Université Paris-Dauphine
Année universitaire 2019-2020
Analyse 3, Licence MIE 2ème année

Rappels : Équivalents et développements limités

Exercice 1. Déterminer un équivalent simple des suites suivantes :

$$(i)\ \forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_n = \frac{\ln(n+1)}{n} - \frac{\ln(n)}{n+1},\quad (ii)\ \forall n \in \mathbb{N}^*,\ v_n = \left(n \sin\left(\frac{1}{n}\right)\right)^n,$$
$$(iii)\ \forall n \in \mathbb{N}^*,\ w_n = \sqrt{\ln(n+1)} - \sqrt{\ln(n)},\quad (iv)\ \forall n \in \mathbb{N}^*,\ x_n = n^{\frac{1}{1+n^2}} - 1.$$

Exercice 2. Déterminer un développement au second ordre des suites suivantes :

(i) $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_n = \frac{(-1)^n}{n+(-1)^n \ln(n)}$,

(ii) $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ v_n = (\frac{\ln(n+1)}{\ln(n)} - 1)^\alpha$, où $\alpha > 0$,

(iii) $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ w_n = \frac{e^{\frac{2}{n}}-1}{\sin(\frac{1}{n})}$.

Exercice 3. (Extrait du CC1 2017) Donner un équivalent lorsque n tend vers $+\infty$ aux suites definies ci-dessous :

1. $u_n = \ln(1 + (1+n^{-2})^{2/3})$,
2. $v_n = \dfrac{\cos(\frac{1}{n})}{n\sin(\frac{1}{n}) + \ln(1+n)}$,
3. $w_n = \dfrac{e^{\frac{2}{\sqrt{n}}} - 1 - \frac{2}{\sqrt{n}}}{\sin(\frac{1}{n}) - \frac{1}{n}}$,
4. $x_n = \sqrt{1 + \ln\left(1 + \dfrac{1}{n}\right)} - 1 - \dfrac{1}{2n}$.

Exercice 4. (Extrait du partiel 2017) Donner un équivalent lorsque n tend vers $+\infty$ aux suites definies ci-dessous, en fonction du paramètre quand il y en a un :

1. $u_n = \sqrt{1 + \ln\left(1 + \dfrac{1}{n}\right)} - 1 - \dfrac{1}{2n}$,
2. $v_n = n^3 \sin\left(\dfrac{1}{n} - \dfrac{1}{n^3}\right) - n^2$,
3. $x_n = \dfrac{\ln(1+\alpha^n)}{\sqrt{1 + n\ln n + \cos(n)}}$ où $\alpha > 0$ est fixé.