Université Paris-Dauphine
J. Féjoz

Calcul différentiel et optimisation
Juin 2016

Examen de rattrapge

Deux heures — Sans document ni appareil électronique.
Les réponses doivent être concises.

1. Calcul d'une dérivée (2 points). — Soient $f : (\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m, 0) \to (\mathbb{R}^p, 0)$, $g : (\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m, 0) \to (\mathbb{R}^q, 0)$ et $F : (\mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^q, 0) \to \mathbb{R}^r$, $(u, v) \mapsto F(u, v)$ des fonctions dérivables telles que

$$F(f(x, y), g(x, y)) = 0 \quad (\forall x, y).$$

Calculer $f'(0, 0)$ en fonction de de $g'(0, 0)$, $\partial_u F(0, 0)$ (supposée inversible) et $\partial_v F(0, 0)$; on donnera les dimensions des diverses matrices intervenant dans la formule.

2. Une équation de transport (3 points). — Trouver les fonctions $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $(x, t) \mapsto f(x, t)$, de classe C^1 telles que $\partial_x f = \partial_t f$; on pourra utiliser le changement de variables $\varphi : (x, t) \mapsto (u, v) = (x + t, x - t)$.

3. Ellipsoïdes (5 points). — Pour $a, b, c > 0$, on note

$$\Sigma(a, b, c) = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3,\ \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 \right\}.$$

Montrer que $\Sigma(a, b, c)$ est une surface de $\mathbb{R}^3$, difféomorphe à $\Sigma(1, 1, 1)$ (c'est-à-dire qu'il existe un difféomorphisme $\Sigma(a, b, c) \to \Sigma(1, 1, 1)$). Quel est le plan tangent de $\Sigma(a, b, c)$ au point $(a, 0, 0)$?

4. Axes principaux d'un ellipsoïde (5 points). — Quels sont les extrema de $\|(x, y, z)\|$ (la norme euclidienne) sur $\Sigma(a, b, c)$ (défini à la question précédente) ?

5. Une fonction de Morse (5 points). — Soit $f : (\mathbb{R}^2, 0) \to \mathbb{R}$ une fonction de classe C^∞ telle que

$$f(x, y) = xy + O_3(x, y);$$

$O_3(x, y)$ désigne un reste d'ordre trois, c'est-à-dire de la forme $x^3\alpha(x, y) + x^2 y\beta(x, y) + xy^2\phi(x, y) + y^3\delta(x, y)$. Montrer de deux façons différentes que, localement au voisinage de 0, l'ensemble d'équation $f(x, y) = 0$ est la réunion de deux courbes passant par l'origine et tangentes aux axes de coordonnées ; on pourra utiliser d'une part le lemme de Morse, et d'autre part des changements de variables du type $\varphi : (x, t) \mapsto (x, Y) = (x, xt)$.

Solution. —

1. Calcul d'une dérivée. — D'après la formule de dérivation des fonctions composées,

$$F'(0,0)\cdot\begin{pmatrix} f'(0,0)\\ g'(0,0)\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\partial_u F(0,0) & \partial_v F(0,0)\end{pmatrix}\begin{pmatrix} f'(0,0)\\ g'(0,0)\end{pmatrix} = 0.$$

Donc, sous l'hypothèse de non dégénérescence de l'énoncé (intertibilité de $\partial_u F(0,0)$),

$$f'(0,0) = -\partial_u F(0,0)^{-1}\cdot\partial_v F(0,0)\cdot g'(0,0),$$

où

$$\begin{cases} f'(0,0)\in M_{p,n+m}(\mathbb{R}) & \equiv L(\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^m,\mathbb{R}^p)\\ g'(0,0)\in M_{q,n+m}(\mathbb{R}) & \equiv L(\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^m,\mathbb{R}^q)\\ \partial_u F(0,0)\in M_{r,p}(\mathbb{R}) & \equiv L(\mathbb{R}^p,\mathbb{R}^r)\\ \partial_v F(0,0)\in M_{r,q}(\mathbb{R}) & \equiv L(\mathbb{R}^q,\mathbb{R}^r).\end{cases}$$

2. Équation de propagation des ondes. — Soient f une fonctions vérifiant l'équation et F la fonction sur $\mathbb{R}^2$ définie par ce diagramme :

$$\begin{tikzcd} (x,t) \arrow[r, mapsto, "f"] \arrow[d, mapsto, "\varphi"] & f(x,t)=F(u,v) \\ (u,v) \arrow[ur, mapsto, "F"'] & \end{tikzcd}$$

Comme $f(x,t) = F\circ\varphi\,(x,t) = F(x+t,x-t)$,

$$\begin{cases}\partial_x f(x,t) = \partial_u F(x+t,x-t)+\partial_v F(x+t,x-t)\\ \partial_t f(x,t) = \partial_u F(x+t,x-t)-\partial_v F(x+t,x-t),\end{cases}$$

donc

$$\partial_x f(x,t)-\partial_t f(x,t) = 2\partial_v F(x+t,x-t).$$

Comme f est une solution de l'équation,

$$\partial_v F\equiv 0,$$

donc (d'après la formule de la moyenne) F est de la forme $F(u,v)=F_0(u)$ où F_0 est une fonction de classe C^1 sur $\mathbb{R}$, donc f elle-même est de la forme

$$f(x,t) = F_0(x+t).$$

Réciproquement, comme une simple dérivation le montre, les fonctions de cette forme sont bien des solutions.

3. Ellipsoïdes. — Soit $f:(x,y,z)\mapsto\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}$, de sorte que $\Sigma(a,b,c)$ ait pour équation $f=1$. La dérivée $f'(x,y,z) = 2\left(\frac{x}{a^2},\frac{y}{b^2},\frac{z}{c^2}\right)$ s'annule uniquement en $(x,y,z)=0$, donc en dehors de $\Sigma(a,b,c)$. Donc f est une submersion au voisinage de $\Sigma(a,b,c)$. Donc $\Sigma(a,b,c)$ est une surface de

$\mathbb{R}^3$, de codimension 1 (parce que l'équation est scalaire, donc constitue une contrainte de une dimension) donc de dimension $3-1=2$. L'application

$$\Sigma(a,b,c) \to \Sigma(1,1,1), \quad (x,y,z) \mapsto \left(\frac{x}{a}, \frac{y}{b}, \frac{z}{c}\right)$$

est un difféomorphisme. Enfin, le plan tangent à $\Sigma(a,b,c)$ en (x,y,z) a pour équation (en (ξ,η,ζ))

$$f'(x,y,z)\cdot(\xi,\eta,\zeta) = 2\left(\frac{x\xi}{a^2} + \frac{y\eta}{b^2} + \frac{z\zeta}{c^2}\right) = 0.$$

4. Axes principaux d'un ellipsoïde. — Soit $g(x,y,z) = \|(x,y,z)\|^2 = x^2 + y^2 + z^2$ sur $\mathbb{R}^n$ à extrémaliser sur $\Sigma(a,b,c)$ (ses extremums sont les mêmes que ceux de $\|(x,y,z)\|$, et en plus g est de classe C^∞). En un extremum de g sur $\Sigma(a,b,c)$, il existe une forme linéaire $\lambda \in L(\mathbb{R},\mathbb{R}) \equiv \mathbb{R}$ telle que

$$g'(x,y,z) = \lambda f'(x,y,z),$$

soit

$$\begin{pmatrix} x & y & z \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} \frac{x}{a^2} & \frac{y}{b^2} & \frac{z}{c^2} \end{pmatrix}.$$

Si $x \neq 0$, la première composante implique $\lambda = a^2$. Si de plus $b \neq a$ et $c \neq a$, l'ellipsoïde est de révolution et les deux dernières composantes impliquent $y = z = 0$, donc $x = a$. Si $b = a$ et $c \neq 0$, $z = 0$ et x et y sont quelconques tels que $x^2 + y^2 = a^2$. Si enfin $a = b = c$, l'ellipsoïde est une sphère et g est constante dessus. Les autres cas sont symétriques.

5. Une fonction de Morse. — Voir le poly, chapitre 19.
