Université Paris-Dauphine Analyse 3
J. Féjoz Octobre 2019

Premier contrôle continu

Durée : 1h30 — Sans document ni appareil électronique.
Toutes les réponses doivent être justifiées mais ***concises****.*
Mentionner sur la copie les erreurs d'énoncé éventuelles.
Chaque question sera notée sur 3 *points.*

1. Rappeler la définition d'une suite de Cauchy et donner un exemple de suite qui n'est pas de Cauchy.

Solution. Une suite (u_n) est *de Cauchy* si, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un rang N tel que, pour tous $p, q \geqslant N$, $|u_p - u_q| < \varepsilon$.

Considérons la suite $(u_n = (-1)^n)$. Soit $\varepsilon = 1$. Pour tout N, les entiers $p = 2N$ et $q = 2N + 1$ sont $\leqslant N$ et pourtant

$$|u_p - u_q| = 2 \geqslant \varepsilon.$$

Donc (u_n) n'est pas de Cauchy. (On peut aussi remarquer que les suites extraites $(u_{2n} = 1)$ et $(u_{2n+1} = -1)$ ont deux limites distinctes, de sorte que (u_n) ne converge pas, de sorte que (u_n) n'est pas de Cauchy.)

2. Montrer qu'une suite convergente est de Cauchy.

Solution. Notons ℓ la limite d'une suite convergente (u_n). Soient $\varepsilon > 0$. Il existe un rang N à partir duquel

$$|u_n - \ell| < \varepsilon/2.$$

Pour tous $p, q \geqslant N$,

$$|u_p - u_q| \leqslant |u_p - \ell| + |\ell - u_q| < \varepsilon.$$

Donc la suite est de Cauchy.

3. Calculer le développement limité des fonctions suivantes en 0 à l'ordre 3 :

$$\cos \sin x, \quad \sin \cos x.$$

(On pourra alternativement remplacer x par $1/k$, avec $k \in \mathbb{N}_*$, $k \to \infty$.)

Solution. Les fonctions sin et cos sont de classe C^∞, donc les développements limités demandés existent et on peut les calculer à partir des développements limités de sin et de cos.

Les deux fonctions à développer sont paires, donc la partie régulière de leurs développements à l'ordre 2 et 3 sont les mêmes.

Pour la première :

$$\begin{aligned}\cos \sin x &= \cos(x + o(x)) \\ &= 1 - (x + o(x))^2/2 + o((x + o(x))^3),\end{aligned}$$

avec $-(x+o(x^2))^2/2 = -x^2/2 + o(x^2)$ and $o((x+o(x))^3) = o(x^3)$. (Développer le sinus à l'ordre 3 serait inutile puisque le terme en x^3 aurait une contribution finale en x^4.) Donc

$$\cos\sin x = 1 - x^2/2 + o(x^3).$$

Pour la seconde :

$$\begin{aligned}\sin\cos x &= \sin(1 - x^2/2 + o(x^3)) \\ &= \sin 1 \cos(x^2/2 + o(x^3)) - \cos 1 \sin(x^2/2 + o(x^3)) \\ &= \sin 1 - \cos 1 (x^2/2 + o(x^3)) \\ &= \sin 1 - (\cos 1) x^2/2 + o(x^3).\end{aligned}$$

4. Trouver $a, b \in \mathbb{R}$ tels que

$$\cos x - \frac{1+ax^2}{1+bx^2} = o(x^n)$$

avec $n \in \mathbb{N}$ maximal.

Solution. La fonction du membre de gauche est paire, donc deux paramètres donnent espoir de pouvoir ajuster les deux premiers coefficients d'indice pair non nul. Faisons donc un développement à l'ordre 4. On veut

$$(1+ax^2)(1 - bx^2 + b^2x^4 + o(x^4)) = 1 - x^2/2 + x^4/24 + o(x^4)$$

donc

$$a - b = -1/2, \quad b(b-a) = 1/24,$$

donc

$$a = -5/12, \quad b = 1/12.$$

Comme prévu, le développement à l'ordre 4 a complètement déterminé les valeurs nécessaires de a et b.

Réciproquement, comme le même calcul le montre, ces valeurs de a et b font que l'égalité demandée est bien vérifiée avec $n = 4$.

5. Soit f une fonction réelle définie sur un voisinage de 0 dans $\mathbb{R}$. Montrer que f est dérivable en 0 si et seulement si f possède un développement limité du premier ordre en 0. Si f possède un développement limité du second ordre en 0, est-elle deux fois dérivable ?

Solution.

$$\begin{aligned}&\text{La fonction } f \text{ est dérivable en 0 de dérivée } f'(0) \\ \iff\ & \lim_{x\to 0} \frac{f(x)-f(0)}{x} = f'(0) \\ \iff\ & \frac{f(x)-f(0)}{x} = f'(0) + o(1) \\ \iff\ & f(x) = f(0) + f'(0)x + o(x).\end{aligned}$$

Exemple : La fonction $f : x \mapsto x^2\cos(1/x)$ (qui se prolonge par continuité en 0) possède un développement limité du premier ordre en 0 (de partie régulière nulle), donc est dérivable en 0. (Le calcul de sa dérivée en dehors de 0 montre que la dérivée n'est pas continue en 0, donc que f n'est pas deux fois dérivable en 0.)

Mais qu'en est-il à l'ordre deux ? Considérons maintenant $g : x \mapsto x^3 \sin(1/x)$. Cette fonction admet évidemment un développement limité du second ordre (de partie régulière nulle). Mais elle n'est pas deux fois dérivable en 0, puisque sa dérivée première vaut (en dehors de 0)

$$g'(x) = 3x^2 \sin(1/x) - x\cos(1/x),$$

et donc que le taux d'accroissement

$$\frac{g(x)}{x} = 3x\sin(1/x) - \cos(1/x)$$

n'a pas de limite en 0.

6. La suite (u_n) telle que $u_0 \in]0, +\infty[$ et

$$u_{n+1} = \sqrt{1 + u_n} \quad (\forall n \in \mathbb{N})$$

est-elle monotone, converge-t-elle dans $\mathbb{R}$ et, si oui, quelle est sa limite ?

Solution. Comme la fonction $f : x \mapsto \sqrt{1+x}$ est à valeurs positives, par récurrence on voit que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bien définie, et à valeurs réelles positives.

La fonction $x \mapsto f(x) - x$ strictement décroissante sur $[0, +\infty[$, et vaut 1 en 0 et 0 en $\ell = \frac{1+\sqrt{5}}{2} > 1$ (le *nombre d'or*). Donc

- si $u_0 < \ell$, (u_n) est croissante et majorée par ℓ
- si $u_0 = \ell$, (u_n) est constante
- si $u_0 > \ell$, (u_n) est décroissante et minorée par ℓ.

Dans les trois cas, (u_n) converge, et, puisque f est continue et que (u_{n+1}) a la même limite, cette limite ne peut être que ℓ elle-même.

7. Soit $S_n = 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}$ $(n \geqslant 1)$. Trouver un équivalent de S_n ; on pourra commencer par montrer que $\ln(1+n) \leqslant S_n \leqslant 1 + \ln n$.

Solution. Pour tout $k \geqslant 1$,

$$\int_k^{k+1} \frac{dt}{t} \leqslant \frac{1}{k}$$

et, si $k \geqslant 2$,

$$\frac{1}{k} \leqslant \int_k^{k+1} \frac{dt}{t-1}.$$

Donc, pour tout $n \geqslant 1$,

$$\int_1^n \frac{1}{t} \leqslant S_n \leqslant 1 + \int_2^{n+1} \frac{dt}{t-1},$$

soit, en intégrant,

$$\ln(n+1) \leqslant S_n \leqslant 1 + \ln n.$$

La minoration et la majoration de S_n sont équivalentes à $\ln n$, donc

$$S_n \sim \ln n.$$