Université Paris-Dauphine
Année universitaire 2019-2020
Analyse 3, Licence MIE, 2ème année

Chapitre 4 : Suites et séries de fonctions

Suites de fonctions

Exercice 1. Soit $f_n(x) = \frac{e^{nx}+2}{e^{nx}+1}$, pour $x \in \mathbb{R}$. Montrer que la suite (f_n) converge simplement mais pas uniformément sur $\mathbb{R}$ vers la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par:

$$\begin{cases} f(x) = 2 \text{ si } x < 0 \\ f(0) = \frac{3}{2} \\ f(x) = 1 \text{ si } x > 0 \end{cases}$$

Exercice 2. Soit $f_n(x) = (1 + x^n)^{\frac{1}{n}}$, pour $x \in \mathbb{R}^+$.

1) Montrer que (f_n) converge simplement sur $\mathbb{R}^+$ vers une fonction f à déterminer

2) Montrer que pour $\alpha \in [0, 1]$ et $x \geq 0$, on a : $(1 + x)^\alpha \leq 1 + \alpha x$.

3) En déduire que (f_n) converge uniformément sur $[0, 1]$ vers f.

4) Montrer que (f_n) converge uniformément vers f aussi sur $[1, +\infty[$ et conclure.

Exercice 3. Soit $f_n(x) = n \sin\left(\frac{x}{n+1}\right)$, pour $x \in \mathbb{R}$.

1) Montrer que (f_n) converge simplement sur $\mathbb{R}$.

2) La convergence est-elle uniforme sur $\mathbb{R}$? (On pourra regarder $f_n(x_n)$ avec $x_n = (n + 1)\frac{\pi}{2}$)

Exercice 4. Soit $f_n(x) = \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n$, pour $x \in \mathbb{R}^+$.

1) Montrer que (f_n) converge simplement sur $\mathbb{R}^+$ vers la fonction f définie sur $\mathbb{R}^+$ par $f(x) = e^x$.

2) Montrer que la convergence est uniforme sur $[0, A]$, quel que soit $A > 0$.

3) A-t-on convergence sur $\mathbb{R}^+$?

Exercice 5. Etudier la convergence simple et uniforme sur $[0, 1]$ de la suite de fonctions (f_n) dans chacun des cas suivants.

$$(i)\ f_n(x) = \frac{x^n}{\sqrt{n+1}}, \qquad (ii)\ f_n(x) = n^2 x^{2n}(1 - x).$$

Exercice 6. On considère la suite de fonctions (f_n) définies sur $[0, 1]$ par,

$$\forall x \in [0, 1], \quad f_n(x) = \frac{n(x^3 + x)e^{-x}}{nx + 1}.$$

1) Montrer que (f_n) converge simplement sur $[0, 1]$ vers une fonction f que l'on déterminera.

2) Montrer que, pour tout entier $n \geq 1$, et pour tout $x \in [0,1]$,

$$|f_n(x) - f(x)| \leq \frac{2}{nx+1}.$$

3) Montrer que (f_n) converge uniformément vers f sur $[\varepsilon, 1]$, pour tout $\varepsilon \in]0,1[$. Converge-t-elle uniformément sur $[0,1]$?

4) Calculer (et commenter le résultat)

$$\lim_{n\to+\infty} \int_0^1 f_n(x)dx.$$

Exercice 7. On considère la famille de fonctions $(f_{k,n})$ pour k et n entiers, définies sur $[0,1]$ par :

$$\forall x \in [0,1], \quad f_{k,n}(x) = \sin(k!2\pi x)^{2n}.$$

1) Montrer que pour k fixé, lorsque n tend vers $+\infty$, $(f_{k,n})$ converge simplement sur $[0,1]$ vers une fonction g_k que l'on déterminera.

2) Montrer que lorsque k tend vers $+\infty$, g_k converge simplement vers une fonction g que l'on déterminera.

3) Les convergences précédentes sont-elles uniformes ?

Exercice 8. Soit (f_n) la suite de fonctions définies sur $[0,1]$ par,

$$\forall x \in [0,1], \quad f_n(x) = x^n \ln(\cos x).$$

1) Montrer que la suite de fonctions (f_n) converge simplement mais pas uniformément sur $[0,1]$.

2) Soit $0 < a < 1$. Montrer que (f_n) converge uniformément sur $[0,a]$ et déterminer

$$\lim_{n\to+\infty} \int_0^a f_n(x)dx.$$

3) Montrer que

$$\lim_{n\to+\infty} \int_0^1 x^n \ln(\cos x)dx = 0.$$

Exercice 9.

Soit (f_n) la suite de fonctions définies sur $\mathbb{R}^+$ par

$$f_n(x) = \begin{cases} \left(1 - \frac{x}{n}\right)^n, \text{ si } x \in [0,n], \\ 0 \text{ si } x > n. \end{cases}$$

1) Montrer que (f_n) converge simplement sur $\mathbb{R}^+$ vers la fonction e^{-x}.

2) a) Soit, pour tout $x \geq 0$, $h(x) = xe^{-x}$. Montrer que, pour tout $x \geq 0$,

$$|h(x)| \leq e^{-1}.$$

b) Pour $n > 1$, on pose

$$g_n(x) = \begin{cases} e^{-x} - \left(1 - \frac{x}{n}\right)^n, \text{ si } x \in [0, n], \\ e^{-x} \text{ si } x > n. \end{cases}$$

Montrer que, pour tout $x \in [0, n]$, $g_n'(x) = e^{-x} h_n(x)$, avec

$$h_n(x) = -1 + e^x \left(1 - \frac{x}{n}\right)^{n-1}.$$

c) Calculer $h_n'(x)$, pour $x \in [0, n]$. En déduire qu'il existe $\alpha_n \in [1, n]$ tel que

$$g_n'(\alpha_n) = 0; \qquad \forall x \in [0, \alpha_n[,\ g_n'(x) > 0; \qquad \forall x \in]\alpha_n, n],\ g_n'(x) < 0.$$

d) Montrer que $g_n(\alpha_n) = \frac{1}{n}\alpha_n e^{-\alpha_n}$ et donner le tableau de variation de g_n sur $\mathbb{R}^+$.

e) En déduire que (f_n) converge uniformément vers e^{-x} sur $\mathbb{R}^+$ et calculer

$$\lim_{n \to +\infty} \int_0^{+\infty} f_n(x) dx.$$

Exercice 10. On note $I = [0, \frac{1}{2}]$. Le but de l'exercice est de construire une application continue $f : I \to \mathbb{R}$, telle que

$$\forall x \in I, \quad f(x) = 1 + \frac{1}{2} \int_0^x \left(f(t) + f(t^2)\right) dt.$$

On considère les applications $f_n : I \to \mathbb{R}$ définies par récurrence:

$$\begin{cases} f_0(x) = 1, \quad \forall x \in I, \\ f_{n+1}(x) = 1 + \frac{1}{2} \int_0^x \left(f_n(t) + f_n(t^2)\right) dt. \end{cases}$$

1) Calculer f_1 et f_2. Montrer que, pour tout entier n, f_n est un polynôme.

2) On note, pour $n \geq 1$,

$$D_n = \sup_{x \in I} |f_n(x) - f_{n-1}(x)|.$$

Calculer D_1 et D_2. Montrer que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \forall x \in I, \quad |f_{n+1}(x) - f_n(x)| \leq \frac{1}{2} D_n,$$

et en déduire que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$D_n \leq \frac{1}{2^n}.$$

3) On pose $u_k(x) = f_k(x) - f_{k-1}(x)$.

a) Soit x fixé dans I. Montrer que la série numérique $\sum_k u_k(x)$ est absolument convergente.

b) On note, pour tout $x \in I$, $S(x) = \sum_{k \geq 1} u_k(x)$. En remarquant que

$$S_n(x) = \sum_{k=1}^{n} u_k(x) = f_n(x) - 1,$$

montrer que la suite (f_n) converge simplement sur I vers une fonction que l'on notera f. Donner l'expression de $f(x)$ en fonction de $S(x)$.

4) Montrer que, pour tout $x \in I$, et pour tout $p > n$,

$$|f_p(x) - f_n(x)| = \left| \sum_{k=n+1}^{p} u_k(x) \right| \leq \frac{1}{2^n}.$$

En déduire que (f_n) converge uniformément sur I vers f, et que f répond à la question posée.

Exercice 11.* Soit $(f_n) : [a,b] \to \mathbb{R}$ une suite de fonctions pour laquelle il existe $K > 0$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$, f_n est "K-lipschitzienne", c'est-à-dire :

$$\forall x, y \in [a,b], \quad |f_n(x) - f_n(y)| \leq K|x - y|.$$

On suppose de plus que (f_n) converge simplement vers une certaine fonction $f : [a,b] \to \mathbb{R}$. Montrer cette convergence est uniforme.

Exercice 12.* (Deuxième théorème de Dini) Soit $(f_n) : [a,b] \to \mathbb{R}$ une suite de fonctions croissantes, qui converge simplement vers une fonction f. On suppose de plus que f est continue. Montrer que (f_n) converge uniformément vers f.

Séries de fonctions

Exercice 13. Soit, pour n entier, et pour $x \in]-1,1[$, $u_n(x) = nx^n$. Montrer que la série de fonctions $\sum u_n$ converge simplement sur $]-1,1[$ et uniformément sur tout intervalle de la forme $[-1+\varepsilon, 1-\varepsilon]$ vers une fonction u à déterminer.

Exercice 14. Soit f une fonction continue sur $]-1,1[$. On considère la suite de fonctions (f_n) définies sur $]-1,1[$ par

$$f_0 = f \text{ et } f_{n+1}(x) = \int_0^x f_n(t)dt.$$

1) Montrer que la série de fonctions $\sum f_n$ converge normalement sur $[-a,a]$ pour tout $0 < a < 1$.

2) Exprimer la somme de cette série en fonction de f.

Exercice 15. Soit $\forall (n,x) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{R}, u_n(x) = \frac{(-1)^n}{n^2+x^2}$.

1) Montrer la convergence normale de la série de fonctions de terme général u_n sur $\mathbb{R}$.

2) Soit u sa fonction somme. En déduire la continuité de la fonction u sur $\mathbb{R}$.

3) Montrer que la fonction u est dérivable sur $\mathbb{R}$ et que sa dérivée est donnée par

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad u'(x) = -2x \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(n^2+x^2)^2}.$$

Exercice 16. Soit $\forall (n,x) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{R}$, $u_n(x) = \frac{\sin(nx)}{n^3}$.

1) Montrer la convergence normale de la série de fonctions de terme général u_n sur $\mathbb{R}$.

*Exercice difficile, à n'aborder que si vous avez fait tous les exercices non signalés comme difficiles.

2) Soit u sa limite. Calculer la limite de $u(x)$ lorsque x tend vers 0.

3) Prouver que

$$\int_0^{\pi} u(x)\,dx = 2\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(2n-1)^4}.$$

On donne $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^4} = \frac{\pi^4}{90}$. En déduire $\int_0^{\pi} u(x)\,dx$.

4) Montrer que la fonction u est dérivable sur $\mathbb{R}$ et que sa dérivée est donnée par

$$\forall x \in \mathbb{R},\ u'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\cos(nx)}{n^2}.$$

Exercice 17. Soit $-1 < a < 1$. On considère la suite de fonctions $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ donnée par

$$\forall t \in [0, \frac{\pi}{2}],\ u_n(t) = (\cos t)^n a^n.$$

1) Montrer que la série de fonctions $\sum u_n$ converge uniformément sur $[0, \pi/2]$.

2) En déduire que

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dt}{1 - a\cos(t)} = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(t)^n dt \right) a^n.$$

Exercice 18. On considère la fonction zêta de Riemann donnée par

$$\forall x > 1,\quad \zeta(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^x}.$$

1) Montrer qu'elle est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]1, +\infty[$.

2) Montrer que

$$\forall x > 1,\ \frac{1}{x-1} \leq \zeta(x) \leq \frac{1}{x-1} + 1.$$

En déduire la limite de la fonction ζ en 1.

Exercice 19. Soit $a \in]-1, 1[$. Montrer que la série

$$\sum_{k=0}^{\infty} \sin(a^k x)$$

est uniformément convergente sur tout segment de $\mathbb{R}$. Notons $f(x)$ la somme. Montrer que la fonction f est de classe C^∞.

Exercice 20. Soit

$$\forall x \in \mathbb{R},\ S(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x}{1 + n^2 x^2}.$$

1) Montrer que S est définie sur $\mathbb{R}$ et impaire.

2) Montrer que S est continue sur $\mathbb{R}^*$.

3) Montrer que

$$\forall x > 0, \frac{\pi}{2} \leq S(x) \leq \frac{\pi}{2} + x.$$

En déduire que S admet des limites à droite et à gauche en 0, mais n'y est pas continue.

4) Montrer que S est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^*$.

Exercice 21.[*] Soit $(f_n) : [a, b] \to \mathbb{R}$ et $(g_n) : [a, b] \to \mathbb{R}$ deux suites de fonctions. On suppose que la série de terme général f_n est uniformément convergente. On suppose d'autre part que la suite (g_n) est uniformément bornée, c'est-à-dire :

$$\exists M > 0,\ \forall n \in \mathbb{N},\ \forall x \in [a, b],\ |g_n(x)| \leq M,$$

et telle que pour tout x, la suite $(g_n(x))$ est croissante.

Montrer que la série de terme général $f_n g_n$ est uniformément convergente.

[*] Exercice très difficile, à n'aborder que si vous avez fait tout le reste.