Université Paris-Dauphine
J. Féjoz

Calcul différentiel et optimisation

Examen partiel d'octobre 2015

Deux heures — Sans document ni appareil électronique.
Chaque question sera notée sur environ trois points, ou quatre si elle est étoilée.
Les réponses doivent être concises.

1. Formule d'Euler. — Soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable. Montrer que, si f est homogène de degré $d \geqslant 0$ ($f(tx) = t^d f(x)$ pour tous $x \in \mathbb{R}^n$ et $t \in \mathbb{R}$),

$$f'(x) \cdot x = d\, f(x).$$

2. Une équation de transport. — Trouver les fonctions $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $(x,t) \mapsto f(x,t)$, de classe C^1 telles que $\partial_x f = \partial_t f$; on pourra utiliser le changement de variables $\varphi : (x,t) \mapsto (u,v) = (x+t, x-t)$.

3. Fonction implicite. — Soit $f : (\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p, (a,b)) \to (\mathbb{R}^p, c)$, $(x,y) \mapsto f(x,y)$, une fonction de classe C^1, telle que $\partial_y f(a,b)$ soit inversible. Déduire du théorème d'inversion locale qu'il existe une unique fonction $\varphi : (\mathbb{R}^n, a) \to (\mathbb{R}^p, b)$ telle que, localement au voisinage de (a,b), $f(x,y) = c \Leftrightarrow y = \varphi(x)$. Que vaut $\varphi'(a)$?

4. Relation entre dérivées partielles. — Soit $f : (\mathbb{R}^3, (a,b,c)) \to \mathbb{R})$ une fonction de classe C^1 telle que

$$\partial_x f(a,b,c) \neq 0,\ \partial_y f(a,b,c) \neq 0,\ \partial_z f(a,b,c) \neq 0.$$

On note X, Y, Z les fonctions, définies implicitement et localement, telles que

$$f(x,y,z) = 0 \Leftrightarrow x = X(y,z) \Leftrightarrow y = Y(x,z) \Leftrightarrow z = Z(x,y).$$

Que vaut le produit $\partial_y X\, \partial_z Y\, \partial_x Z$ au point (a,b,c) ?

5. L'équation de degré trois ⋆. — Soit $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $(x,p,q) \mapsto x^3 + px + q$. Dessiner, pour p fixé respectivement < 0, $= 0$ et > 0, les courbes d'équation $f(x,p,q) = 0$ dans le plan des (x,q). Puis tracer dans le plan des (p,q) le lieu des points où l'équation $f = 0$ ne détermine pas de fonction implicite $x(p,q)$.

6. Un lemme de division ⋆. — Soient $f : (\mathbb{R}^n, 0) \to \mathbb{R}$ une fonction de classe C^∞ et $g : (\mathbb{R}^n, 0) \to \mathbb{R}^p$ une submersion de classe C^∞. Montrer que

$$g(x) = 0 \Rightarrow f(x) = 0 \quad (\forall x)$$

si et seulement si il existe une fonction $a : (\mathbb{R}^n, 0) \to (\mathbb{R}^p, 0)$ telle que $f(x) = a(x) \cdot g(x)$ (le produit scalaire euclidien de $a(x)$ et $g(x)$); on pourra commencer par montrer qu'il existe un difféomorphisme $\alpha : (\mathbb{R}^n, 0) \to (\mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^{n-p}, (0,0))$ tel que $g \circ \alpha^{-1}(X,Y) = X$.

Solution. —

1. — Par hypothèse, $f(tx) = t^d f(x)$. En dérivant par rapport à t, on obtient

$$f'(tx) \cdot x = d\, t^{d-1} f(x),$$

donc, en $t = 1$,

$$f'(x) \cdot x = d\, f(x).$$

2. — Soient f une fonctions vérifiant l'équation et F la fonction sur $\mathbb{R}^2$ définie par ce diagramme:

$$\begin{tikzcd}
(x,t) \arrow[r, mapsto, "f"] \arrow[d, mapsto, "\varphi"] & f(x,t) = F(u,v) \\
(u,v) \arrow[ur, mapsto, "F"'] &
\end{tikzcd}$$

Comme $f(x,t) = F \circ \varphi\,(x,t) = F(x+t, x-t)$,

$$\begin{cases} \partial_x f(x,t) = \partial_u F(x+t, x-t) + \partial_v F(x+t, x-t) \\ \partial_t f(x,t) = \partial_u F(x+t, x-t) - \partial_v F(x+t, x-t), \end{cases}$$

donc

$$\partial_x f(x,t) - \partial_t f(x,t) = 2\partial_v F(x+t, x-t).$$

Comme f est une solution de l'équation,

$$\partial_v F \equiv 0,$$

donc (d'après la formule de la moyenne) F est de la forme $F(u,v) = F_0(u)$ où F_0 est une fonction de classe C^1 sur $\mathbb{R}$, donc f elle-même est de la forme

$$f(x,t) = F_0(x+t).$$

Réciproquement, comme une simple dérivation le montre, les fonctions de cette forme sont bien des solutions.

3. — L'application

$$F : (\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p, (a,b)) \to (\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p, (a,c)), \quad (x,y) \mapsto (x, f(x,y))$$

a pour dérivée, en (a,b),

$$F'(a,b) = \begin{pmatrix} \partial_x F(a,b) & \partial_y F(a,b) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_n & 0 \\ \partial_x f(a,b) & \partial_y(a,b) \end{pmatrix}.$$

Le bloc I_n est de rang n, tandis que le bloc $\partial_y f(a,b)$ est de rang p. Donc l'endomorphisme $F'(a,b)$ de $R^n \times \mathbb{R}^p$ est de rang $n+p$, donc c'est un isomorphisme. D'après le théorème d'inversion locale, F est un difféomorphisme local.

Donc f est équivalente à la projection sur le second facteur:

$$\begin{tikzcd}
(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p, (a,b)) \arrow[r, "f"] \arrow[d, "F"'] & (\mathbb{R}^p, c)\ , \\
(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p, (a,c)) \arrow[ur, "pr_2"'] &
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
(x,y) \arrow[r, mapsto] \arrow[d, mapsto] & f(x,y) = Y. \\
(X,Y) = (x, f(x,y)) \arrow[ur, mapsto] &
\end{tikzcd}$$

Soit $\phi : (\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p, (a, c)) \to (\mathbb{R}^p, b)$ l'application définie par l'égalité $F^{-1}(X, Y) = (X, \phi(X, Y))$. Si l'on note $(X, Y) = F(x, y)$, comme $f = pr_2 \circ F$,

$$f(x, y) = c \Leftrightarrow Y = c \Leftrightarrow y = \phi(x, c) \Leftrightarrow y = \varphi(x)$$

à condition d'avoir défini

$$\varphi = \phi(\cdot, c) : (\mathbb{R}^n, a) \to (\mathbb{R}^p, b).$$

4. — En (a, b, c), on a

$$\partial_y X \, \partial_z Y \, \partial_x Z = (-\partial_x f^{-1} \, \partial_y f)\,(-\partial_y f^{-1} \, \partial_z f)\,(-\partial_z f^{-1} \, \partial_x f) = -1.$$

5. — Les courbes d'équation $f = 0$ sont les graphes des fonctions

$$q : x \mapsto -x^3 - px,$$

et sont dessinées figure 1.

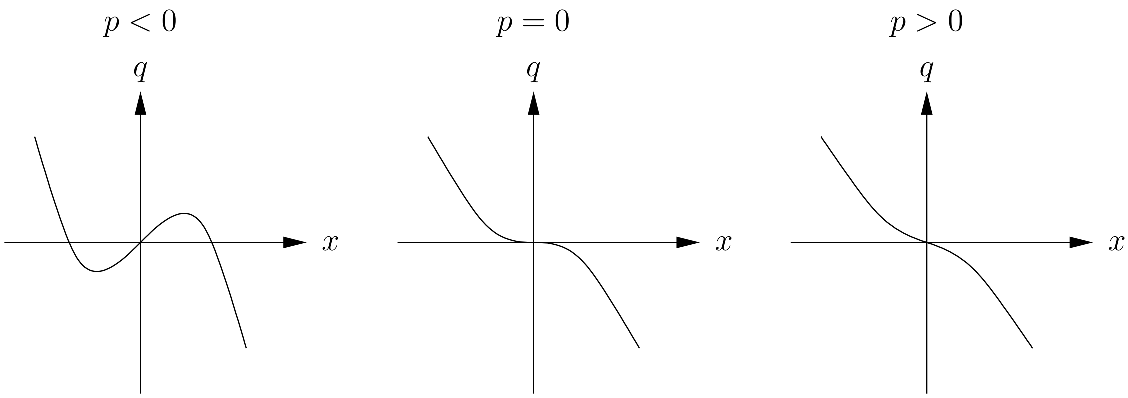

FIGURE 1. Courbes $x^3 + px + q = 0$ dans le plan (x, q)

Là où $\partial_x f(x, p, q) \neq 0$, soit $3x^2 + p \neq 0$, on peut résoudre implicitement l'équation $f = 0$ par rapport à x, d'après le théorème des fonctions implicites.

Réciproquement, si

$$f(x, p, q) = 0 \quad \text{et} \quad \partial_x f(x, p, q) = 0, \tag{1}$$

x est une racine double du polynôme $x^3 + px + q$, puisque, d'après la formule de Taylor à l'ordre 3 (le reste est nul parce que f est de degré 3 en x),

$$f(x + \xi, p, q) = 3x\,\xi^2 + \xi^3 = \xi^2(3x + \xi).$$

L'ensemble de ces points s'appelle le *contour apparent* de $f = 0$ dans la direction de x, et sa projection sur le plan (p, q) est la *courbe discriminante* de f. L'équation de la courbe discriminante s'obtient en éliminant x des équations 1:

$$4p^3 + 27q^2 = 0.$$

Cette courbe est située entièrement dans le demi-plan $p \leqslant 0$ et possède un point de rebroussement en 0. Elle est tracée figure 2.

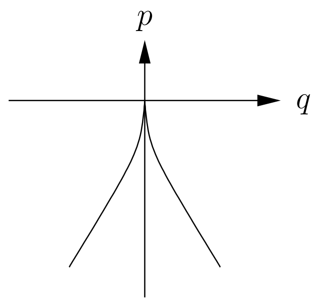

FIGURE 2. Courbe discriminante

6. — Reprenons la démonstration du théorème de submersion pour en tirer une conclusion peut-être plus précise que ce qu'on en a retenu en cours (on ne veut pas de changement de coordonnées dans l'espace d'arrivée de g, parce que la conclusion cherchée ne s'en accomoderait pas). Soit V un supplémentaire de $\ker g'(0)$ dans $\mathbb{R}^n$. Soient α_1 un isomorphisme $\mathbb{R}^n \to V \times \ker g'(0)$, $x \mapsto (\xi, \eta)$, et $g_1 = g \circ \alpha^{-1}$; g_1 est une submersion au même titre que g, donc $\partial_\xi g_1(0,0)$ est de rang p (puisque $\partial_\eta g_1(0,0) = 0$). L'application $\alpha_2 : (\xi, \eta) \mapsto (g_1(\xi, \eta), \eta)$ a pour dérivée en $(0,0)$ la matrice

$$\begin{pmatrix} \partial_\xi g_1(0,0) & \partial_\eta g_1(0,0) \\ 0 & I_{n-p} \end{pmatrix},$$

qui est de rang n. D'après le théorème d'inversion locale, α_2 est un difféomorphisme local. Alors, trivialement,

$$g_1 \circ \alpha_2^{-1} = J_p : (X, Y) \mapsto X.$$

Finalement, si l'on note $\alpha = \alpha_2 \circ \alpha_1$, on voit que $g = J_p \circ \alpha$, soit

$$J_p(X, Y) = g \circ \alpha^{-1}(X, Y) = X.$$

L'hypothèse sur f dit que

$$g(x) = 0 \Rightarrow f(x) = 0,$$

soit, par application à $x = \alpha^{-1}(X, Y)$,

$$g \circ \alpha^{-1}(X, Y) = 0 \Rightarrow f \circ \alpha^{-1}(X, Y) = 0,$$

soit, en notant $F(X, Y) = f \circ \alpha^{-1}(X, Y)$,

$$F(0, Y) = 0 \quad (\forall Y \text{ localement}).$$

La formule de la moyenne appliquée à la fonction $X \mapsto F(X, Y)$ dit donc que, au voisinage de $(0,0)$,

$$F(X, Y) = A(X, Y) \cdot X, \quad A(X, Y) = \int_0^1 \partial_X F(tX, Y)\, dt.$$

En composant à droite par α, on obtient

$$f(x) = a(x) \cdot g(x), \quad a(x) = A \circ \alpha(x).$$