

EXAMEN CORRIGÉ ET COMMENTÉ

Comme indiqué dans le sujet, chaque réponse doit être

- justifiée (par exemple, répondre “non” sans justification, dans la question 1.b, n’apporte aucun point)
- et concise (a fortiori, le fait d’accumuler plusieurs réponses ou bouts de réponses pour une même question joue négativement, combien même l’une de ces réponses fût correcte).

Chaque question a été notée sur 2 points, ce qui fait un barème sur 24 points (en incluant les 4 points des deux questions facultatives, plus difficiles et qui n’ont en fait jamais été traitées correctement). Néanmoins, comme l’énoncé était long, les notes ainsi obtenues ont ensuite été ajustées (avec la contrainte de ne pas modifier les notes proches de 0 ou de 20/20, et de minimiser les discontinuités), de la façon suivante :

- les notes initialement entre 4 et 7 ont été majorées de 1 point
- celles entre 8 et 11, de 2 points
- celles entre 12 et 16, de 1 point.

Un point a été ajouté aux copies dont la rédaction est particulièrement claire et concise. Les notes finales vont de 0 à 20/20, avec une moyenne de 8,25.

1. QUESTIONS INDÉPENDANTES

Les premières questions ont été très mal traitées et montrent dans beaucoup de copies

- la mécompréhension de la notation $o(u_n)$ (beaucoup de copies affirment à tort que $1/n = o(1/n)$ ou que $1/(2n) = o(1/n)$)
- l’incapacité à nier une proposition logique (la négation du fait qu’une fonction a une limite nulle n’est pas que la fonction a une limite non nulle, parce que la fonction peut très bien ne pas avoir de limite)
- la mécompréhension du critère de Riemann, souvent utilisé dans le mauvais sens (si $u_n = 1/n^\alpha$ avec $\alpha > 0$, alors $\sum u_n$ converge, mais la réciproque est fausse)
- la naïveté (naturelle) de penser qu’il existe un comportement limite pour le terme général d’une série, qui départage les séries convergentes des séries divergentes (voir le commentaire de la question 1.b à ce sujet).

Dans les deux premières questions, (u_n) est une suite positive décroissante.

a. Montrer que si $\sum u_n$ converge, $u_n = o(1/n)$.

Réponse. La suite des sommes partielles de la série est de Cauchy, donc par exemple

$$s_n = \sum_{k=n+1}^{2n} u_k \rightarrow 0.$$

Or (u_n) est décroissante, donc

$$0 \leftarrow s_n \geq \sum_{k=n+1}^{2n} u_{2k} = n u_{2n}$$

donc $\frac{u_{2n}}{1/(2n)} \rightarrow 0$.

Il reste à montrer l'analogie pour les termes de rang impairs. Mais

$$(2n+1) u_{2n+1} \leq (2n+1) u_{2n} = \frac{2n+1}{2n} 2n u_{2n} \rightarrow 0$$

(parce que $(2n+1)/(2n) \rightarrow 1$ et $2n u_{2n} \rightarrow 0$), d'où la conclusion.

Commentaire. Beaucoup de copies ont ici prétendu déduire la propriété demandée du fait que $u_n \rightarrow 0$, sans utiliser explicitement la décroissance de (u_n) . Mais cet argument ne tient pas et, sans l'hypothèse de décroissance, la conclusion n'est pas toujours vérifiée. En effet, prenons une suite (u_n) telle que u_n soit très souvent nul, mais de temps en temps égal à $1/n$. (Une telle suite n'est pas décroissante.) Si (u_n) est non nulle suffisamment peu souvent (disons, pour les n de la forme $n = 2^k$), la série $\sum u_n = \sum_k 2^{-k}$ converge (notre suite (u_n) est obtenue à partir de la suite géométrique (2^{-k}) simplement en intercalant des zéros, ce qui ne change pas la somme de la série associée). Mais comme $u_{2^k} = 1/2^k$, on n'a certainement pas $u_n = o(1/n)$.

b. Si $u_n = o(1/n)$, $\sum u_n$ converge-t-elle ?

Réponse. Prenons $u_n = \frac{1}{n \ln n}$. D'une part,

$$\frac{u_n}{1/n} = \frac{1}{\ln n} \rightarrow 0.$$

D'autre part, $\sum \frac{1}{n \ln n}$ diverge (série de Bertrand).

Commentaire. La série peut bien sûr converger, comme l'exemple trivial $u_n = 0$ le montre. (Beaucoup de copies ont néanmoins prétendu montrer que la série ne converge jamais, en contradiction avec une simple hypothèse de petitesse.) La difficulté et la véritable question étaient de déterminer s'il existe une série divergente satisfaisant l'hypothèse de petitesse.

Les suites $u_n = 1/n$ ou $u_n = 1/(2n)$ ne sont pas négligeables devant $1/n$ (contrairement à ce que beaucoup de copies affirment) et ne sont donc pas des contre-exemples.

En réalité, on a le fait plus général suivant :

Soit $\sum v_n$ une série divergente à termes positifs. Alors il existe une série $\sum w_n$ divergente à termes positifs telle que $w_n = o(v_n)$, comme la factorisation suivante le montre, où l'on note $V_n = v_0 + \dots + v_n$:

$$\begin{aligned} v_n &= V_n - V_{n-1} \\ &= \underbrace{\left(\sqrt{V_n} - \sqrt{V_{n-1}} \right)}_{w_n} \underbrace{\left(\sqrt{V_n} + \sqrt{V_{n-1}} \right)}_{\rightarrow +\infty} \end{aligned}$$

(comme la série $\sum w_n$ est télescopique, on voit immédiatement ici qu'elle diverge, et l'on a bien $w_n = o(v_n)$). Autrement dit, quelque soit une série divergente donnée,

il existe toujours une série divergent beaucoup plus lentement (dans un rapport avec la première qui tend vers l'infini).

En guise d'exercice, on démontrera de même (en utilisant le reste) que si une série $\sum v_n$ à termes positifs converge, il existe une série convergente $\sum w_n$ à termes positifs telle que $v_n = o(w_n)$.

c. Soit $f : [0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue telle que $\int_0^{+\infty} f(t) dt$ converge. La limite de f en l'infini est-elle nulle ?

Réponse. Non, comme le montre l'exemple de la fonction f dont le graphe est l'axe des abscisses sauf au voisinage de chaque entier $n \geq 1$ où il est un triangle isocèle de hauteur 1 (atteinte en n et de base $\frac{2}{n^2}$ (apportant donc une contribution $2/n^2$ à l'intégrale de f). On a $f(n) = 1$ pour tout $n \geq 1$, donc $f \not\rightarrow_{+\infty} 0$, tandis que $\int^{+\infty} f$ converge.

Commentaire. Beaucoup de copies ont essayé de montrer, à tort, que la limite est forcément nulle... et la plupart de ces copies ont prétendu y parvenir (dans une copie, l'effet d'une démonstration grossièrement fautive est pire que l'absence de réponse : cela sème le doute sur l'honnêteté intellectuelle de son auteur). L'erreur de raisonnement la plus commune a été, en supposant que f n'a pas une limite nulle, d'en déduire à tort que f a forcément une limite non nulle. Or, une fonction de limite non nulle en l'infini ne peut pas fournir un contre-exemple, puisque son intégrale diverge forcément. Au contraire, le contre-exemple recherché n'a pas de limite en l'infini.

On ne peut donc pas raisonner par analogie avec les séries : si une série converge, son terme général tend vers 0 ; mais si l'intégrale d'une fonction en l'infini converge, la fonction ne tend pas forcément vers 0 en l'infini.

d. Les séries suivantes convergent-elles : $\sum \left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2}$, $\sum \frac{n!}{n^n}$?

Réponse. Posons

$$u_n = \left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2} \quad \text{et} \quad v_n = n!/n^n.$$

On a

$$u_n^{1/n} = \frac{1}{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n} \rightarrow \frac{1}{e} < 1,$$

donc, d'après le critère de Cauchy, $\sum u_n$ converge.

Par ailleurs,

$$\frac{v_{n+1}}{v_n} = u_n^{1/n} \rightarrow \frac{1}{e} < 1,$$

donc, d'après le critère de d'Alembert, $\sum v_n$ converge.

Commentaire. Cette question a été mieux traitée, bien que les développements limités sont souvent faux.

Une autre solution consistait à majorer les termes généraux par $1/n^2$.

e. Quelle est la nature des intégrales impropres suivantes (dans le second cas, en fonction des paramètres réels α et β) :

$$\int_0^2 \frac{x^3 - x^2 - x + 1}{(x^2 - 1)^2} dx, \quad \int_1^{+\infty} \frac{2 + \sin(\beta\sqrt{x})}{x^\alpha} dx ?$$

Réponse. Pour la première intégrale, le seul problème éventuel est en $x = 1$ (l'autre racine du dénominateur, $x = -1$, étant en dehors de l'intervalle d'intégration). Factorisons donc $x - 1$, à la puissance maximale, dans le numérateur :

$$x^3 - x^2 - x + 1 = (x - 1)^2(x + 1).$$

Donc la fonction à intégrer vaut

$$\frac{x^3 - x^2 - x + 1}{(x^2 - 1)^2} = \frac{1}{x + 1},$$

et est, contrairement aux apparences, continue sur $[0, 2]$. Donc la première intégrale bien définie.

Considérons maintenant la seconde intégrale généralisée. Pour tout x ,

$$1 \leq 2 + \sin(\beta\sqrt{x}) \leq 3.$$

Si $\alpha \leq 1$, $\int_1^{+\infty} dt/t^\alpha$ diverge donc notre intégrale diverge aussi, quel que soit β . En revanche, si $\alpha > 1$, $\int_1^{+\infty} 3 dt/t^\alpha$ converge donc notre intégrale converge aussi, quel que soit β .

Commentaire. Pour la première intégrale : beaucoup de copies n'ont pas mentionné le problème apparent en $x = 1$ et ont en revanche étudié la fraction rationnelle au voisinage de $x = 0$ ou $x = 2$, où la fraction est pourtant continue puisque son dénominateur ne s'annule pas.

Pour l'étude en $x = 1$, si on ne parvient pas à simplifier la fraction rationnelle, il est toujours possible de déterminer son équivalent, en faisant le changement de variable $x = 1 + y$. Si l'on développe correctement numérateur et dénominateur, il apparaît que la fraction tend vers $1/2$; mais rares sont les copies où ce calcul (de niveau lycée) est effectué correctement.

Pour la seconde intégrale, beaucoup ont étonnement calculé l'équivalent en $x = 0$ de la fonction à intégrer (la fonction sinus n'a pourtant pas pour unique vocation d'être développée en 0), alors que 0 n'appartient pas à l'intervalle d'intégration; d'autre ont d'ailleurs cru calculer l'équivalent en l'infini en calculant en réalité l'équivalent en 0. Beaucoup de copies ont aussi distingué, de façon arbitraire, des cas $\beta = 0$, ou $\alpha < 0$, etc., ce qui n'avait pas lieu d'être.

f. Trouver les fonctions f série entière convergentes sur \mathbb{R} telles que

$$x^2 f''(x) + 4x f'(x) + (2 - x^2) f(x) = 1.$$

Réponse. Soit $f(x) = \sum_{n \geq 0} a_n x^n$ une fonction développable en série entière, solution de l'équation. Ses dérivées s'obtiennent en dérivant terme à terme. Donc, en injectant son expression dans l'équation différentielle, on trouve :

$$\sum_{n \geq 0} ((n+1)(n+2)a_n - a_{n-2}) x^n = 1,$$

quitte à avoir posé $a_{-1} = a_{-2} = 0$. Par unicité du développement en série entière (ou d'après la formule de Taylor-Young), on voit que, pour tout $n \geq 0$,

$$(n+1)(n+2)a_n - a_{n-2} = \begin{cases} 1 & \text{si } n = 0 \\ 0 & \text{si } n \neq 0. \end{cases}$$

On voit d'abord que $a_n = 0$ dès que n est impair. Ensuite, $a_0 = 1/2$ (ce qui se voyait directement sur l'équation en faisant $x = 0$), puis, pour tout $m \geq 0$,

$$a_{2m} = \frac{a_{2m-2}}{(2m+1)(2m+2)} = \dots = \frac{1}{(2m+2)!}.$$

Donc f , si elle existe, est unique et vaut

$$f(x) = \sum_{m \geq 0} \frac{x^{2m}}{(2m+2)!}.$$

Le rayon de convergence de cette série est $R = \infty$, donc la fonction somme de cette série entière est bien une solution de l'équation différentielle, sur \mathbb{R} .

Commentaire. Barème de la question : 1 point pour obtenir la formule de récurrence sur (a_n) , et 1 point pour obtenir la bonne formule de f et son rayon de convergence. Les points ont été attribués assez largement, sans tenir compte des erreurs de calcul qui ne dénaturent pas la réponse (en revanche, obtenir des a_n qui dépendent de x , etc. n'a pas été récompensé, et aurait dû attirer l'attention). Beaucoup de copies ont trop rapidement renoncé à poursuivre le calcul jusqu'au bout.

g. (*) Soit (N_n) une suite de \mathbb{N}_* croissante telle que $\lim \frac{n}{N_n} = 0$. Montrer que

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} (1-x) \sum_{n=0}^{+\infty} x^{N_n} = 0.$$

Solution. La fonction $f(x) = (1-x) \sum_{n=0}^{\infty} x^{N_n}$ est bien définie sur $[0, 1[$ parce que $N_n \geq n$ donc, si $x \in [0, 1[$, $x^{N_n} \leq x^n$ donc $\sum x^{N_n}$ converge.

Mieux : Soit $\epsilon > 0$. Il existe un rang M à partir duquel $n/N_n \leq \epsilon$. Alors, pour tout $x \in [0, 1[$,

$$(1-x) \sum_{n=M}^{\infty} x^{N_n} \leq (1-x) \sum_{n=M}^{\infty} x^{n/\epsilon} = x^{M/\epsilon} \frac{1-x}{1-x^\epsilon} \underset{x \rightarrow 1^-}{\sim} \epsilon.$$

Par ailleurs,

$$(1-x) \sum_{n=1}^{M-1} x^{N_n} \xrightarrow{x \rightarrow 1^-} 0.$$

Donc, pour tout $\epsilon > 0$, si x est assez proche de 1^- , $f(x)$ est majoré par 2ϵ . Donc $\lim_{1^-} f = 0$.

Commentaire. Cette question facultative n'a été traitée correctement dans aucune copie. Beaucoup ont remarqué que

$$(1-x) \sum_{n=M}^{\infty} x^{N_n} = \sum_{n=M}^{\infty} x^{N_n} - \sum_{n=M}^{\infty} x^{N_n+1},$$

ce qui est correct, mais sont improprement passés à la limite ; malheureusement, chacun des deux termes tend vers l'infini, donc la limite de la différence n'est pas la différence des limites. (Un analogue complètement explicite serait $1 = (1+n) - n$.)

2. PARTIE FINIE DE HADAMARD

Soit $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe C^1 .

a. Montrer qu'il existe une fonction continue $\varphi : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ telle que

$$f(x) = f(0) + x \varphi(x) \quad (\text{pour tout } x \in [0, 1]),$$

et en déduire quand l'intégrale $\int_0^1 \frac{f(x)}{x} dx$ est convergente, en fonction de $f(0)$.

Solution. Posons, pour $x \in]0, 1]$,

$$\phi(x) = \frac{f(x) - f(0)}{x}.$$

Cette fonction est continue sur $]0, 1]$. De plus, quand $x \rightarrow 0^+$,

$$\phi(x) \rightarrow f'(0).$$

Donc on peut prolonger ϕ par continuité en posant $\phi(0) = f'(0)$.

Donc l'intégrale de $x \mapsto f(x)/x = f(0)/x + \phi(x)$ sur $[0, 1]$ converge si et seulement si celle de $x \mapsto f(0)/x$ converge, c'est-à-dire si et seulement si $f(0) = 0$.

Commentaire. Souvent la continuité de ϕ n'a pas été correctement justifiée, bien qu'elle soit essentielle dans la suite de l'exercice. Pire, certains ont oublié le reste dans la formule de Taylor, ce qui revient à confondre taux d'accroissement et dérivée — une erreur qui serait lourdement pénalisée dans une épreuve du Baccalauréat.

b. Montrer que, dans tous les cas, quand ϵ tend vers 0, la limite de

$$\int_{\epsilon}^1 \frac{f(x)}{x} dx + f(0) \ln \epsilon,$$

existe (*partie finie de Hadamard* de $\int_0^1 f(x)/x dx$).

Solution. Toujours comme $f(t) = f(0) + x\phi(x)$, on a

$$\int_{\epsilon}^1 \frac{f(x)}{x} dx = -f(0) \ln \epsilon + \int_{\epsilon}^1 \phi(x) dx,$$

donc

$$\int_{\epsilon}^1 \frac{f(x)}{x} dx + f(0) \ln \epsilon = \int_{\epsilon}^1 \phi(x) dx,$$

et, comme ϕ est continue, cette dernière intégrale converge quand ϵ tend vers 0.

3. ÉTUDE D'UNE SÉRIE DE FONCTIONS

Pour tout $n \in \mathbb{N}_*$ on pose $u_n(x) = (-1)^n x^{2n} \ln x$ si $x \neq 0$ et $u_n(0) = 0$.

a. Montrer que la série $\sum u_n$ converge uniformément vers une fonction f continue sur $[0, 1]$.

Remarque. L'énoncé de cet exercice comportait une erreur. Il fallait supposer $n \in \mathbb{N}_*$ (comme indiqué ici), et non $n \in \mathbb{N}$, sans quoi le premier terme de la série $\sum u_n(x)$ n'est pas une fonction continue. Rares sont les copies qui semblent avoir été affectées par cette erreur. Mais dans tous les cas la question a été notée avec largesse, en attribuant 2 points pour avoir au moins raisonnablement essayé de montrer la convergence uniforme, même de façon erronée. Par équité, cette générosité n'a pas pour autant récompensé les réponses grossièrement fausses (par exemple celles qui faisaient la confusion entre $u_n(x)$ et $\sum u_n(x)$).

Solution. On a

$$\sum_{n=1}^N u_n(x) = \left(\sum_{n=0}^N (-x^2)^n - 1 \right) \ln x = -\frac{x^2 + (-x^2)^{N+1}}{1+x^2} \ln x.$$

Cette expression converge, si $x \in]0, 1[$, vers $\frac{x^2 \ln x}{1+x^2}$ et, si $x = 0$ ou 1 , vers 0 . Donc la limite simple de la série est la fonction continue $f : x \mapsto -\frac{x^2 \ln x}{1+x^2}$.

Le reste au rang N vaut

$$R_N(x) = \sum_{n=N+1}^{\infty} u_n(x) = \frac{(-x^2)^{N+1}}{1+x^2} \ln x.$$

Notons $F_N(x) = -x^{2(N+1)} \ln x$ la valeur absolue du numérateur. Comme le calcul de la dérivée de F_N le montre, F_N atteint son maximum en $x_N = e^{-1/(2N+1)}$, où elle vaut

$$F_N(x_N) = \frac{1}{e(2N+1)}.$$

Donc

$$\max_{x \in [0,1]} |R_N(x)| \leq \frac{1}{e(2N+1)} \max_{x \in [0,1]} \frac{1}{1+x^2} = \frac{1}{e(2N+1)} \rightarrow 0.$$

Donc la série converge vers f uniformément sur $[0, 1]$.

Commentaire. Peu de copies ont calculé la somme de la série géométrique, ce qui donne pourtant la somme de la série à peu de frais. De façon générale, la première étape consistant à montrer que la série converge simplement a été généralement omise, et, quand ce n'est pas le cas, les arguments utilisés étaient souvent faux (par exemple, il ne suffit pas que le terme général tende vers 0 pour que la série converge).

b. Exprimer $I = \int_0^1 f(x) dx$ comme la somme d'une série numérique.

Solution. D'après la question précédente, on peut intervertir somme et intégrale :

$$I = \int_0^1 f(x) dx = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \int_0^1 x^{2n} \ln x dx.$$

Cette dernière intégrale se calcule par parties :

$$\int_0^1 x^{2n} \ln x dx = -\frac{1}{2n+1} \int_0^1 x^{2n} dx = \frac{-1}{(2n+1)^2}.$$

Donc

$$I = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{(2n+1)^2}.$$

Commentaire. Un point a été attribué pour l'interversion justifiée de la somme et de l'intégrale, et un point pour le calcul.

c. (*) Soit ϵ un réel > 0 . Combien de termes de cette série faut-il calculer pour obtenir une valeur approchée de I à ϵ près ?

Solution. La série précédente étant alternée, le reste au rang n est majoré par la valeur absolue du premier terme. Donc, si l'on veut commettre une erreur $\leq \epsilon$, il suffit de calculer la somme partielle à un rang n tel que

$$\frac{1}{(2n+3)^2} \leq \epsilon,$$

soit

$$(1) \quad n \geq \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\sqrt{\epsilon}} - 3 \right).$$

Donc le rang cherché est le plus petit entier n satisfaisant (1).
