Université Paris-Dauphine
J. Féjoz

Analyse 3
Octobre 2019

Partiel

Durée : 2h — Sans document ni appareil électronique.
Les réponses doivent être justifiées mais ***concises****.*
Mentionner les erreurs d'énoncé éventuelles.
Chaque question est sur 3 points.

1. Soient (u_n) et (v_n) deux suites équivalentes, à termes positifs. Montrer que $\sum u_n$ converge si et seulement si $\sum v_n$ converge.

Solution. Comme $u_n \sim v_n$, il existe un rang N à partir duquel

$$\frac{v_n}{2} \leqslant u_n \leqslant 2v_n.$$

En sommant, si l'on note $U_n = u_0 + \cdots + u_n$ et $V_n = v_0 + \cdots + v_N$, pour tout $n \geqslant N$ on a donc

$$\frac{1}{2}(V_n - V_N) \leqslant U_n - U_N \leqslant 2(V_n - V_N), \tag{1}$$

donc (U_n) et (V_n) convergent ou divergent simultanément.

2. Montrer que si les séries précédentes divergent, les sommes partielles sont équivalentes. Est-ce encore le cas si les séries convergent ?

Solution. Supposons que les séries divergent. Nous allons raffiner l'encadrement (1). Soit $\epsilon > 0$. Il existe un rang N à partir duquel

$$|u_n - v_n| \leqslant \epsilon v_n, \tag{2}$$

donc

$$\begin{aligned}
|(U_n - U_N) - (V_n - V_N)| &= \left|\sum_{N+1}^{n} (u_n - v_n)\right| \\
&\leqslant \sum_{N+1}^{n} |u_n - v_n| \qquad \text{(inégalité triangulaire)} \\
&\leqslant \epsilon(V_n - V_N) \qquad \text{(d'après (2))}.
\end{aligned}$$

D'après l'inégalité triangulaire encore,

$$|U_n - V_n| \leqslant \epsilon V_n + (|U_N - V_N| - \epsilon V_N).$$

Comme le terme entre parenthèse ne dépend pas de n et que $V_n \to \infty$, il existe un rang $N' \geqslant N$ à partir duquel

$$|U_N - V_N| - \epsilon V_N \leqslant \epsilon V_n,$$

et donc
$$|U_n - V_n| \leqslant 2\epsilon V_n.$$
Donc $U_n \sim V_n$.

Si les séries convergent, la dernière étape de la démonstration précédente (existence de N') tombe à l'eau, et donne l'idée de contre-exemples, par exemple celui où
$$u_0 = 1, \quad u_{n+1} = 0, \quad v_n = 0 \quad (\forall n \in \mathbb{N}).$$
Les deux suites (u_n) et (v_n) sont identiquement nulles à partir de $n = 1$, donc sont équivalentes, tandis que leurs sommes partielles sont des constantes distinctes :
$$U_n = u_1 = 1 \not\sim V_n = 0.$$

3. Les suites suivantes sont-elles les termes généraux de séries convergentes :
$$a_n = \frac{1}{\ln n}, \quad b_n = \frac{(-1)^n}{\ln n}, \quad c_n = \frac{(-1)^n}{\ln n + (-1)^n} \text{ ?}$$

Solution. Pour tout $n \geqslant 1$, $1/n \leqslant a_n = 1/\ln n$. Comme $\sum 1/n$ diverge, il en est de même de $\sum a_n$.

La suite $|b_n| = 1/\ln n$ décroît vers 0, donc la série $\sum b_n$ est alternée, donc elle converge.

On remarque que $c_n \sim (-1)^n/\ln n$, mais on ne peut pas en conclure ainsi que $\sum c_n$ converge parce que (c_n) n'est pas de signe constant. Par ailleurs $\sum c_n$ n'est pas alternée, parce que quand n est assez grand $|\ln(n+1) - \ln n| < 1$ donc la valeur absolue du terme général n'est pas décroissante. Les sommes partielles vérifient par exemple
$$\begin{aligned} C_{2n+2} - C_{2n} &= \frac{1}{\ln(2n+2)+1} - \frac{1}{\ln(2n+1)-1} < 0 \\ &\sim \frac{-2}{(\ln n)^2}, \end{aligned}$$
donc la série de terme général $\sum(C_{2n+2} - C_{2n})$ diverge (parce que $1/(\ln n)^2 \gg 1/n$, par exemple), donc la suite (C_n) ne converge pas dans $\mathbb{R}$, donc $\sum c_n$ diverge.

4. Même question avec les suites suivantes $(0 < \alpha < 1)$:
$$d_n = \alpha^{\sqrt{n}}, \quad e_n = \frac{(2n)!}{(n!)^2}, \quad f_n = \left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2}.$$

Solution. On a
$$\ln\left(n^2\alpha^{\sqrt{n}}\right) = \sqrt{n}\ln\alpha\left(1 + \frac{2\ln n}{\sqrt{n}\ln\alpha}\right) \sim \sqrt{n}\ln\alpha \to -\infty,$$

donc

$$d_n = \alpha^{\sqrt{n}} = o\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

Donc, comme la série de Riemann $\sum 1/n^2$ converge, il en va de même de $\sum d_n$.

On a

$$\frac{e_{n+1}}{e_n} = \frac{(2n+2)(2n+1)}{(n+1)^2} \to 4 > 1,$$

donc, d'après le critère de d'Alembert, $\sum e_n$ diverge.

Enfin,

$$f_n^{1/n} = \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n = \exp\left(n \ln\left(1 - \frac{1}{n}\right)\right) = \exp\left(-1 + o(1)\right) \to \frac{1}{e} < 1,$$

donc, d'après le critère de Cauchy, $\sum f_n$ converge.

5. Trouver $a, b \in \mathbb{R}$ tels que

$$\sin x - x\frac{1 + ax^2}{1 + bx^2} = o(x^6).$$

Solution. D'une part,

$$\sin x = x\left(1 - \frac{x^2}{6} + \frac{x^4}{120}\right) + o(x^6).$$

D'autre part,

$$x\frac{1 + ax^2}{1 + bx^2} = x\left(1 + (a-b)x^2 + b(a-b)x^4\right) + o(x^6).$$

Les deux parties régulières coïncident si et seulement si

$$a - b = -\frac{1}{6}, \quad b(a-b) = \frac{1}{120},$$

soit

$$a = -\frac{13}{60}, \quad b = -\frac{1}{20}.$$

6. Un réel $s \in [0, 1[$ étant donné, trouver un équivalent de $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^s}$.

Solution. Si $k \leqslant t \leqslant k + 1$,

$$\int_k^{k+1} \frac{dt}{t^s} \leqslant \frac{1}{k^s} \leqslant \int_{k-1}^{k} \frac{dt}{t^s},$$

soit

$$\frac{1}{s-1}\left((k+1)^{1-s} - k^s\right) \leqslant \frac{1}{k^s} \leqslant \frac{1}{s-1}\left(k^{1-s} - (k-1)^s\right)$$

où l'inégalité de gauche est vrai si $k \geqslant 0$ tandis que celle de droite l'est si $k \geqslant 1$. Donc, en sommant,

$$\frac{1}{1-s}\left((n+1)^{1-s}-1\right) \leqslant \sum_{1}^{n} \frac{1}{k^s} = 1 + \sum_{2}^{n} \frac{1}{k^s} \leqslant 1 + \frac{1}{1-s} n^{1-s}.$$

Les membres de gauche et de droites sont tous deux équivalents à $\frac{n^{1-s}}{1-s}$, donc

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^s} \sim \frac{n^{1-s}}{1-s}.$$

7. Soient $\sum u_n$ une série à termes > 0 et $s > 0$ tels que la suite

$$n^2\left(\frac{u_{n+1}}{u_n} - 1 + \frac{s}{n}\right)$$

soit bornée. Pour quelles valeurs de s la série converge-t-elle ? *Indication :* On pourra étudier $\sum(v_{n+1} - v_n)$, avec $v_n = \ln(n^s u_n)$.

Solution. Notons

$$b_n = n^2\left(\frac{u_{n+1}}{u_n} - 1 + \frac{s}{n}\right),$$

de sorte que

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = 1 - \frac{s}{n} + \frac{b_n}{n^2}.$$

Alors

$$v_{n+1} - v_n = \ln\left[\left(1+\frac{1}{n}\right)^s \left(1 - \frac{s}{n} + \frac{b_n}{n^2}\right)\right].$$

Développons à l'ordre 2 :

$$v_{n+1} - v_n = \frac{b_n - s/2 - s^2}{n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

Donc $\sum(v_{n+1} - v_n)$ converge absolument, donc converge, disons vers une limite ℓ, donc (v_n) converge vers ℓ, donc

$$u_n \sim \frac{\ell'}{n^s}, \quad \ell' = e^{\ell}.$$

Donc $\sum u_n$ converge si et seulement si $s > 1$.