Université Paris-Dauphine
Analyse 3 (L2)

Année universitaire 2019-2020

FEUILLE 4 : SÉRIES ENTIÈRES

---

1 Rayon de convergence

Exercice 1. Déterminer le rayon de convergence des séries entières suivantes :

1. $\sum_{n\geq 1} \frac{2^n n^n}{(2n)!} z^n$,
2. $\sum_{n\geq 0} \frac{\sqrt{n}}{n^2+1} z^n$,
3. $\sum_{n\geq 1} \frac{\mathrm{ch}(n)}{\mathrm{sh}(n)^2} z^n$,
4. $\sum_{n\geq 1} \left(1 + \frac{(-1)^n}{n}\right)^n z^n$,
5. $\sum_{n\geq 1} \left(\frac{\sin(\frac{1}{n})}{\ln(1+\frac{1}{n})}\right)^n z^n$,
6. $\sum_{n\geq 1} (-1)^n \frac{n^n}{n!} z^{2n}$,
7. $\sum_{n\geq 0} c_n z^n$, où c_n est le nombre de chiffres de n en base 10.
8. $\sum_{n\geq 0} \frac{a(a+1)\ldots(a+n-1)}{n!} z^n$,
9. $\sum_{n\geq 0} (a^n - 1) z^n$,
10. $\sum_{n\geq 0} \ln(1 + a^n) z^n$.

Exercice 2. Après avoir déterminé l'éventuel rayon de convergence, calculer les sommes des séries entières suivantes sur le disque ouvert de convergence :

1. $\sum_{n\geq 0} (2^n + 3^n) z^n$,
2. $\sum_{n\geq 0} (3n + 1) z^{3n}$,
3. $\sum_{n\geq 0} \frac{z^{4n}}{(2n)!}$,
4. $\sum_{n\geq 0} \sin(n) z^n$,
5. $\sum_{n\geq 0} \frac{4^n}{n+1} z^{n+1}$,
6. $\sum_{n\geq 0} \frac{\cos(n)}{n!} z^n$.

Exercice 3. Soit $\sum_{n\geq 0} a_n z^n$, une série entière de rayon de convergence R.

1. (a) Soit $b_n = a_n^2$, $n \in \mathbb{N}$. Montrer que le rayon de convergence de la série entière $\sum\limits_{n\geq 0} b_n z^n$ est égal à R^2.
   (b) En déduire le rayon de convergence de la série entière $\sum\limits_{n\geq 0} \sin^2(\frac{1}{3^n}) z^n$.
2. (a) Soit $b_{2n} = a_n$, et $b_{2n+1} = 0$, $n \in \mathbb{N}$. Montrer que le rayon de convergence de la série entière $\sum\limits_{n\geq 0} b_n z^n$ est égal à $\sqrt{R}$.
   (b) En déduire le rayon de convergence de la série entière $\sum\limits_{n\geq 0} \ln(1 + \frac{1}{2^n}) z^{2n}$.

2 Propriétés de la somme et problèmes au bord

Exercice 4. On considère la série entière $\sum\limits_{n\geq 2} \frac{(-1)^n}{n(n-1)} z^n$.

1. Déterminer le disque de convergence de cette série entière, de sa série dérivée et de sa série dérivée seconde.
2. En formant une équation différentielle qu'elle satisfait, calculer la valeur de sa somme S.
3. En déduire la valeur de
$$I = \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n(n-1)}.$$

Exercice 5. Soit $S(z) = \sum_{n\geq 0} a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence 1. On suppose de plus que $S(z)$ admet une limite lorsque z tend vers 1^- et on note ℓ cette limite.

1. La série $\sum_n a_n$ est-elle nécessairement convergente ?
2. On suppose désormais que $a_n \geq 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Démontrer que la série $\sum_n a_n$ converge et que $\ell = \sum_{n\geq 0} a_n$.

Exercice 6. Soit $a > 0$.

1. Rayon de convergence et somme de
$$\sum_{n\geq 0} \frac{(-1)^n z^n}{an+1}.$$
2. Montrer que pour tout $b > 0$,
$$\int_0^1 \frac{dt}{1+t^b} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{1+nb}.$$
3. En déduire les sommes
$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n+1} \quad \text{et} \quad \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1}.$$

Exercice 7. Soit
$$f : x \mapsto \sum_{n=1}^{+\infty} \sin\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) z^n.$$

1. Déterminer le rayon de convergence R de la série entière définissant f.
2. Etudier la convergence en $-R$ et en R.
3. (a) Soit $M > 0$. Montrer qu'il existe un entier $N \geq 1$ et un réel $\delta > 0$ tel que, pour tout $z \in]1-\delta, 1[$, alors
$$\sum_{n=1}^{N} \sin\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) z^n \geq M.$$
   (b) En déduire la limite de $f(z)$ quand $z \to 1^-$.
4. (a) On considère la série entière
$$g : z \mapsto \sum_{n=2}^{+\infty} \left[\sin\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) - \sin\left(\frac{1}{\sqrt{n-1}}\right)\right] z^n.$$
   Démontrer que cette série converge normalement sur $[0, 1]$.
   (b) En déduire que $\lim_{z\to 1^-}(1-z)f(z) = 0$.

3 Applications des séries entières

Exercice 8. Pour chaque $k \in \mathbb{N}^*$, on introduit la série de fonctions

$$F_k(z) = \sum_{n=0}^{\infty} z^{kn}.$$

1. Expliquer pourquoi il s'agit d'une série entière. Déterminer son rayon de convergence et sa somme, quel que soit $k \in \mathbb{N}^*$.
2. (a) Montrer que la fonction $F_1F_2F_5$ admet un développement en série entière :

$$F_1(x)F_2(x)F_5(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n.$$

Quel est le rayon de convergence de cette série entière ?

(b) Calculer le nombre de façons de payer 11 euros en pièces de 1 et 2 euros et en billets de 5 euros.

Exercice 9. On considère l'équation différentielle ordinaire

$$y'' - 2xy' - 2y = 0. \tag{1}$$

1. Déterminer les solutions développables en série entière de l'équation (1).
2. Soit y une solution de l'équation (1), définie et de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$.

   (a) Montrer que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \frac{d}{dx}\left(e^{x^2}\frac{d}{dx}\left(e^{-x^2}y(x)\right)\right) = 0.$$

   (b) En déduire l'ensemble des solutions de l'équation (1).

Exercice 10. On considère la fonction f définie sur $]-1,1[$ par

$$\forall x \in]-1,1[, \qquad f(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

1. Montrer que f est l'unique solution de l'équation différentielle

$$(1-x^2)y' - xy = 0, \; y(0) = 1.$$

2. En déduire que f est développable en série entière sur $]-1,1[$, et déterminer son développement en série entière.

Exercice 11. Déterminer les solutions développables en série entière des équations différentielles suivantes, en les exprimant avec des fonctions usuelles.

$$\begin{cases}(1+x^2)y'' + 2xy' = 2,\\ y(0) = y'(0) = 0,\end{cases} \qquad \begin{cases}xy'' + 2y' + xy = 0,\\ y(0) = 1, y'(0) = 0\end{cases} \qquad \begin{cases}y' - x^2y = 0,\\ y(0) = 1.\end{cases}$$

$$(1-x^2)y' - \alpha xy = 0, \quad \alpha \in \mathbb{R}, \qquad xy'' + 3y' - 4x^3y = 0, \qquad xy' - y = \frac{x^2}{1-x}.$$

Exercice 12. Montrer que les fonctions suivantes sont développables en série entière, et calculer leur développement.

$$e^x\cos(x), \quad \frac{\ln(1+x)}{x}, \quad \frac{2}{x^2-4x+3}, \quad \int_0^x e^{-t^2}\,dt, \quad \ln(1+x+x^2).$$