ deux fonctions continues, et λ un nombre réel. Soient F une primitive de f sur I et G une primitive de g sur I. Alors*

i) $(F + G)$ est une primitive de $(f + g)$ sur I.

ii) λF est une primitive de λf sur I.

Démonstration. Il suffit de dériver. □

Dans le tableau de la page 56, on rappelle les primitives de quelques fonctions usuelles. Oui, il est nécessaire de les connaître.

Définissons maintenant l'intégrale d'une fonction sur un intervalle $[a, b]$:

Définition 8.3. Soient I un intervalle fermé borné de $\mathbb{R}$, $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction continue sur I, a et b deux points de I. L'intégrale de f entre a et b est définie par

$$\int_a^b f(x)\, dx = F(b) - F(a),$$

où F est une primitive de f sur $[a, b]$.

Remarques.

1. Comme deux primitives ne diffèrent que d'une constante, la quantité ci-dessus ne dépend pas du choix particulier de la primitive.

2. Si f est continue sur un intervalle ouvert I, alors, pour tout $a \in I$, une primitive de f est donnée par
$$\forall x \in I, \qquad F(x) = \int_a^x f(s)ds \;.$$

Voici quelques propriétés élémentaires de l'intégrale.

Proposition 8.4.

1. **Linéarité de l'intégrale** *Si f_1 et f_2 sont deux fonctions continues sur $[a,b]$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, alors*
$$\int_a^b (f_1+f_2)(x)\,dx = \int_a^b f_1(x)\,dx + \int_a^b f_2(x)\,dx \quad \text{et} \quad \int_a^b (\lambda f_1)(x)\,dx = \lambda \int_a^b f_1(x)\,dx \;.$$
2. **Relation de Chasles** *Si f est une fonction continue sur $[a,b]$ et $c \in [a,b]$, alors*
$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx \;.$$
3. **Positivité de l'intégrale** *Si f est une fonction continue sur $[a,b]$ et positive sur $[a,b]$, c'est-à-dire $\forall x \in [a,b],\ f(x) \geq 0$, alors $\int_a^b f(x)\,dx \geq 0$.*

Une conséquence importante du dernier point est que l'intégrale conserve la relation d'ordre ainsi que décrit dans le résultat suivant.

Proposition 8.5. *Soient f_1 et f_2 deux fonctions continues sur un intervalle sur $[a,b]$. Si*
$$\forall x \in [a,b]\,, f_1(x) \leq f_2(x) \text{ alors } \int_a^b f_1(x)\,dx \leq \int_a^b f_2(x)\,dx \;.$$

En particulier, on a toujours :

Proposition 8.6. *Si $a \leq b$, on a :*
$$\left| \int_a^b f(x)\,dx \right| \leq \int_a^b |f(x)|\,dx \;.$$

Démonstration. Comme $f \leq |f|$, on a $\int_a^b f(x)\,dx \leq \int_a^b |f(x)|\,dx$, et comme $-f \leq |f|$, on a aussi $-\int_a^b f(x)\,dx \leq \int_a^b |f(x)|\,dx$. D'où le résultat. □

8.2 Calcul d'intégrales

On possède deux outils principaux pour calculer une intégrale : l'intégration par parties et la formule de changement de variables.

Théorème 8.7 (Intégration par parties)**.** *Soient $[a,b]$ un intervalle de $\mathbb{R}$, $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[a,b]$ et $g : [a,b] \to \mathbb{R}$ continue sur $[a,b]$. Alors, si G est une primitive de g sur $[a,b]$, on a*
$$\int_a^b f(x)g(x)\,dx = [f(x)G(x)]_a^b - \int_a^b f'(x)G(x)\,dx \;,$$
où l'on a utilisé la notation classique $[f(x)G(x)]_a^b = f(b)G(b) - f(a)G(a)$.

Démonstration. Il suffit de remarquer que, comme $(fG)' = fG' + f'G = fg + f'G$, on a

$$[f(x)G(x)]_a^b = \int_a^b (fG)'(x)\,dx = \int_a^b f(x)g(x)\,dx + \int_a^b f'(x)G(x)\,dx\ .$$

□

Théorème 8.8 (Changement de variable)**.** *Soient $[a,b]$ et $[c,d]$ deux intervalles de $\mathbb{R}$, $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une application continue et $\varphi : [c,d] \to [a,b]$ une application de classe $\mathcal{C}^1$. Alors*

$$\int_c^d f(\varphi(x))\varphi'(x)\,dx = \int_{\varphi(c)}^{\varphi(d)} f(y)\,dy\ .$$

Démonstration. Soit F une primitive de f sur $[a,b]$. Alors $(F\circ\varphi)' = (f\circ\varphi)\varphi'$. Donc

$$\int_c^d f(\varphi(x))\varphi'(x)\,dx = [F\circ\varphi]_c^N = F(\varphi(d)) - F(\varphi(c)) = \int_{\varphi(c)}^{\varphi(d)} f(y)dy\ .$$

□

Un moyen mnémotechnique pour se souvenir de ce changement de variable est de poser $y = \varphi(x)$ et d'écrire que, formellement, $dy = \varphi'(x)\,dx$. On remplace alors systématiquement dans l'intégrale $\int_c^d f(\varphi(x))\varphi'(x)\,dx$, $\varphi(x)$ par y et $\varphi'(x)\,dx$ par dy. De plus, il ne faut pas oublier de changer les bornes d'intégration : quand x vaut c (resp. d), $y = \varphi(x)$ vaut $\varphi(c)$ (resp. $\varphi(d)$).

Remarque. Très souvent, on veut se servir de la formule de changement de variables dans l'autre sens : on connait $\int_c^d f(y)dy$, et on voudrait effectuer le changement de variables $x = \psi(y)$. Cela n'est possible que si ψ est une bijection $\mathcal{C}^1$ de $[a,b]$ sur son image, et d'inverse $\mathcal{C}^1$. Alors on peut écrire

$$\int_c^d f(y)dy = \int_{\psi^{-1}(a)}^{\psi^{-1}(b)} f(\psi^{-1}(x))(\psi^{-1})'(x)\,dx\ .$$

Fonction	Primitive(s)
$f(x) = e^x$	$F(x) = e^x + cte$
$f(x) = \cos(x)$	$F(x) = \sin(x) + cte$
$f(x) = \sin(x)$	$F(x) = -\cos(x) + cte$
$f(x) = x^\alpha$ (pour $\alpha \neq -1$ et $x > 0$)	$F(x) = \dfrac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + cte$
$f(x) = \dfrac{1}{x}$ (pour $x > 0$)	$F(x) = \log(x) + cte$
$f(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$	$F(x) = \arctan(x) + cte$

Table 8.1 – Quelques primitives classiques

Bibliographie

[Arn06] Vladimir I. Arnold. *Ordinary differential equations*. Universitext. Springer-Verlag, Berlin, 2006. Translated from the Russian by Roger Cooke, Second printing of the 1992 edition.

[Car61] Henri Cartan. *Théorie élémentaire des fonctions analytiques d'une ou plusieurs variables complexes*. Avec le concours de Reiji Takahashi. Enseignement des Sciences. Hermann, Paris, 1961.

[Kat04] Yitzhak Katznelson. *An introduction to harmonic analysis*. Cambridge Mathematical Library. Cambridge University Press, Cambridge, third edition, 2004.

[KLR16] Jean-Pierre Kahane and Pierre Gilles Lemarié-Rieusset. *Séries de Fourier et ondelettes*, volume 3 of *Nouvelle Bibliothèque Mathématique [New Mathematics Library]*. Cassini, Paris, second edition, 2016.