Université Paris-Dauphine
Licence MIE 2ème année
Analyse 3

Corrigé de l'examen, lundi 14 janvier 2019.

Durée : 2 heures.

Exercice 1. *Donner la nature des séries ayant pour terme général les suites ci-dessous (définies pour $n \geq 1$). On discutera en fonction des paramètres réels α et β.*

1. $u_n = 1 - \cos\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) + \alpha \sin\left(\frac{1}{n}\right) + \beta \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)$.

On fait les DL à des ordres suffisamment élevés pour pouvoir conclure :

$$\cos\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) = 1 - \frac{1}{2n} + o\left(\frac{1}{n^{3/2}}\right),$$
$$\sin\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n} + o\left(\frac{1}{n^2}\right),$$
$$\ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

On retient le o le plus grossier (ici $o\left(\frac{1}{n^{3/2}}\right)$), et on peut même y incorporer le terme $-\frac{1}{2n^2}$. On obtient

$$u_n = \frac{1}{2n} + \frac{\alpha}{n} + \frac{\beta}{n} + o\left(\frac{1}{n^{3/2}}\right).$$

Donc si $\alpha + \beta + \frac{1}{2} \neq 0$, on a $u_n \sim \frac{\alpha+\beta+\frac{1}{2}}{n}$ et par théorème de comparaison pour les séries positives, la série de terme général u_n diverge, soit $\alpha + \beta + \frac{1}{2} = 0$ et on a $u_n = o\left(\frac{1}{n^{3/2}}\right)$ et dans ce cas par théorème de comparaison pour les séries positives, la série de terme général u_n est absolument convergente donc convergente.

2. $v_n = \cos(n^{-\alpha}) - \beta \exp\left(\frac{1}{n}\right)$ où $\alpha > 0$.

Notons que si $\beta \neq 1$, $v_n \not\longrightarrow 0$ et la série diverge grossièrement. On considère donc maintenant le cas où $\beta = 1$. Dans ce cas, on a par développement limité :

$$\begin{aligned} v_n &= 1 - \frac{1}{n^{2\alpha}} + o\left(\frac{1}{n^{2\alpha}}\right) - 1 - \frac{1}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right) \\ &= -\frac{1}{n^{2\alpha}} + o\left(\frac{1}{n^{2\alpha}}\right) - \frac{1}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right). \end{aligned}$$

Il y a alors plusieurs possibilités :

— Si $\alpha < \frac{1}{2}$, alors on en déduit que $v_n \sim -\frac{1}{n^{2\alpha}}$ et par théorème de comparaison pour les séries positives, la série de terme général v_n diverge.
— Si $\alpha > \frac{1}{2}$, alors on en déduit que $v_n \sim -\frac{1}{n}$ et par théorème de comparaison pour les séries positives, la série de terme général v_n diverge.
— Si $\alpha = \frac{1}{2}$, nous trouvons $v_n \sim -\frac{2}{n}$ et là encore par théorème de comparaison pour les séries positives, la série de terme général v_n diverge.

3. $w_n = \dfrac{1 + \beta \cos(1/n)}{n^\alpha}$ où $\alpha > 0$.

On note que le numérateur tend vers $1+\beta$ lorsque n tend vers $+\infty$. Il y a donc deux possibilités.
— Si $\beta \neq -1$, alors $w_n \sim \frac{1+\beta}{n^\alpha}$ et par théorème de comparaison pour les séries positives, la série de terme général w_n converge si et seulement si $\alpha > 1$.
— Si $\beta = -1$, alors $1 + \beta \cos(1/n) \sim \frac{1}{2n^2}$ et donc $w_n \sim \frac{1}{2n^{\alpha+2}}$. Comme $\alpha > 0$, la série converge toujours dans ce cas.

4. $x_n = (-1)^n \frac{E(\sqrt{n})}{n^{5/4}}$.

Cette série alternée ne satisfait pas le critère spécial des séries alternées car $(|x_n|)$ n'est pas une suite décroissante. Mais si on introduit $x'_n = (-1)^n \frac{\sqrt{n}}{n^{5/4}} = (-1)^n \frac{1}{n^{3/4}}$, on voit que
— la série de terme général x'_n satisfait le critère spécial des séries alternées,
— la série de terme général $x'_n - x_n = (-1)^n \frac{\sqrt{n}-E(\sqrt{n})}{n^{5/4}}$ est absolument convergente, puisque $|\sqrt{n} - E(\sqrt{n})| \leq 1$.

Par théorème d'opération sur les séries, la série de terme général x_n est donc convergente. Elle n'est pas absolument convergente car $E(\sqrt{n}) \geq \sqrt{n} - 1$, donc

$$|x_n| \geq \frac{\sqrt{n}-1}{n^{5/4}}.$$

Or le membre de droite de cette inégalité donne une série divergente, car ce terme est équivalent à $n^{-3/4}$.

Exercice 2. *Déterminer la nature des intégrales impropres suivantes. On discutera en fonction des paramètres réels α et β.*

1. $\displaystyle\int_1^{+\infty} \left[\ln(1+t^2) - 2\ln(t)\right]\, dt$.

Seul $+\infty$ pose un problème, l'intégrande étant continu jusqu'en 1. Pour $t \geq 1$, on écrit

$$\begin{aligned} \ln(1+t^2) - 2\ln(t) &= \ln(1+t^2) - \ln(t^2) \\ &= \ln\left(1 + \frac{1}{t^2}\right) \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{t^2}. \end{aligned}$$

L'intégrale est donc convergente par théorème d'équivalence pour les intégrales positives.

2. $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{2+\cos\left(\beta\sqrt{t}\right)}{t^\alpha}\,dt.$

On remarque que, quels que soient β et t, $1 \le 2+\cos\left(\beta\sqrt{t}\right) \le 3$. Donc si $\alpha > 1$, on garde l'inégalité de droite, et par théorème de comparaison pour les intégrales positives, l'intégrale converge. Si $\alpha \le 1$, on garde l'inégalité de gauche, et par théorème de comparaison pour les intégrales positives, l'intégrale diverge. Et ce, quel que soit β.

3. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{\sqrt{1+t}}\,dt.$

Seul $+\infty$ pose un problème, l'intégrande étant continu jusqu'en 0. Mais ici, il y a des changements de signes et les équivalents ne permettent pas de conclure. Mais pour $X > 0$ on écrit à l'aide d'une intégration par parties :

$$\int_0^X \frac{\sin(t)}{\sqrt{1+t}}\,dt = \left[\frac{-\cos(t)}{\sqrt{1+t}}\right]_0^X - \frac{1}{2}\int_0^X \frac{\cos(t)}{\sqrt{1+t}^3}\,dt.$$

L'intégrale à droite est absolument convergente, car son intégrande en valeur absolue est inférieur ou égal à $\frac{1}{\sqrt{1+t}^3} \underset{+\infty}{\sim} t^{-3/2}$. La partie entre crochets a aussi une limite lorsque $X \to +\infty$, et l'intégrale de départ est donc convergente.

Elle n'est par contre pas absolument convergente, car si elle l'était, on aurait pour tout N

$$\int_0^{+\infty} \left|\frac{\sin(t)}{\sqrt{1+t}}\right|\,dt \ge \sum_{k=0}^{N} \int_{\frac{\pi}{4}+2n\pi}^{\frac{3\pi}{4}+2n\pi} \left|\frac{\sin(t)}{\sqrt{1+t}}\right|\,dt,$$

et donc par théorème de comparaison la série à droite convergerait. Or en utilisant $\sin(x) \ge \frac{\sqrt{2}}{2}$ sur $[\frac{\pi}{4}+2n\pi, \frac{3\pi}{4}+2n\pi]$ et la décroissante de l'application $t \mapsto (1+t)^{-1/2}$, on trouve

$$\sum_{k=0}^{N} \int_{\frac{\pi}{4}+2n\pi}^{\frac{3\pi}{4}+2n\pi} \left|\frac{\sin(t)}{\sqrt{1+t}}\right|\,dt \ge \sum_{k=0}^{N} \frac{\pi}{2}\frac{\sqrt{2}}{2}\frac{1}{\sqrt{1+\frac{3\pi}{4}+2n\pi}}.$$

Or par théorème d'équivalence, la série à droite est divergente. D'où le résultat.

Exercice 3. *On définit pour tout entier $n \ge 2$ la fonction u_n sur $\mathbb{R}^+$ de la manière suivante :*

$$\forall x \in \mathbb{R}^+, \quad u_n(x) = \frac{1}{x+n^2-1}.$$

1. *Montrer que la série de terme général u_n (pour $n \ge 2$) converge uniformément sur $\mathbb{R}^+$. On appelera S la somme.*

   On voit facilement que pour $n \ge 2$, la fonction $x \mapsto u_n(x)$ est positive et décroissante. Par conséquent

   $$\|u_n\|_\infty = u_n(0) = \frac{1}{n^2-1}.$$

Comme $\frac{1}{n^2-1} \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{n^2}$, on voit que la série de terme général $\|u_n\|_\infty$ converge. La série de terme général u_n converge donc normalement et donc uniformément.

2. *Montrer que la fonction S est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^+$.*

Il est clair que chacune des fonctions u_n pour $n \geq 2$ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^+$. D'après le théorème de dérivation des séries, il suffit de montrer que la série des dérivées converge uniformément. Or pour tout $n \geq 2$ et tout x de $\mathbb{R}^+$ on a :

$$u_n'(x) = -\frac{1}{(x+n^2-1)^2},$$

qui est une fonction négative et croissante. On a donc

$$\|u_n'\|_\infty = |u_n'(0)| = \frac{1}{(n^2-1)^2}.$$

Comme $\frac{1}{(n^2-1)^2} \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{n^4}$, on voit que la série de terme général $\|u_n'\|_\infty$ converge. La série de terme général u_n' converge donc normalement et donc uniformément, ce qui permet de conclure.

3. *L'intégrale impropre $\displaystyle\int_0^{+\infty} S(x)\,dx$ converge-t-elle ?*

Les fonctions u_n sont toutes positives, et on a donc pour $x \in \mathbb{R}^+$

$$S(x) \geq u_2(x).$$

Or clairement l'intégrale $\int_0^{+\infty} u_2(x)\,dx$ diverge puisque pour $X \geq 0$,

$$\int_0^X u_2(x)\,dx = \Big[\ln(x+3)\Big]_0^X,$$

ce qui a pour limite $+\infty$ lorsque X tend vers $+\infty$. Par comparaison, l'intégrale demandée est donc divergente.

4. *Calculer $\displaystyle\int_0^1 S(x)\,dx$.*

Comme on a convergence uniforme de la série de terme général u_n, on peut inverser somme et intégrale sur le segment $[0,1]$. Or pour $n \geq 2$ on a :

$$\int_0^1 u_n(x)\,dx = [\ln(x+n^2-1)]_0^1 = \ln(n^2) - \ln(n^2-1).$$

Il suit que pour $N \geq 2$, on a, en jouant avec les indices,

$$\begin{aligned}
\sum_{k=2}^{N} \int_0^1 u_k(x)\,dx &= 2\sum_{k=2}^{N} \ln(k) - \sum_{k=2}^{N} \ln(k-1) - \sum_{k=2}^{N} \ln(k+1) \\
&= 2\sum_{k=2}^{N} \ln(k) - \sum_{k=1}^{N-1} \ln(k) - \sum_{k=3}^{N+1} \ln(k) \\
&= 2\sum_{k=2}^{N} \ln(k) - \sum_{k=2}^{N} \ln(k) + \ln(N) - \sum_{k=2}^{N} \ln(k) + \ln(2) - \ln(N+1) \\
&= \ln(2) + \ln\left(\frac{N}{N+1}\right).
\end{aligned}$$

On a donc que

$$\sum_{k=2}^{N} \int_0^1 u_k(x)\,dx \longrightarrow \ln(2) \text{ lorsque } N \longrightarrow +\infty.$$

Donc

$$\int_0^1 S(x)\,dx = \ln(2).$$

Exercice 4. *Déterminer le rayon de convergence des séries entières suivantes :*

1. $\sum \frac{1}{(n+1)^2} X^{n!}$.

Il s'agit bien d'une série entière, en définissant les coefficients a_k comme étant 0 lorsque k ne peut pas s'écrire comme une factorielle. Clairement, pour $X \in [0,1[$, la série de terme général $\frac{1}{(n+1)^2} X^{n!}$ converge, puisque dans ce cas $0 \leq \frac{1}{(n+1)^2} X^{n!} \leq \frac{1}{(n+1)^2}$ et on conclut par comparaison pour les séries positives. Par contre, pour $X > 1$ la série de terme général $\frac{1}{(n+1)^2} X^{n!}$ diverge, puisque par croissance comparée ce terme général ne tend pas vers 0. On déduit alors de la définition que le rayon de convergence est ici de 1.

2. $\sum \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2} X^n$.

Utilisons le critère de Cauchy, et cherchons la limite de $|a_n|^{1/n}$, où $a_n := \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2}$. On a pour tout $n \geq 1$:

$$a_n^{1/n} = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n = \exp\left(n \ln\left(1+\frac{1}{n}\right)\right),$$

et cela tend bien sûr vers e puisque $\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) \sim \frac{1}{n}$. D'après le cours, le rayon de convergence recherché est donc de $1/e$.

3. $\sum \binom{2n}{n} X^n$.

Ici on utilise le critère de D'Alembert (les coefficients $a_n = \binom{2n}{n}$ sont bien tous non nuls). On a pour tout $n \geq 1$:

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\frac{(2n+2)!}{(n+1)!^2}}{\frac{(2n)!}{n!^2}} = \frac{(2n+2)!}{(2n)!} \frac{n!^2}{(n+1)!^2} = \frac{(2n+2)(2n+1)}{(n+1)^2},$$

ce qui tend vers 4. D'après le cours, le rayon de convergence est donc de $1/4$.

Exercice 5.

1. *Déterminer l'ensemble des séries entières*

$$S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$$

de rayon de convergence R strictement positif, telles que $S(0) = 1$ et satisfaisant l'équation suivante sur $]-R, R[$:

$$S'(x) = S(x/2).$$

On précisera les coefficients de la série et le rayon de convergence R (une forme explicite de la ou des fonctions S n'est pas demandée).

Supposons qu'une telle série entière existe, le théorème de dérivation des séries entières nous permet alors de dire que sur l'intervalle ouvert de convergence

$$\sum_{n=0}^{+\infty} (n+1) a_{n+1} x^n = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a_n}{2^n} x^n.$$

La série entière

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \left[(n+1) a_{n+1} - \frac{a_n}{2^n} \right] x^n$$

est donc nulle avec un rayon de convergence strictement positif, d'après le cours ses coefficients sont nuls. On trouve donc la relation

$$\forall n \geq 0, \quad a_{n+1} = \frac{a_n}{(n+1)2^n},$$

et $a_0 = 1$. Montrons alors par récurrence la relation de récurrence

$$a_n = \frac{1}{n! 2^{\frac{n(n-1)}{2}}}.$$

Cela fonctionne pour $n = 1$, et dès lors que la relation est vraie au rang n, elle l'est au rang $n + 1$ puisque

$$a_{n+1} = \frac{a_n}{(n+1)2^n} = \frac{1}{n! 2^{\frac{n(n-1)}{2}}} \frac{1}{(n+1)2^n} = \frac{1}{(n+1)! 2^{\frac{(n+1)n}{2}}}.$$

Réciproquement, si on pose pour tout n, $a_n = \frac{1}{n! 2^{\frac{n(n-1)}{2}}}$, on voit qu'on a un rayon de convergence $+\infty$ (par comparaison avec la série de coefficients $\frac{1}{n!}$ par exemple, ou encore en utilisant le critère de D'Alembert et la relation de récurrence précédente), et en remontant les calculs on trouve bien la relation souhaitée.

2. *Déterminer l'ensemble des réels $\lambda > 0$ pour lesquels il existe une série entière S de rayon de convergence R strictement positif, telle que $S(0) = 1$ et satisfaisant l'équation suivante :*

$$S'(x) = S(\lambda x) \text{ lorsque } x \text{ et } \lambda x \text{ appartiennent à }]-R, R[.$$

En reprenant les calculs précédents et en remplaçant $\frac{1}{2}$ par λ, on trouve facilement qu'une telle série entière satisfait nécessairement la relation

$$a_n = \frac{1}{n!}\lambda^{\frac{n(n-1)}{2}}.$$

Pour $\lambda \leq 1$, on trouve alors une série entière de rayon de convergence $+\infty$ qui répond à la question (c'est sans surprise l'exponentielle pour $\lambda = 1$). Mais pour $\lambda > 1$, l'argument de comparaison permettant de montrer que le rayon de convergence est $+\infty$ ne fonctionne plus. Au contraire, quand on applique le critère de D'Alembert, on trouve

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\lambda^n}{n+1} \longrightarrow +\infty,$$

et le rayon de convergence est 0. C'est donc qu'il n'y a pas de série entière de rayon de convergence strictement positif répondant à la question dans ce cas.