Université Paris-Dauphine
Licence MIE 2ème année
Analyse 3

Contrôle continu no. 2, lundi 4 décembre 2017.

Durée : 1 heure 30.

Tous *les appareils électroniques et les documents sont interdits. Les solutions devront être rédigées de manière rigoureuse, avec des justifications complètes. Lorsque des résultats du cours seront invoqués, ils devront être clairement énoncés.*

Questions de cours.

1. Énoncer le théorème de dérivation pour la limite d'une suite de fonctions.
2. Énoncer la définition de la convergence normale d'une série.

Exercice 1. Donner la nature des séries ayant pour terme général les suites ci-dessous. On discutera en fonction des paramètres réels α et β.

1. $u_n = \dfrac{\alpha}{n} - \ln\left(n \ln\left(1 + \dfrac{1}{n}\right)\right)$,
2. $v_n = \cos\left(\dfrac{1}{n}\right) + \alpha n \sin\left(\dfrac{1}{n}\right) + \beta n \ln\left(\dfrac{n-1}{n+1}\right)$.

Exercice 2. Déterminer la nature des intégrales suivantes.

1. $\displaystyle\int_1^{+\infty} \left[t \exp\left(\frac{1}{t} - \frac{1}{2t^2}\right) - t - 1\right] dt$,
2. $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t^\alpha}\, dx$ où $\alpha > 0$.

Pour le 2, on discutera en fonction du paramètre α.

Exercice 3. On pose, pour $n \geq 1$ et $x \geq 0$,

$$u_n(x) = \frac{x}{n^2 + x^2}$$

1. Montrer que la série $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$ converge simplement sur $\mathbb{R}^+$.
2. Montrer que pour tout $A > 0$, la série $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$ converge uniformément sur $[0, A]$.
3. Montrer que pour tout $n \geq 1$,
$$\sum_{k=n}^{2n} \frac{n}{n^2 + k^2} \geq \frac{1}{5}.$$
4. La série $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$ converge-t-elle uniformément sur $\mathbb{R}^+$?

TSVP

Exercice 4.

1. Quel est le rayon de convergence R de la série entière

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(2n)!}{n!\,(n+1)!\,2^{2n+1}}\,x^n \text{ ?}$$

(On rappelle la convention que $0! = 1$.)
On notera $T(x)$ la somme et on admettra que

$$\forall x \in]-R;R[\cap]-1,1[, \quad T(x) = \begin{cases} \dfrac{1-\sqrt{1-x}}{x} \text{ si } x \neq 0, \\ 1/2 \text{ si } x = 0. \end{cases}$$

2. On considère la suite donnée par récurrence par :

$$a_0 = 1 \text{ et pour tout } n \geq 0,\ a_{n+1} = \sum_{k=0}^{n} a_k a_{n-k}.$$

On introduit la série entière $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$. On suppose qu'elle admet un rayon de convergence R' strictement positif et on appelle $S(x)$ la somme. Montrer que pour tout x de $]-R', R'[$,

$$xS(x)^2 = S(x) - 1.$$

En déduire une expression de $S(x)$.

3. Donner une expression de a_n.

$\star$

Barème **<u>indicatif</u>** : Cours : 2 points, Ex. 1 : 4 points, Ex. 2 : 4 points, Ex. 3 : 5 points, Ex. 4 : 6 points.