Université Paris-Dauphine
Analyse 3 (L2)
24 septembre 2018

Année universitaire 2018-2019
Responsable : Olivier Glass
Durée : 1h30

Eléments de correction du contrôle continu 1

Exercice 1 (2+2 points)**.**

1. Montrer qu'une suite convergente est de Cauchy.

   Corrigé. *Voir le cours.*

2. Montrer que la suite $u_n = (-1)^n$ n'est pas de Cauchy.

   Corrigé. *Fait en TD.*

Exercice 2 (4 points)**.** Soit $n \in \mathbb{N}$. On définit la suite $(r_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de la façon suivante

$$r_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}.$$

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $p \in \mathbb{N}^*$, on a

$$|r_{n+p} - r_n| \leq \frac{1}{(n+1)!} \sum_{k=0}^{p-1} \frac{1}{(n+1)^k}.$$

   Corrigé. *Soient $n \in \mathbb{N}$ et $p \in \mathbb{N}^*$. On écrit*

$$\begin{aligned} |r_{n+p} - r_n| &= \sum_{k=n+1}^{n+p} \frac{1}{k!} \\ &= \sum_{k=0}^{p-1} \frac{1}{(n+1+k)!} \\ &= \frac{1}{(n+1)!} \sum_{k=0}^{p-1} \frac{(n+1)!}{(n+1+k)!} \end{aligned}$$

   Or pout tout $k > 0$, on a,

$$(n+1+k)! = \prod_{j=1}^{n+1+k} j = (n+1)! \prod_{j=n+2}^{n+1+k} j \geq (n+1)! \cdot (n+2)^k,$$

   On conclut alors que

$$|r_{n+p} - r_n| \leq \frac{1}{(n+1)!} \sum_{k=0}^{p-1} \frac{1}{(n+2)^k},$$

   qui est un peu meilleur que l'énoncé.

2. En déduire que la suite r_n est convergente.

Corrigé. *On va montrer que la suite r_n est de Cauchy. Comme c'est une suite réelle, et que $\mathbb{R}$ muni de la distance associée à la valeur absolue est complet, la suite r_n sera alors convergente. On remarque que le second membre de l'inégalité obtenue à la question précédente contient une somme géométrique, de raison inférieure strictement à 1. Ainsi,*

$$|r_{n+p} - r_n| \leq \frac{1}{(n+1)!}\sum_{k=0}^{p-1}\frac{1}{(n+2)^k} \leq \frac{1}{(n+1)!}\frac{1}{1-\frac{1}{n+2}} = \frac{1}{(n+1)!}\frac{n+2}{n+1} \leq \frac{2}{(n+1)!},$$

Le dernier membre étant uniforme en $p > 0$, et pouvant être rendu arbitrairement petit dès lors que n est choisi suffisamment grand, la suite est de Cauchy. En effet, donnons nous $\varepsilon > 0$ et choisissons $N \in \mathbb{N}$ tel que $\frac{2}{(N+1)!} < \varepsilon$, on a alors pour tout $n \geq N$ et $p > 0$,

$$|r_{n+p} - r_n| \leq \varepsilon,$$

ce qui conclut.

Exercice 3 (8 points)**.** Donner un développement, lorsque n tend vers $+\infty$, de ...

— $a_n = \dfrac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{\frac{1}{2}} - 1 - \frac{1}{2n}}{\cos\left(\frac{1}{n}\right) - 1 + \frac{1}{2n^2}}$ au premier ordre, *i.e.* en donner un équivalent,

Corrigé. *Par les développements usuels, on a*

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^{\frac{1}{2}} - 1 - \frac{1}{2n} = -\frac{1}{8n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right),$$
$$\cos\left(\frac{1}{n}\right) - 1 + \frac{1}{2n^2} = \frac{1}{24n^4} + o\left(\frac{1}{n^4}\right)$$

Ainsi, $a_n \sim \dfrac{-\frac{1}{8n^2}}{\frac{1}{24n^4}} = -3n^2$.

— $b_n = \ln\left(n\ln\left(1+\dfrac{1}{n}\right)\right)$ à l'ordre 2, *i.e.* à la précision $o\left(\frac{1}{n^2}\right)$,

Corrigé. *Nous allons composer deux développements limités.*

$$\begin{aligned}
b_n &= \ln\left(n\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} + \frac{1}{3n^3} + o\left(\frac{1}{n^3}\right)\right)\right)\\
&= \ln\left(1 - \frac{1}{2n} + \frac{1}{3n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)\\
&= \left(-\frac{1}{2n} + \frac{1}{3n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) - \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2n} + \frac{1}{3n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)^2\right)^2\\
&\qquad + o\left(\left(-\frac{1}{2n} + \frac{1}{3n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)^2\right)\\
&= -\frac{1}{2n} + \frac{1}{3n^2} - \frac{1}{8n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)\\
&= -\frac{1}{2n} + \frac{5}{24n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right).
\end{aligned}$$

— $c_n = \exp\left(n^2\left(\sin\left(\dfrac{1}{n}\right) - \dfrac{1}{n}\right)\right) - 1$ à l'ordre 2, *i.e.* à la précision $o\left(\frac{1}{n^2}\right)$,

Corrigé. *Nous allons composer deux développements limités.*

$$\begin{aligned}
c_n &= \exp\left(n^2\left(-\frac{1}{6n^3} + o\left(\frac{1}{n^4}\right)\right)\right) - 1,\\
&= \exp\left(-\frac{1}{6n} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) - 1\\
&= \left(-\frac{1}{6n} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) + \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{6n} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)^2 + o\left(\frac{1}{n^2}\right)\\
&= -\frac{1}{6n} + \frac{1}{72n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right).
\end{aligned}$$

— $d_n = \left(\ln(n) + \exp\left(\cos\left(\dfrac{1}{\ln(n)}\right) - 1\right)\right)^{\frac{1}{2}}$ à l'ordre 2, *i.e.* à la précision $o\left(\frac{1}{\ln(n)^2}\right)$,

Corrigé. *On écrit*

$$\cos\left(\frac{1}{\ln(n)}\right) - 1 = -\frac{1}{2\ln(n)^2} + o\left(\frac{1}{\ln(n)^2}\right).$$

de sorte que

$$d_n = \ln(n)^{\frac{1}{2}}\left(1 + \frac{1}{\ln(n)}\exp\left(-\frac{1}{2\ln(n)^2} + o\left(\frac{1}{\ln(n)^2}\right)\right)\right)^{\frac{1}{2}}.$$

On écrit ensuite

$$\begin{aligned}
\exp\left(-\frac{1}{2\ln(n)^2} + o\left(\frac{1}{\ln(n)^2}\right)\right) &= 1 + \left(-\frac{1}{2\ln(n)^2} + o\left(\frac{1}{\ln(n)^2}\right)\right) + o\left(\frac{1}{\ln(n)^2}\right),\\
&= 1 - \frac{1}{2\ln(n)^2} + o\left(\frac{1}{\ln(n)^2}\right).
\end{aligned}$$

Finalement,

$$\begin{aligned}
d_n &= \ln(n)^{\frac{1}{2}}\left(1 + \frac{1}{\ln(n)}\left(1 - \frac{1}{2\ln(n)^2} + o\left(\frac{1}{\ln(n)^2}\right)\right)\right)^{\frac{1}{2}}\\
&= \ln(n)^{\frac{1}{2}}\left(1 + \frac{1}{\ln(n)} - \frac{1}{2\ln(n)^3} + o\left(\frac{1}{\ln(n)^3}\right)\right)^{\frac{1}{2}}\\
&= \ln(n)^{\frac{1}{2}}\left(1 + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\ln(n)} - \frac{1}{2\ln(n)^3} + o\left(\frac{1}{\ln(n)^3}\right)\right)\right.\\
&\qquad\qquad \left. - \frac{1}{8}\left(\frac{1}{\ln(n)} - \frac{1}{2\ln(n)^3} + o\left(\frac{1}{\ln(n)^3}\right)\right)^2 + o\left(\frac{1}{\ln(n)^{\frac{5}{2}}}\right)\right)\\
&= \ln(n)^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{2\ln(n)^{\frac{1}{2}}} - \frac{1}{8\ln(n)^{\frac{3}{2}}} + o\left(\frac{1}{\ln(n)^2}\right)
\end{aligned}$$

Remarque importante : on a volontairement utilisé un $o\left(\ln(n)^{-\frac{5}{2}}\right)$ *en lieu et place d'un* $o\left(\ln(n)^{-2}\right)$ *pour se simplifier la vie et ne pas mettre en jeu les termes d'ordre suivants qui vont de toutes les façons disparaitre. Ceci est légal puisque le terme est en fait d'ordre* $\ln(n)^{-3}$*.*

Exercice 4 (4 points + 2 points bonus hors barême)**.** Soient a_0 et a_1 deux nombres réels. On définit la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par récurrence de la façon suivante

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad a_{n+2} = \frac{1}{2}\left(a_n + a_{n+1}\right).$$

1. Calculer les 5 premiers termes de la suite lorsque $a_0 = 0$ et $a_1 = 1$.

   Corrigé. *Un calcul direct montre que* $a_2 = \frac{1}{2}$, $a_3 = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{2}\right) = \frac{3}{4}$, $a_4 = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2} + \frac{3}{4}\right) = \frac{5}{8}$ *et finalement* $a_5 = \frac{1}{2}\left(\frac{5}{8} + \frac{3}{4}\right) = \frac{11}{16}$.

2. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$,
$$|a_{n+1} - a_n| \leq \frac{|a_1 - a_0|}{2^n}.$$

   Corrigé. *Rédigeons un joli raisonnement par récurrence. La propriété souhaitée est vrai au rang* $n = 0$ *puisque*
$$|a_1 - a_0| = \frac{|a_1 - a_0|}{2^0}.$$
   Supposons que la propriété soit vraie pour un certain rang $n \in \mathbb{N}$, *et montrons là au rang* $n + 1$. *On écrit*
$$\begin{aligned} |a_{n+2} - a_{n+1}| &= \left|\frac{1}{2}\left(a_n + a_{n+1}\right) - a_{n+1}\right| \\ &= \frac{1}{2}|a_n - a_{n+1}| \\ &\leq_{HR} \frac{|a_1 - a_0|}{2^{n+1}}. \end{aligned}$$

3. La suite a_n est elle convergente ?

   Corrigé. *Tout à fait. Montrons que cette suite est une suite de Cauchy. Soient* $n \in \mathbb{N}$ *et* $p > 0$, *puisque nous avons une estimation de la différence de deux termes consécutifs, nous avons l'idée de faire apparaitre une somme télescopique, c'est à dire,*
$$\begin{aligned} |a_{n+p} - a_n| &= \left|\sum_{k=n}^{n+p-1} (a_{k+1} - a_k)\right|, \\ &\leq \sum_{k=n}^{n+p-1} |a_{k+1} - a_k|, \\ &= |a_0 - a_1| \sum_{k=n}^{n+p-1} \frac{1}{2^k}, \\ &= \frac{|a_0 - a_1|}{2^n} \sum_{k=0}^{p-1} \frac{1}{2^k} \leq \frac{|a_0 - a_1|}{2^{n-1}}, \end{aligned}$$
   Pour conclure, soit $\varepsilon > 0$ *et* $N \in \mathbb{N}$ *tel que* $\frac{|a_0 - a_1|}{2^{N-1}} \leq \varepsilon$, *alors pour tout* $n \geq N$ *et* $p > 0$, *on aura* $|a_{n+p} - a_n| \leq \varepsilon$, *ce qui conclut.*

4. *(Question bonus)* Calculer la limite de a_n en fonction de a_0 et a_1.
   (Indication : On pourra commencer par montrer que la suite $a_{n+1} + \frac{a_n}{2}$ *est constante.)*

Corrigé. *Montrons que la suite* $a_{n+1} + \frac{a_n}{2}$ *est constante. On a, pour tout* $n \in \mathbb{N}$,

$$a_{n+2} + \frac{a_{n+1}}{2} = \frac{1}{2}\left(a_n + a_{n+1}\right) + \frac{a_{n+1}}{2} = \frac{1}{2}\left(a_n + 2a_{n+1}\right) = a_{n+1} + \frac{a_n}{2}.$$

On peut donc écrire que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$a_{n+1} + \frac{a_n}{2} = a_1 + \frac{a_0}{2}.$$

et la suite $a_{n+1} + \frac{a_n}{2}$ *est bien constante. On passe à la limite* $n \to \infty$ *dans l'égalité écrite à l'instant et on en déduit, comme* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est convergente vers, disons* ℓ, *que*

$$\ell + \frac{\ell}{2} = a_1 + \frac{a_0}{2},$$

et donc que $\ell = \dfrac{a_0 + 2a_1}{3}$.