Université Paris-Dauphine
J. Féjoz

Calcul différentiel et optimisation
Octobre 2016

Examen partiel

Deux heures — Sans document ni appareil électronique.
*Toutes les réponses doivent être justifiées mais **concises**.*
Mentionner sur la copie les erreurs d'énoncé éventuelles.
Chaque exercice est sur 4 points.

1. Un revêtement. — Montrer que l'application $f : \mathbb{R}^2 \circlearrowleft$, $(z,t) \mapsto e^z(\cos t, \sin t)$ est un difféomorphisme local en tout point, mais pas un difféomorphisme de $\mathbb{R}^2$ sur $f(\mathbb{R}^2)$.

2. Une équation de transport. — Trouver les fonctions $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $(x,y) \mapsto f(x,y)$, de classe C^1 telles que

$$\partial_x f + 2x \partial_y f = 0,$$

et tracer leurs courbes de niveau (d'équation $f = cste$) ; on pourra utiliser le changement de variables $(x,y) \mapsto (x,t) = (x, y - x^2)$.

3. Calcul d'une dérivée seconde. — Soient $f : (\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m, 0) \to (\mathbb{R}^m, 0)$ de classe C^2 telle que $\det \partial_y f(0,0) \neq 0$ et $\varphi : (\mathbb{R}^n, 0) \to (\mathbb{R}^m, 0)$ telle que $f(x, \varphi(x)) = 0$ pour tout x. Justifier que φ est de classe C^2 au voisinage de 0, puis calculer φ' et φ'' en fonction de φ et des dérivées partielles de f ; en cas de difficulté, on pourra commencer par le cas $n = m = 1$.

4. Une application localement lipschitzienne. — Soit $f : \mathbb{R}^n \circlearrowleft$ une application dont la restriction à tout compact de $\mathbb{R}^n$ est lipschitzienne. Donner un exemple d'une telle application dans le cas $n = 1$, qui ne soit pas lipschtzienne sur $\mathbb{R}$. Puis montrer, dans le cas général, que, pour tout $y \in \mathbb{R}^n$, il existe $\varepsilon_0 > 0$ tel que, pour tout $\varepsilon \in [0, \varepsilon_0]$, il existe $x \in \mathbb{R}^n$ tel que $x + \varepsilon f(x) = y$.

5. Divergence d'un champ de vecteurs. — Soient $v : (\mathbb{R}^n, a) \to \mathbb{R}^n$ une application de classe C^2 (*champ de vecteurs*) et $\varphi : (\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n, (0,a)) \to (\mathbb{R}^n, a)$ une application de classe C^2 telle que

$$\varphi(0,x) = x \quad \text{et} \quad \frac{\partial \varphi}{\partial t}(t,x) = v(\varphi(t,x)) \quad (\forall t, x)$$

(nous ne nous préoccupons pas ici de la question de l'existence de φ). La *divergence* de v est la fonction $\operatorname{div} v : (\mathbb{R}^n, a) \to \mathbb{R}$, $\operatorname{div} v = \operatorname{tr} v'$ (trace de la dérivée de v). Montrer que

$$\operatorname{div} v = \left. \left(\frac{\partial}{\partial t} \det \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right) \right|_{t=0} ;$$

on pourra commencer par calculer la dérivée de l'application déterminant $M_n(\mathbb{R}) \circlearrowleft$ en l'identité.

Solution. —

1. Un revêtement. — L'application f est de classe C^∞. Pour tout $(z,t) \in \mathbb{R}^2$,

$$f'(z,t) = e^z \begin{pmatrix} \cos t & -\sin t \\ \sin t & \cos t \end{pmatrix},$$

donc

$$\det f'(z,t) = e^{2z} \neq 0.$$

D'après le théorème d'inversion locale, f est donc un difféomorphisme local en tout point.

Comme f est 2π-périodique par rapport à t, f n'est pas injective, donc elle n'est pas un difféomorphisme sur $\mathbb{R}^n$. Accessoirement, $|f(z,t)| = e^z > 0$ donc $(0,0)$ n'est pas dans l'image de f, donc f n'est pas surjective non plus. (L'application f s'appelle un *revêtement* de degré infini sur $\mathbb{R}^2 \backslash \{(0,0)\}$.

2. Équation de transport. — Soient f une fonctions vérifiant l'équation et F la fonction sur $\mathbb{R}^2$ définie par ce diagramme :

$$\begin{tikzcd} (x,y) \arrow[r, mapsto, "\varphi"] \arrow[d, mapsto, "f"'] & (x,t) \arrow[dl, mapsto, "F"] \\ f(x,y) = F(x,t) & \end{tikzcd}$$

On a $f(x,y) = F \circ \varphi\,(x,y) = F(x, y - x^2)$, donc

$$\begin{cases} \partial_x f(x,y) = \partial_x F(x, y-x^2) - 2x\,\partial_t F(x, y-x^2) \\ \partial_y f(x,y) = \partial_t F(x, y-x^2), \end{cases}$$

donc

$$0 = \partial_x f(x,y) + 2x\,\partial_y f(x,y) = \partial_x F(x, y-x^2) \quad (\forall x, y),$$

donc

$$\partial_x F \equiv 0,$$

donc (d'après la formule de la moyenne) F est de la forme $F(x,t) = F_0(t)$ où F_0 est une fonction de classe C^1 sur $\mathbb{R}$, donc f elle-même est de la forme

$$f(x,y) = F_0(y - x^2).$$

Réciproquement, comme une simple dérivation le montre, les fonctions de cette forme sont bien des solutions.

Les courbes de niveau d'une telle fonction f sont, en général, les paraboles d'équation $y = x^2 + cte$ (si F_0 ne possède pas de points critiques).

3. Calcul d'une dérivée seconde. — Le théorème des fonctions implicites dit que φ existe, est unique, et est classe C^2.

En dérivant la relation dans la direction de $\xi \in \mathbb{R}^n$, on trouve

$$\varphi'(x) \cdot \xi = -\partial_y f(x, \varphi(x))^{-1} \cdot \partial_x f(x, \varphi(x)) \cdot \xi.$$

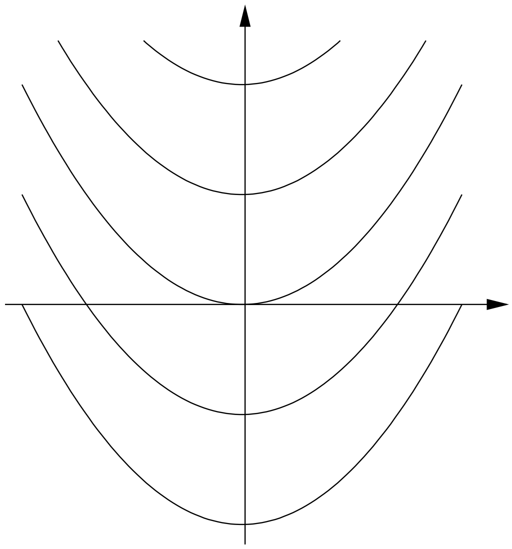

FIGURE 1. Courbes de niveau des solutions de l'équation de transport

Dérivons une seconde fois, dans la direction de $\eta \in \mathbb{R}^n$:

$$\begin{aligned}\varphi''(x)\cdot(\xi,\eta) =&\partial_y f(x,\varphi(x))^{-1}\cdot(\partial_{xy} f(x,\varphi(x))\cdot\eta+\partial_{yy} f(x,\varphi(x))\cdot\varphi'(x)\cdot\eta))\cdot\partial_y f(x,\varphi(x))^{-1}\cdot\partial_x f(x,\varphi(x))\cdot\xi\\ &-\partial_y f(x,\varphi(x))^{-1}\cdot(\partial_{xx} f(x,\varphi(x))+\partial_{yx} f(x,\varphi(x))\cdot\varphi'(x))\cdot(\xi,\eta).\end{aligned}$$

4. Une application localement lipschitzienne. — Soient $y \in \mathbb{R}^n$ et $B = B(y,1)$. Dire que $x + \varepsilon f(x) = y$, c'est dire que x est un point fixe de $\phi : \mathbb{R}^n \circlearrowleft$, $x \mapsto y - \varepsilon f(x)$. Notons $M = \sup_{x\in B} \|f(x)\|$. Comme

$$\|y - \phi(x)\| = \varepsilon\|f(x)\|,$$

il suffit de choisir $\varepsilon \leqslant 1/M$ pour que ϕ envoie B dans elle-même. Comme de plus le rapport de Lipschitz de $\phi|_B$ vaut $\varepsilon \operatorname{lip} f|_{B(y,1)}$, $\phi|_B$ est une contraction stricte si de plus $\varepsilon < (\operatorname{lip} f|_{B(y,1)})^{-1}$. Alors ϕ possède un unique point fixe. Donc

$$\varepsilon_0 = \min\left(\frac{1}{M}, \frac{1}{2\operatorname{lip} f|_{B(y,1)}}\right)$$

convient.

On peut aussi obtenir le résultat en utilisant le théorème d'inversion locale lipschitzien appliqué à $\mathrm{id} : (\mathbb{R}^n, y) \circlearrowleft$ perturbée par l'application lipschitzienne $\epsilon f : (\mathbb{R}^n, y) \to \mathbb{R}^n$.

5. Divergence d'un champ de vecteurs. — La dérivée du déterminant en l'identité est la trace ; c'est un fait classique vu en exercice. Donc,

$$\frac{\partial}{\partial t}\det\frac{\partial\varphi}{\partial x}\bigg|_{t=0} = \operatorname{tr}\frac{\partial^2\varphi}{\partial t\partial x}\bigg|_{t=0} = \operatorname{tr}\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial\varphi}{\partial t}\bigg|_{t=0} = \operatorname{tr}\frac{\partial v}{\partial x} = \operatorname{tr} v' = \operatorname{div} v.$$