Université Paris-Dauphine
J. Féjoz

Calcul différentiel et optimisation
Octobre 2017

Partiel

Deux heures — Sans document ni appareil électronique.
*Toutes les réponses doivent être justifiées mais **concises**.*
Mentionner sur la copie les erreurs d'énoncé éventuelles.

1. **Étude d'un chemin de $\mathbb{R}^2$ (4 points).** Tracer le chemin $c : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$, $t \mapsto (\sin^2 t, \sin^3 t)$; on déterminera en particulier la direction tangente à c aux points d'annulation éventuels de c'.

2. **Linéarisation d'un champ de vecteurs (4 points).** Soit $x : (\mathbb{R}, 0) \to (\mathbb{R}^n, 0)$ de classe C^1 vérifiant l'équation différentielle $x' = v(x)$, où $v : (\mathbb{R}^n, 0) \to (\mathbb{R}^n, 0)$ est de classe C^1. Soient de plus $\varphi : (\mathbb{R}^n, 0) \circlearrowleft$ un C^2-difféomorphisme local et $w : (\mathbb{R}^n, 0) \to (\mathbb{R}^n, 0)$ tel que $w \circ \varphi = \varphi' \cdot v$. Quelle équation différentielle le chemin $y = \varphi \circ x$ vérifie-t-il, en fonction de w ? Montrer que les matrices $v'(0)$ et $w'(0)$ sont semblables.

3. **Inversion de l'exponentielle (4 points).** Dans cet exercice, on pourra utiliser sans le justifier le fait que, dans $M_n(\mathbb{R})$, tout série absolument convergente converge. Quelle est la différentielle de l'application $M_n(\mathbb{R}) \circlearrowleft$, $M \mapsto M^k$ $(k \in \mathbb{N})$? En déduire que la formule $E(M) = \sum_{k \geqslant 0} \frac{M^k}{k!}$ définit une application $E : M_n(\mathbb{R}) \circlearrowleft$, qui est un difféomorphisme local en $I \in M_n(\mathbb{R})$, mais qui n'est pas surjective (on pourra s'inspirer du cas $n = 1$).

4. **Stabilité structurelle d'un difféomorphisme (8 points).** Soit $\mathcal{F}$ l'espace des applications $f : \mathbb{R}^2 \circlearrowleft$ continues $\mathbb{Z}^2$-périodiques (i.e. pour tous $x \in \mathbb{R}^2$ et $\xi \in \mathbb{Z}^2$, $f(x + \xi) = f(x)$) telles que $f(0) = 0$. Soit $\mathcal{F}^{\text{lip}}$ le sous-espace des fonctions lipschitziennes de $\mathcal{F}$.

Montrer que la norme uniforme $\|\cdot\| : f \mapsto \max_x \|f(x)\|$ et le rapport de Lipschitz $\operatorname{lip} : f \mapsto \sup_{x \neq x'} \frac{\|f(x) - f(x')\|}{\|x - x'\|}$ sont des normes respectivement sur $\mathcal{F}$ et $\mathcal{F}^{\text{lip}}$, dont les distances associées sont complètes (i.e. toute suite de Cauchy converge).

Montrer que, si $f \in \mathcal{F}$ et $\operatorname{lip} f \ll 1$, le rapport de Lipschitz de l'opérateur $\phi : \mathcal{F} \circlearrowleft$, $h \mapsto f \circ (\operatorname{id} + h)$ est arbitrairement petit. En déduire qu'il existe une unique application $h \in \mathcal{F}$ telle que $h = f \circ (\operatorname{id} + h)$, et donner une majoration de $\operatorname{lip} h$ en fonction de $\operatorname{lip} f$.

(*) Si $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ et si $f \in \mathcal{F}$ avec $\operatorname{lip} f \ll 1$, montrer qu'il existe $h \in \mathcal{F}$ tel que $H = \operatorname{id} + h : \mathbb{R}^2 \circlearrowleft$ soit un homéomorphisme et $H \circ A = (A + f) \circ H$.

Solution.

1. **Étude d'un chemin de $\mathbb{R}^2$.** Le chemin c est 2π-périodique. De plus, $c(-t)$ est symétrique de $c(t)$ par rapport à l'axe des x. Et $c(\pi - t) = c(t)$. Il suffit donc d'étudier c sur l'intervalle $[0, \pi/2]$.

Les fonctions x et y sont croissantes sur $[0, \pi/2]$, et leurs dérivées s'annulent l'une et l'autre en 0 et en π.

Au voisinage de 0, $x \sim t^2$ et $y \sim t^3$, donc la pente entre $c(0)$ et $c(t)$ vaut $p = y/x \sim t \to 0$ quand $t \to 0$. Donc la tangente à c en $t = 0$ est horizontale. (Comme la fonction y est impaire, quand t est négatif la courbe repart de l'autre côté de la tangente. Donc $t = 0$ est un point de rebroussement de première espèce.)

Au voisinage de $\pi/2^-$, posons $t = \pi/2 - \tau$, de sorte que

$$x(t) = \cos^2 \tau \sim 1 - h^2, \quad y(t) = \cos^3 \tau \sim 1 - \frac{3}{2}h^2,$$

et la pente entre $c(t)$ et $c(\pi/2) = (1, 1)$ vaut

$$p = \frac{1-y}{1-x} \sim \frac{3}{2}.$$

Donc la tangente à c en $t = \pi/2$ a pour équation

$$y = \frac{3}{2}(x - 1) + 1.$$

(Comme $c(\pi - t) = c(t)$, quand t est supérieur à $\pi/2$ la courbe repasse par les mêmes points, donc en particulier du même côté de la tangente. Donc $t = \pi/2$ est un point de rebroussement de seconde espèce.)

D'après les remarques préliminaires, on obtient toute la courbe c en symétrisant cette portion de courbe par rapport à l'axe des x. Voir la figure 1.

2. **Linéarisation d'un champ de vecteurs.** On a

$$\begin{aligned}
y' &= (\varphi \circ x)' && \text{(définition de } y\text{)} \\
&= \varphi' \circ x \cdot x' && \text{(dérivation de fonctions composées)} \\
&= \varphi' \circ x \cdot v \circ x && \text{(équation de } x\text{)} \\
&= w \circ \varphi \circ x && \text{(définition de } w\text{)} \\
&= w \circ y && \text{(définition de } y\text{).}
\end{aligned}$$

De plus, en dérivant la formule

$$w' \circ \varphi = \varphi' \circ v$$

en $x = 0$ et en utilisant le fait que $v(0) = 0$, on obtient

$$w'(0) \cdot \varphi'(0) = \varphi'(0) \cdot v'(0),$$

donc l'endomorphisme de $\mathbb{R}^n$

$$w'(0) = \varphi'(0) \cdot v'(0) \cdot \varphi'(0)^{-1}$$

est semblable à $v'(0)$.

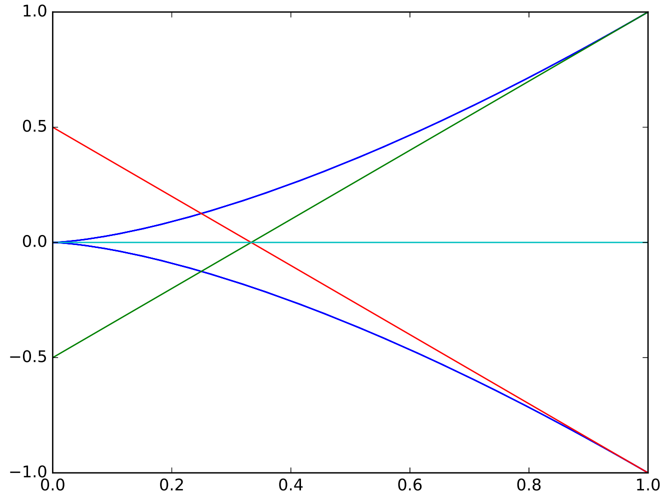

FIGURE 1. Le chemin $c : t \mapsto (\sin^2 t, \sin^3 t)$ et ses tangentes en $t = 0$ et $t = \pm\pi$.

3. **Inversion de l'exponentielle.** La série $E(M)$ est absolument convergente dans $M_n(\mathbb{R})$, donc converge.

La dérivée en M de $M \mapsto M^k$ est

$$H \mapsto \sum_{0 \leqslant l \leqslant k-1} M^l H M^{k-l-1},$$

soit, si $M = I$, $H \mapsto kH$. Donc

$$E'(I) \cdot H = \sum_{k \geqslant 1} \frac{k}{k!} H = eH.$$

Comme $e \neq 0$, $E'(I)$ est inversible (d'inverse $H \mapsto H/e$). D'après le théorème d'inversion locale, E est donc un difféomorphisme local au voisinage de I.

Un calcul élémentaire montre que $E(M)E(-M) = I$, donc $E(M)$ est inversible (d'inverse $E(-M)$), donc E est à valeurs dans $GL_n(\mathbb{R})$. Donc E n'est pas surjective dans $M_n(\mathbb{R})$.

4. **Stabilité structurelle d'un difféomorphisme (8 points).** Nous laissons au lecteur le soin de vérifier que la norme uniforme est une norme sur $\mathcal{F}$.

La fonction lip : $\mathcal{F}^{\mathrm{lip}} \to [0, +\infty[$ aussi vérifie les axiomes de définition d'une norme :

— séparation : si $\operatorname{lip} f = 0$, pour tout $x \in \mathbb{R}^2$ on a

$$\|f(x)\| = \|f(x) - f(0)\| \leqslant 0\|x - 0\| = 0,$$

donc $f = 0$

— homogénéïté : pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, $\operatorname{lip} \lambda f = |\lambda| \operatorname{lip} f$

— inégalité triangulaire : $\operatorname{lip}(f + g) \leqslant \operatorname{lip} f + \operatorname{lip} g$.

Montrons que $\|\cdot\|$ est complète. Soit (f_n) une suite de Cauchy de $\mathcal{F}$:

$$\|f_{n+k} - f_n\| \to 0$$

quand n tend vers l'infini, uniformément par rapport à k. Alors, pour tout $x \in \mathbb{R}^2$,

$$\|f_{n+k}(x) - f_n(x)\| \to 0,$$

uniformément par rapport à k, donc $(f_n(x))$ est une suite de Cauchy de $\mathbb{R}^2$ (qui est complet) donc convergente. Donc (f_n) converge simplement, vers une application $f : \mathbb{R}^2 \circlearrowleft$, qui est certainement $\mathbb{Z}^2$-périodique et telle que $f(0) = 0$ (conditions fermées). D'ailleurs, (f_n) converge vers f uniformément : pour tout $\epsilon > 0$, il existe N tel que pour tout $n \geqslant N$ et pour tous x et k

$$\|f_{n+k}(x) - f_n(x)\| < \epsilon;$$

donc, pour tous n, x et k,

$$\|f_n(x) - f(x)\| \leqslant \|f_n(x) - f_{n+k}(x)\| + \|f_{n+k}(x) - f(x)\|,$$

où le permier terme du membre de droite tend vers 0 quand n tend vers l'infini (uniformément par rapport à k et x), et le second terme tend vers 0 k est grand (uniformément par rapport à x). Donc (f_n) converge vers f dans $(\mathcal{F}, \|\cdot\|)$.

Montrons maintenant que lip fait de $\mathcal{F}^{\mathrm{lip}}$ un espace complet. Soit (f_n) une suite de Cauchy pour la norme lip :

$$\mathrm{lip}(f_{n+k} - f_n) \to 0$$

quand n tend vers l'infini, uniformément par rapport à k. Remarquons que, pour toute fonction $g \in \mathcal{F}^{\mathrm{lip}}$ et tout $x \in \mathbb{R}^2$,

$$\|g(x)\| = \|g(x) - (0))\| \leqslant \mathrm{lip}\, g,$$

donc, en prenant $g = f_{n+k} - f_n$ on voit que (f_n) est une suite de Cauchy pour la norme uniforme aussi. D'après ce qui précède, (f_n) converge donc simplement, vers une application $f : \mathbb{R}^2 \circlearrowleft$ $\mathbb{Z}^2$-périodique et telle que $f(0) = 0$.

Il reste à montrer que (f_n) converge vers f au sens de la norme lip (et en particulier que f lipschitzienne).[1] Pour majorer $\mathrm{lip}(f_n - f)$, remarquons

1. Pour la compréhension (bien que ce ne soit pas nécessaire pour la démonstration), on peut remarquer que (f_n) est uniformément lipschtizienne. En effet, comme pour toute norme, l'inégalité triangulaire implique

$$|\,\mathrm{lip}\, f_{n+k} - \mathrm{lip}\, f_n| \leqslant \mathrm{lip}(f_{n+k} - f_n),$$

donc la suite réelle $(\mathrm{lip}\, f_n)$ est de Cauchy, donc (puisque $\mathbb{R}$ est complet) bornée, et il existe $L \in \mathbb{R}$ tel que $0 \leqslant \mathrm{lip}\, f_n \leqslant L$ pour tout n. Autrement dit, pour tous $x \neq x' \in \mathbb{R}^2$,

$$0 \leqslant \frac{\|f_n(x) - f_n(x')\|}{\|x - x'\|} \leqslant L,$$

et, en passant à la limite quand n tend vers l'infini, puis à la borne supérieure sur tous les $x \neq x'$, on voit que

$$\mathrm{lip}\, f \leqslant L < \infty,$$

donc $f \in \mathcal{F}^{\mathrm{lip}}$.

que, pour tous $x \neq x'$, n et k,

$$\|(f_n - f)(x) - (f_n - f)(x')\| \leqslant \|(f_n - f_{n+k})(x) - (f_n - f_{n+k})(x')\| + \\ \|(f_{n+k} - f)(x) - (f_{n+k} - f)(x')\|,$$

donc

$$\frac{\|(f_n - f)(x) - (f_n - f)(x')\|}{\|x - x'\|} \leqslant \operatorname{lip}(f_{n+k} - f_n) + \\ \frac{\|(f_{n+k} - f)(x) - (f_{n+k} - f)(x')\|}{\|x - x'\|}.$$

Il existe N tel que, si $n \geqslant N$, pour tout k, le premier terme du membre de droite est $\leqslant \epsilon$. De plus, pour un tel n, pour tous $x \neq x'$, si k est assez grand, le second terme est $\leqslant \epsilon$ (par convergence simple de $(f_{n+k})_k$ vers f). Donc $\operatorname{lip}(f_n - f)$ tend vers 0, i.e. (f_n) converge vers f dans $\mathcal{F}^{\mathrm{lip}}$.

Considérons maintenant l'opérateur

$$\phi : \mathcal{F} \circlearrowleft, \quad \phi(h) = f \circ (\mathrm{id} + h).$$

On a

$$\|\phi h - \phi k\| \leqslant \operatorname{lip} f \|h - k\|.$$

Donc

$$\operatorname{lip} \phi \leqslant \operatorname{lip} f.$$

Si f est une contraction stricte sur $\mathbb{R}^n$, il en est donc de même de ϕ sur $\mathcal{F}$, et alors ϕ possède un unique point fixe h. Ce point fixe vérifie

$$\operatorname{lip} h \leqslant \operatorname{lip} f \operatorname{lip}(\mathrm{id} + h) \leqslant (\operatorname{lip} f)(1 + \operatorname{lip} h)$$

donc

$$\operatorname{lip} h \leqslant \frac{\operatorname{lip} f}{1 - \operatorname{lip} f}.$$

Dans la dernière question, on cherche $h \in \mathcal{F}$ tel que

$$(\mathrm{id} + h) \circ A = (A + f) \circ (\mathrm{id} + h),$$

soit

$$h \circ A - Ah = f \circ (\mathrm{id} + h).$$

Notons $L_A : h \mapsto h \circ A - Ah$. L'équation de conjugaison s'écrit maintenant

$$L_A h(x) = f(x + h(x)).$$

Nous allons montrer que l'opérateur L_A est inversible, et estimer son inverse. On pourra alors conclure par un argument parfaitement analogue à celui de la question précédente, où il suffira de remplacer ϕ par $L_A^{-1} \phi$.

Il s'agit donc pour commencer de résoudre l'équation

$$L_A h = g,$$

une fonction $g \in \mathcal{F}$ étant donnée. Les valeurs propres de A sont

$$\lambda_{1,2} = \frac{3 \pm \sqrt{5}}{2}, \quad 0 < \lambda_1 < 1 < \lambda_2.$$

Soient (e_1, e_2) une base de vecteurs propres de A ($Ae_i = \lambda_i e_i$, $i = 1, 2$).

(Remarque : Comme A est dans $SL_2(\mathbb{Z})$, A induit un lipéomorphisme de $\mathbb{T}^2 = \mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$. La matrice diagonale de A n'est pas à coefficients dans $\mathbb{Z}^2$, donc n'induit pas un lipéomorphisme de $\mathbb{T}^2$.)

Décomposons g et h dans la base propre : $g = g_1e_1+g_2e_2$ et $h = h_1e_1+h_2e_2$, de sorte que l'équation prend la forme suivante :

$$h_i(Ax) - \lambda_i h_i(x) = g_i(x), \quad i = 1, 2.$$

Considérons d'abord le cas $i = 1$. Le membre de gauche définit un opérateur linéaire $\eta \mapsto \eta\circ A-\lambda_1\eta$. L'opérateur $a : \eta \mapsto \eta\circ A$ est un lipéomorphisme, et

$$\operatorname{lip} a^{-1} = \frac{1}{\lambda_1} \in]1, +\infty[.$$

L'opérateur $b : \eta \mapsto \lambda_1\eta$ vérifie $\operatorname{lip} b = \lambda_1$. Malheureusement donc,

$$\operatorname{lip}(a^{-1}) \operatorname{lip} b = 1,$$

et il n'est donc pas évident que $a+b$ soit inversible, de peu s'en faut (il aurait suffit que ce produit soit < 1) !

En revanche, si l'on essaye de résoudre l'équation dans la catégorie des applications continues, avec la norme uniforme, l'opérateur a, comme son inverse, sont des isométries, tandis que b a une norme $\leqslant \lambda_1$. Donc on peut montrer que le problème posé possède une solution H parmi les homéomorphismes de $\mathbb{R}^2$. Voir les détails dans [**?** , Paragraphe 13, Introduction to hyperbolic theory].