Université Paris-Dauphine
J. Féjoz

Analyse 3
Décembre 2019

Second Contrôle continu

Durée : 1h30 — Sans document ni appareil électronique.
Les réponses doivent être justifiées mais ***concises****.*
Mentionner les erreurs d'énoncé éventuelles.
Chaque question est environ sur 3 points.

1. Soient (u_n) et (v_n) deux suites équivalentes, à termes positifs. Montrer que $\sum u_n$ converge si et seulement si $\sum v_n$ converge.

Solution. Comme $u_n \sim v_n$, il existe un rang N à partir duquel

$$\frac{v_n}{2} \leqslant u_n \leqslant 2v_n.$$

En sommant, si l'on note $U_n = u_0 + \cdots + u_n$ et $V_n = v_0 + \cdots + v_N$, pour tout $n \geqslant N$ on a donc

$$\frac{1}{2}(V_n - V_N) \leqslant U_n - U_N \leqslant 2(V_n - V_N), \tag{1}$$

donc (U_n) et (V_n) convergent ou divergent simultanément.

2. Montrer que si une suite de fonctions continues sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ converge uniformément, sa limite est continue.

Solution. Soit (f_n) une suite de fonctions continues de I dans $\mathbb{R}$ qui converge uniformément vers une fonction $f : I \to \mathbb{R}$ sur I. Fixons $x \in I$ et montrons que f est continue en x. Soit $\varepsilon > 0$. Comme la suite (f_n) converge uniformément vers f, il existe $n_1 \geqslant 0$ tel que, pour tout $n \geqslant n_1$,

$$\forall y \in I,\ |f_n(y) - f(y)| \leqslant \frac{\varepsilon}{4}\ .$$

De plus, la fonction f_{n_1} étant continue en x, il existe $\eta > 0$ tel que

$$\forall y \in I,\ y \in [x-\eta, x+\eta]\ \Rightarrow\ |f_{n_1}(y) - f_{n_1}(x)| \leqslant \frac{\varepsilon}{2}\ .$$

Par conséquent, pour tout $y \in I$, avec $y \in [x-\eta, x+\eta]$, on a

$$|f(y)-f(x)| \leqslant |f(y)-f_{n_1}(y)|+|f_{n_1}(y)-f_{n_1}(x)|+|f_{n_1}(x)-f(x)| \leqslant \frac{\varepsilon}{4}+\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{4} = \varepsilon\ ,$$

ce qui montre f continue en x, et ce, pour tout $x \in I$.

3. Énoncer des hypothèses générales sur une suite (f_n) de fonctions réelles de classe C^1 sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ pour que

$$(\lim f_n)' = \lim f_n'. \tag{2}$$

Donner un exemple de suite (f_n) de fonctions réelles de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ telle que (f_n') converge uniformément, mais telle que l'égalité (2) n'est pas vérifiée.

Solution. Théorème : On suppose que $f_n : I \to \mathbb{R}$ est une suite de fonctions de classe C^1 sur I. Si (1) il existe un point $a \in I$ tel que la suite réelle $(f_n(a))$ converge vers un réel b, et (2) la suite de dérivées (f_n') converge uniformément vers une fonction $g : I \to \mathbb{R}$ sur I, (f_n) converge simplement sur I vers la fonction f définie par

$$f(x) = b + \int_a^x g(s)ds \qquad \forall x \in I; \tag{3}$$

en particulier, $f' = g$, i.e. $(\lim f_n)' = \lim f_n'$.

Contre-exemple : $f_n = (-1)^n$. La première hypothèse du théorème est violée, et la conclusion n'est pas vérifiée puisque (f_n) n'a pas de limite.

4. Montrer que, si (f_n) est une suite de fonctions convergeant uniformément vers une fonction f sur $\mathbb{R}$, la suite $(\sin f_n)$ converge elle aussi uniformément sur $\mathbb{R}$.

Solution. D'après le théorème des accroissements finis,

$$|\sin(f_n(x)) - \sin(f(x))| \leqslant |f_n(x) - f(x)| \leqslant \|f_n - f\| \to 0.$$

5. Les intégrales suivantes sont-elles convergentes :

$$\int_0^{+\infty} \cos x\, dx, \quad \int_1^{+\infty} \frac{\ln x}{(x-1)^\alpha}\, dx, \quad \int_2^{+\infty} \sqrt{t^2 - t}\, \ln\left(\cos\frac{1}{t}\right)\left(\sin\frac{1}{\ln t}\right)^2 dt \ ?$$

(pour la deuxième intégrale, on raisonnera en fonction de $\alpha \in \mathbb{R}$).

Solution.

(1) La fonction cos est continue sur $\mathbb{R}$, donc la question de la convergence de son intégrale ne se pose qu'en l'infini. La fonction $f : X \mapsto \int_0^X \cos x\, dx$ est 2π-périodique (parce que $\int_{k2\pi}^{(k+1)2\pi} \cos x\, dx = 0$ pour tout $k \in \mathbb{Z}$) et non constante. Donc f n'a pas de limite en $+\infty$, et la première intégrale diverge.

(2) Il s'agit de déterminer l'intégrabilité en 1 et en $+\infty$.

En 1 : on voit que, si X est assez petit,

$$\int_1^{1+X} \frac{\ln x}{(x-1)^\alpha}\, dx = \int_0^X \frac{\ln(1+y)}{y^\alpha}\, dy,$$

où

$$\frac{\ln(1+y)}{y^\alpha} \sim_{y\to 0} \frac{1}{y^{\alpha-1}},$$

donc l'intégrale demandée converge en 1 si et seulement si $\alpha < 2$.

En $+\infty$: par le même changement de variable, on se ramène à tester l'intégrabilité de

$$\frac{\ln(1+y)}{y^\alpha} \sim \frac{\ln y}{y^\alpha}$$

en $+\infty$. Or,

$$\int_2^X \frac{\ln y}{y^\alpha}\, dy = \begin{cases} \frac{1}{-\alpha+1}\left[(\ln y)^{-\alpha+1}\right]_2^X & \text{si } \alpha \neq 1 \\ \left[\ln\ln y\right]_2^X & \text{si } \alpha = 1, \end{cases}$$

donc l'intégrale demandée converge en $+\infty$ si et seulement si $\alpha > 1$.

Finalement, l'intégrale converge (des deux côtés) si et seulement si $1 < \alpha < 2$.

(3) La fonction à intégrer étant continue sur $[2, +\infty[$, la question de la convergence ne se pose qu'en $+\infty$. Quand t tend vers $+\infty$,

$$\sqrt{t^2 - t}\ \ln(\cos(1/t)) \left(\sin \frac{1}{\ln t}\right)^2 \sim -\frac{1}{2t}\frac{1}{(\ln t)^2},$$

donc, d'après le calcul fait dans l'item précédent, la troisième intégrale converge.

6. La suite des fonctions

$$f_n : x \mapsto n \sin\left(\frac{x}{n}\right)$$

converge-t-elle simplement sur $\mathbb{R}$?, uniformément sur $\mathbb{R}$?, uniformément sur $[0, 1]$?

Solution.

(1) Pour tout $x \in \mathbb{R}$, quand $n \to \infty$,

$$f_n(x) = n \sin\left(\frac{x}{n}\right) = x + o\left(\frac{1}{n}\right) \to x.$$

Donc $f_n \to \mathrm{id}$ simplement sur $\mathbb{R}$.

(2) Pour tout $n \geqslant 1$, la fonction de x

$$|f_n(x) - x| \geqslant |x| - |f_n(x)| \geqslant |x| - n$$

tend vers l'infini à l'infini, donc (f_n) ne converge pas uniformément sur $\mathbb{R}$.

(3) La fonction $x \mapsto n \sin\left(\frac{x}{n}\right) - x$ décroît sur $[0, 1]$, donc, pour tout $x \in [0, 1]$,

$$\max_{x\in[0,1]} |f_n(x) - x| = |f_n(1) - 1| = n \sin \frac{1}{n} - 1.$$

Le calcul restant à faire est le cas particulier en $x = 1$ du développement limité fait pour montrer la convergence simple, et l'on voit donc que

$$\max_{x\in[0,1]} |f_n(x) - x| = \frac{1}{n} - 1 \to 0.$$

Donc (f_n) converge uniformément sur $[0, 1]$ (de même que sur toute partie bornée de $\mathbb{R}$).

7. Notons $f_n(x) = \frac{ne^{-x}+x^2}{n+x}$. Calculer la limite si elle existe de

$$u_n = \int_0^1 f_n(x)\, dx\ ;$$

on pourra commencer par étudier la convergence de la suite de fonctions (f_n).

Solution. (f_n) converge simplement vers $f : x \mapsto e^{-x}$. De plus, si $x \in [0, 1]$ et $n \geqslant 1$,

$$|f_n(x) - f(x)| = e^{-x} \left| \frac{1 + \frac{x^2 e^x}{n}}{1 + \frac{x}{n}} - 1 \right| = \frac{1}{n} \left| \frac{x^2 e^x - x}{1 + \frac{x}{n}} \right| \leqslant \frac{e + 1}{n} \to 0,$$

donc (f_n) converge vers f uniformément sur $[0, 1]$.

Comme les fonctions f_n sont continues sur $[0, 1]$, les intégrales u_n sont bien définies. Comme de plus (f_n) converge uniformément, on peut permuter limite et intégrale :

$$\lim u_n = \int_0^1 e^{-x}\, dx = 1 - \frac{1}{e}.$$

8. (Bonus) Soit (u_n) une suite de fonctions réelles sur $\mathbb{N}$, $u_n : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$, $m \mapsto u_n(m)$. On suppose que (a) pour tout n la suite réelle $(u_n(m))_m$ converge et (b) il existe une suite réelle (α_n) telle que $|u_n(m)| \leqslant \alpha_n$ (pour tous m, n) et $\sum_n \alpha_n < \infty$. Montrer que

$$\lim_m \sum_{n \geqslant 0} u_n(m) = \sum_{n \geqslant 0} \lim_m u_n(m).$$

Solution. La seconde hypothèse implique que, pour tout m, $\sum_n u_n(m)$ converge absolument ; soit $U(m)$ sa somme.

Notons $u_n = \lim_m u_n(m)$, qui existe d'après la première hypothèse. La seconde hypothèse implique, en passant à la limite $m \to +\infty$, que $|u_n| \leqslant \alpha_n$, donc que $\sum u_n$ converge absolument ; notons U sa somme.

On veut montrer que $U(m)$ a pour limite U. Quel que soit N,

$$|U(m) - U| \leqslant \sum_{1}^{N} |u_n(m) - u_n| + 2 \sum_{N+1}^{\infty} \alpha_n.$$

On peut choisir N pour que le second terme du membre de droite soit $\leqslant \epsilon/2$, $\epsilon > 0$ étant donné aussi petit que voulu. Alors il existe M tel que si $m \geqslant M$ on ait

$$|u_n - u_n(m)| < \frac{\epsilon}{2N}$$

pour tout $1 \leqslant n \leqslant N$, de sorte que

$$|U(m) - U| \leqslant \epsilon.$$