CALCUL DIFFÉRENTIEL ET OPTIMISATION — EXERCICES

J. Féjoz
Université Paris-Dauphine
jacques.fejoz@dauphine.fr

2016

Table des matières

Chapitre 1

Dérivée d'un chemin

1.a Exercice (Deux chemins de Lissajous)**.** Tracer l'image des chemins $c = (x, y) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ suivants :

$$\begin{cases} x(t) = \cos^3 t \, \sin t \\ y(t) = \cos^2 t, \end{cases} \qquad \begin{cases} x(t) = 3\cos t + 2\cos(3t) \\ y(t) = 3\sin t - 2\sin(3t) \end{cases}$$

(ce sont deux exemples de *courbes de Lissajous*,[1] dont, par définition, les composantes sont des polynômes trigonométriques).

1.b Exercice (Cardioïde)**.** Justifier le tracé figure 1.1 de la courbe définie en coordonnées polaires par l'équation $r = 1 + \cos\theta$. On déterminera la tangente en $\theta = 0$ et π.

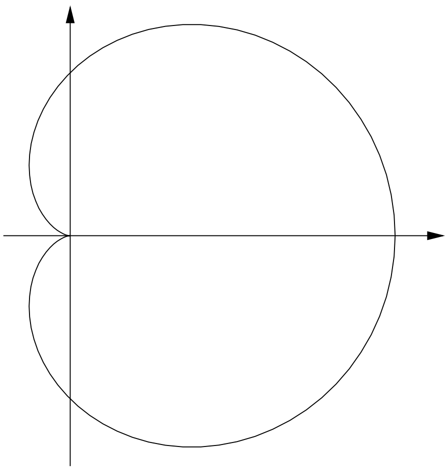


FIGURE 1.1 – Cardioïde

1.c Exercice (Facteur intégrant)**.**
Soient $c : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ un chemin dont la vitesse au point $(x, y) = c(t)$ est donnée par

1. Jules Antoine LISSAJOUS (1822-1884), physicien français, célèbre pour son étude des phénomènes oscillatoires, ainsi que pour avoir expérimenté, pendant le siège de Paris en 1870, un système de communication optique via une montgolfière

le champ de vecteurs

$$v : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \quad (x, y) \mapsto (x + \sin x)(y, -x).$$

1. Montrer qu'il existe une fonction non triviale (= non constante localement au voisinage de c) f de classe C^∞ sur $\mathbb{R}^2$ telle f soit constante le long de c.

2. En déduire que c est bornée.

1.d Exercice (Courbure)**.**
Soit $c : [t_0, t_1] \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ un chemin dans le plan, de classe C^2. La *longueur* de c est

$$L(c) = \int_{t_0}^{t_1} \|c'(t)\| \, dt.$$

1. Montrer que $L(c)$ est invariant par changement de paramétrage (on fera des hypothèses plausibles sur le "changement de paramétrage").

Supposons que $t \in]t_0, t_1[$ soit un point régulier ($c'(t) \neq 0$). Le *vecteur tangent unitaire* est

$$\tau(t) = \frac{c'(t)}{\|c'(t)\|},$$

et le *vecteur normal unitaire* est le vecteur $\nu(t)$ obtenu à partir du précédent par une rotation de $\pi/2$. La *(droite) normale* est la droite passant par $c(t)$ et dirigée par le vecteur normal unitaire.

2. Montrer que généralement les normales en t et en s se coupent en un point unique, et que ce point a une limite quand s tend vers t. On appelle *centre de courbure* et l'on note $C(t)$ cette limite.

3. Déterminer le nombre $R(t) \geqslant 0$, appelé le *rayon de courbure*, tel que

$$C(t) = c(t) \pm R(t)\nu(t);$$

la *courbure* est $1/R(t)$.

Le chemin C est la *développée* de c et, inversement, c est la *développante* de C.

4. Trouver la développée de $c(t) = (3t - t^3, 3t^2)$.

1.e Exercice (Ellipse)**.** Trouver un paramétrage rationnel de l'ellipse

$$c(t) = (a \cos t, b \sin t) \quad (t \in \mathbb{R})$$

(où a et b sont deux réels fixés), c'est-à-dire un chemin $\tilde{c}$ dont l'image coïncide avec celle de c, et dont les composantes soient des fractions rationnelles.

1.f Exercice (Longueur d'un chemin continu)**.**
Soient $c : T = [a, b] \to \mathbb{R}^n$ un chemin continu et $\tau = \{t_0 = a \leqslant t_1 \leqslant \cdots \leqslant t_{n-1} \leqslant t_n = b\}$ une subdivision de $[a, b]$. La *variation totale* de c relativement à τ est

$$V_\tau(c) = \sum_{i=1}^{n} \|c(t_i) - c(t_{i-1})\| \in [0, +\infty[,$$

où $\|\cdot\|$ est la norme euclidienne de $\mathbb{R}^n$. Autrement dit, $V_\tau(c)$ est la longueur du polygone de sommets successifs $c(t_0), ..., c(t_n)$. Quand on choisit des subdivisions contenant de plus en plus de points de $[a, b]$, ce polygone approche la courbe c de plus en plus près. La *longueur* de c (voir la figure **??**) est

$$L(c) = \sup_\tau V_\tau(c) \in [0, +\infty].$$

Le chemin c est *rectifiable* si il est de longueur finie.

1. Montrer que si c est lipschitzien, il est rectifiable.

2. Montrer que si c est de classe C^1,

$$L(c) = \int_a^b \|c'(t)\| \, dt;$$

on pourra appliquer le théorème des accroissements finis à la courbe $\varphi : t \mapsto c(t) - tc'(s)$, $s \in T$.

3. Montrer que

$$c : [0,1] \to \mathbb{R}, \quad t \mapsto \begin{cases} t^2 \cos^2(\pi/t^2) & \text{si } t \neq 0 \\ 0 & \text{si } t = 0 \end{cases}$$

n'est pas rectifiable.

4. Montrer que si $T = [0, \pi]$, $n \in \mathbb{N}^*$ et $c_n : [0, \pi] \to \mathbb{R}^2$, $t \mapsto (t, n^{-1} \sin nt)$, la longueur de c_n ne dépend pas de $n \in \mathbb{N}_*$. La longueur est-elle une fonctionnelle continue ?

1.g Exercice (Limite d'une dérivée).
1. La fonction $f : x \mapsto x^2 \sin(1/x^2)$, prolongée par continuité en 0, est-elle dérivable sur [0,1] ? Sa dérivée est-elle continue ?

2. Montrer que, si $f : [0, 1] \to \mathbb{R}^p$ est continue, dérivable sur $]0, 1]$, et telle que f' possède une limite $\ell \in \mathbb{R}^p$ en 0, f est dérivable en 0 et $f'(0) = \ell$.

Chapitre 2

Dérivée d'une application

2.a Exercice (Dérivée le long d'un chemin)**.** Soient $c : (\mathbb{R}, 0) \to (\mathbb{R}^2, 0)$ et $f : (\mathbb{R}^2, 0) \to \mathbb{R}$ de classe C^∞, tels que $c' = (\partial_2 f \circ c, -\partial_1 f \circ c)$. Montrer que la fonction $f \circ c$ est localement constante.

2.b Exercice (Équations de transport – méthode des caractéristiques (1))**.**
1. Trouver les fonctions $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $(x, t) \mapsto f(x, t)$, de classe C^1 vérifiant l'*équation de transport*

$$\partial_x f = \partial_t f;$$

on pourra utiliser le changement de variables $\varphi : (x, t) \mapsto (u, v) = (x + t, x - t)$.

2. Trouver les fonctions $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $(x, t) \mapsto f(x, t)$, de classe C^2 vérifiant l'*équation de propagation des ondes*

$$\partial_x^2 f = \partial_t^2 f;$$

on pourra utiliser le même changement de variables φ que dans la question précédente.

2.c Exercice (Une équation linéaire – méthode des caractéristiques (2))**.**
Soient $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ une fonction nulle en 0 et $f_0 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction paire, toutes deux de classe C^1.

1. Trouver l'expression de la fonction $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ de classe C^1 telle que

$$-y\, \partial_x f(x, y) + x\, \partial_y f(x, y) = g(x, y) \quad \text{et} \quad f(x, 0) = f_0(x) \quad (\forall x, y),$$

en supposant qu'elle existe ; on pourra chercher f en coordonnées polaires (r, θ) (avec $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$).

2. Cette solution existe-t-elle si $g(x, y) = 1$ (pour tous x, y) ?

3. Si $g(x, y) = xy$ (sans omettre de vérifier le caractère C^1 de f) ?

2.d Exercice (Application bilinéaire)**.**
Soit $B : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^p$ une application bilinéaire.

1. Montrer qu'il existe $C \geqslant 0$ tel que

$$\|B(x, y)\| \leqslant C\, \|x\|\, \|y\|;$$

la plus petite des constantes C pour cette inégalité est appelée la *norme* de B, i.e.

$$\|B\| = \sup_{\|x\|=1,\ \|y\|=1} \|B(x,y)\|.$$

2. En déduire la dérivée de B.

3. En déduire la dérivée de la composition des applications linéaires.

4. Soit $c : (\mathbb{R}, 0) \to (M_n(\mathbb{R}), I_n)$ un chemin dérivable de matrices isométriques, c'est-à-dire tracé sur

$$O_n(\mathbb{R}) = \{M \in M_n(\mathbb{R}),\ {}^tMM = I\}.$$

Montrer que le vecteur vitesse $c'(0)$ est une matrice antisymétrique. Dans le cas $n = 3$, définir le *vecteur rotation* associé à $c'(0)$ (ceci utilise le *produit vectoriel*).

2.e Exercice. Calculer la dérivée des applications suivantes (en un point quelconque) :

1. $M_n(\mathbb{R}) \to M_n(\mathbb{R})$, $M \mapsto M^2$

2. $M_n(\mathbb{R}) \to M_n(\mathbb{R})$, $M \mapsto {}^tMM$.

3. $GL_n(\mathbb{R}) \to M_n(\mathbb{R})$, $M \mapsto M^{-1}$ (on commencera par montrer que $GL_n(\mathbb{R})$ est ouvert dans $M_n(\mathbb{R})$)

4. $M_n(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$, $M \mapsto \det M$ (on pourra commencer par les matrices inversibles).

2.f Exercice (Gradient d'une fonction)**.**
Soit $f : (\mathbb{R}^n, a) \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable en a. Le *gradient* de f en a est le vecteur $\operatorname{grad} f(a) \in \mathbb{R}^n$ défini par

$$\langle \operatorname{grad} f(a) | \xi \rangle = f'(a) \cdot \xi \quad (\forall \xi \in \mathbb{R}^n),$$

où $\langle \cdot | \cdot \rangle$ est un produit scalaire (euclidien) de $\mathbb{R}^n$.

1. Justifier l'existence du gradient.

2. Montrer que $\operatorname{grad} f(a)$ pointe dans la "direction de plus grande pente" de f, c'est-à-dire dans la direction dans laquelle il faut se déplacer pour que la valeur de f augmente le plus vite possible.

3. Dans le cas où $n = 2$, calculer les composantes de $\operatorname{grad} f(a)$ pour le produit scalaire standard

$$\langle \xi | \eta \rangle = \xi_1 \eta_1 + \xi_2 \eta_2.$$

Soient

$$\rho : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \quad p = (r, \theta) \mapsto (x_1, x_2) = (r\cos\theta, r\sin\theta)$$

l'application "coordonnées polaires", p tel que $\rho(p) = a$, et

$$F = f \circ \rho : (\mathbb{R}^2, p) \to \mathbb{R}, \quad (r, \theta) \mapsto f(r\cos\theta, r\sin\theta);$$

F est la fonction f "lue dans les coordonnées polaires".

Soit $\langle\cdot|\cdot\rangle_p$ le produit scalaire induit en p par les coordonnées polaires, à savoir

$$\langle P|Q\rangle_p = \langle \rho'(p)\cdot P, \rho'(p)\cdot Q\rangle.$$ [1]

4. Calculer les composantes du gradient de F en p relativement au produit scalaire $\langle\cdot|\cdot\rangle_p$, dans la base canonique, puis dans une base orthonormée.

2.g Exercice ($\mathbb{C}$-dérivabilité)**.**
Soit $f : (\mathbb{C}, z) \to \mathbb{C}$. Montrer que les trois propriétés suivantes sont équivalentes :

1. f est $\mathbb{C}$-*dérivable* en z, c'est-à-dire que

$$f'(z) := \lim_{\zeta\to 0,\ \zeta\in\mathbb{C}_*} \frac{f(z+\zeta)-f(z)}{\zeta}$$

   existe dans $\mathbb{C}$

2. f est différentiable en z (vue comme une fonction $(\mathbb{R}^2, z) \to \mathbb{R}^2$) et satisfait l'*équation de Cauchy-Riemann* :

$$\frac{\partial f}{\partial y}(z) = i\frac{\partial f}{\partial x}(z).$$

3. f est *conforme*, c'est-à-dire conserve les angles : si $f'(z) \neq 0$ et si $\zeta_1, \zeta_2 \in \mathbb{C}$, l'angle entre ζ_1 et ζ_2 est le même qu'entre $f'(z)\cdot\zeta_1$ et $f'(z)\cdot\zeta_2$.

En Analyse complexe, on montre que, si f est $\mathbb{C}$-dérivable, elle est localement développable en série entière, donc de classe C^∞ [Rud74].

2.h Exercice (Dérivabilité directionnelle et dérivabilité)**.**
1. Soit $f : (\mathbb{R}^n, x) \to \mathbb{R}^p$. Se convaincre que les propriétés suivantes vont par force croissante :

1. f possède une dérivée dans toutes les directions en x, i.e. pour tout $\xi \in \mathbb{R}^n$ la limite

$$f'(x)\cdot\xi = \lim_{t\to 0}\frac{1}{t}(f(x+t\xi)-f(x))$$

   existe

2. f possède une dérivée dans toutes les directions en x et l'application $f'(x) : \xi \mapsto f'(x)\cdot\xi$ est linéaire [2]

3. f est dérivable en x [3]

1. La collection des produits scalaires ainsi obtenus en faisant varier le point p s'appelle une *métrique riemannienne.*

2. On dit alors que f est *Gateaux-dérivable* (sans accents circonflexe, attention les francophones !). René Eugène Gateaux (1889–1914) est un mathématicien français mort au combat à 25 ans le 3 octobre 1914. Ses travaux en analyse fonctionnelle, notamment sur l'intégration en dimension infinie, furent le point de départ de la construction la mesure de Wiener dans l'étude du mouvement brownien.

3. Parfois on précise alors *Fréchet-dérivable*, par opposition à *Gateaux-dérivable.* Maurice Fréchet est un mathématicien français (1878–1973). Remarquablement prolifique, il est célèbre notamment pour ses découvertes en topologie, en probabilités et en analyse fonctionnelle.

et que la dernière implique la continuité de f en x.

2. (Discontinuité) Trouver une fonction f discontinue en x mais possédant une dérivée directionnelle dans toutes les directions.

3. Montrer que si, pour une fonction $f : (\mathbb{R}^n, x) \to \mathbb{R}^p$ et un vecteur $v \in \mathbb{R}^n$, $f'(x) \cdot v$ existe, pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$ on a

$$f'(x) \cdot (\lambda v) = \lambda f'(x) \cdot v.$$

4. (Non-linéarité) Trouver une fonction telle que $f'(x)$ soit définie sur tout $\mathbb{R}^n$ mais ne soit pas linéaire.

5. Montrer que, si f est différentiable en x, pour tout chemin $c : (\mathbb{R}, 0) \to (\mathbb{R}^n, x)$ dérivable,

$$(f \circ c)'(0) = f'(x) \cdot c'(0)$$

(ceci est une première instance de la formule de dérivation des fonctions composées).

6. (Non-uniformité) En déduire une fonction telle que $f'(x) \in L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^p)$, mais telle que l'on n'ait pas

$$f(x + \xi) = f(x) + f'(x) \cdot \xi + o(\xi)$$

quand ξ tend vers 0.

Indication : À défaut d'imaginer soi-même les trois exemples demandés, on pourra donner des formules pour les fonctions dont les graphes sont tracés sur la figure 2.1.

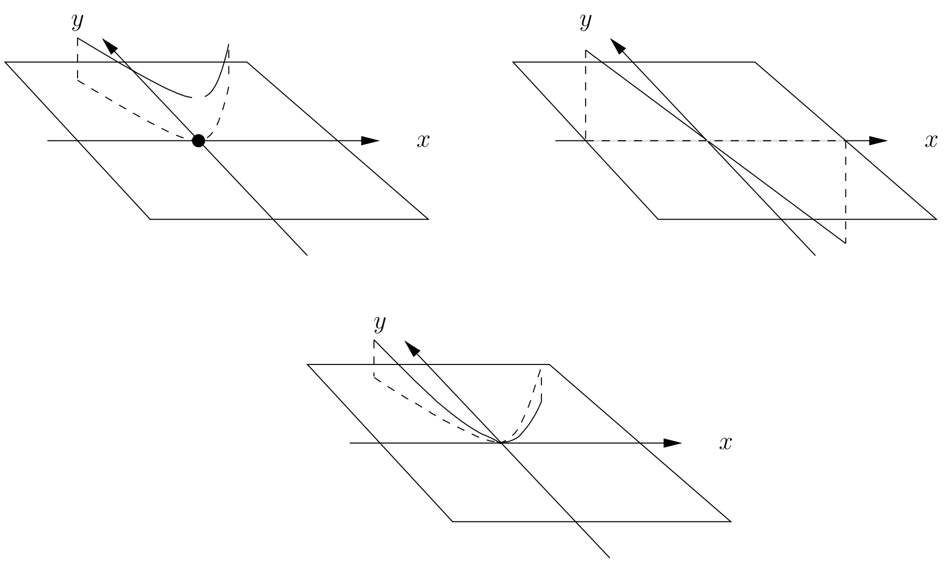


FIGURE 2.1 – Diverses raisons de ne pas être dérivable

2.i Exercice (Identité d'Euler).
Soient $f : \mathbb{R}^n \backslash \{0\} \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable et $k \geqslant 1$. Monter que les deux propriétés suivantes sont équivalentes :

1. f est *homogène* de degré k : $f(tx) = t^k f(x)$ $(\forall x \in \mathbb{R}^n \backslash \{0\}, \forall t > 0)$

2. Identité d'Euler : $f'(x) \cdot x = kf(x)$ $(\forall x \in \mathbb{R}^n \backslash \{0\})$.

2.j Exercice (F. Laudenbach)**.**
1. Soient (D_1, D_2, D_3) et (D'_1, D'_2, D'_3) deux familles de droites vectorielles de $\mathbb{R}^2$. Montrer qu'il existe une application linéaire (donc dérivable) de $\mathbb{R}^2$ dans lui-même envoyant chaque D_i sur D'_i.

2. Soient maintenant $(D_1, ..., D_4)$ et $(D'_1, ..., D'_4)$ deux familles de quatre droites vectorielles de $\mathbb{R}^2$. Montrer qu'il existe une application dérivable $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ inversible telle que $f(D_i) = D'_i$ si et seulement si le birapport des deux famillles est le même ; le *birapport* de quatre nombres complexes $z_1, ..., z_4$ deux à deux distincts est

$$(z_1, ..., z_4) = \frac{z_3 - z_1}{z_3 - z_2} \times \frac{z_4 - z_2}{z_4 - z_1},$$

et le birapport de quatre droites vectorielles de $\mathbb{R}^2$ est le birapport de leurs pentes.

Chapitre 3

Classe C^1

3.a Exercice (Inégalité des accroissements finis)**.**
Soient $F : [\alpha, \beta] \to \mathbb{R}^p$ et $\varphi : [\alpha, \beta] \to \mathbb{R}$ deux applications continues, dérivables sur $]\alpha, \beta[$, telles que

$$\|F'(t)\| \leqslant \varphi'(t)$$

sur $]\alpha, \beta[$. Montrer que

$$\|F(\beta) - F(\alpha)\| \leqslant \varphi(\beta) - \varphi(\alpha).$$

3.b Exercice. Montrer qu'une fonction $f : B(a, r) = \{x \in \mathbb{R}^n,\ \|x - a\| < r\} \to \mathbb{R}^p$ est constante si et seulement si $f' \equiv 0$.

3.c Exercice (Fonction implicite)**.**
Soit

$$f : (\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^p, (0,0)) \to (\mathbb{R}, 0), \quad (x, y) \mapsto f(x, y)$$

une fonction de classe C^1 telle que

$$\det \frac{\partial f}{\partial y}(0,0) \neq 0.$$

On veut montrer qu'il existe une unique fonction

$$\varphi : (\mathbb{R}^n, 0) \to (\mathbb{R}^p, 0)$$

de classe C^1 telle que, localement au voisinage de $(0,0)$ dans $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p$,

$$f(x, y) = 0 \Leftrightarrow y = \varphi(x). \tag{3.1}$$

1. Le montrer dans le cas où $p = 1$.

Rappel. Soit $M \in M_p(\mathbb{R})$. La méthode du pivot de Gauss montre qu'il existe une suite d'opérations sur les lignes (permutations $\ell'_i = \ell_{\sigma i}\ \forall i$, dilatations $\ell'_i = \lambda \ell_i$ et transvections $\ell'_i = \ell_i + \lambda \ell_j$) qui mette M sous forme triangulaire supérieure S. Ces opérations peuvent être vues comme autant de multiplications à gauche de M par des matrices (resp. de permutation, de dilatation ou de transvection) :

$$A_1 \cdots A_k\, M = U,$$

soit

$$M = (A_k^{-1} ... A_1^{-1})\, U.$$

2. Conclure par récurrence sur p.

3.d Exercice (Formule de Liouville)**.**
1. Soient $A : \mathbb{R} \to M_n(\mathbb{R})$ une fonction continue, et $x_1, ..., x_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ des solutions de l'équation différentielle linéaire

$$x'(t) = A(t)\, x(t).$$

Montrer que le *(déterminant) wronskien* (aussi appelé *(déterminant) jacobien*)

$$w(t) = \det(x_1(t), ..., x_n(t))$$

vérifie l'équation différentielle linéaire

$$w'(t) = \operatorname{tr} A(t)\, w(t);$$

on rappelle que la dérivée de l'application déterminant (exercice 2.e) est

$$(\det)'(A) \cdot H = \operatorname{tr}\left({}^t\bar{A}H\right).$$

2. Soient maintenant $v : (\mathbb{R}^n, a) \to \mathbb{R}^n$ un champ de vecteurs de classe C^1 et (φ_t) son flot, c'est-à-dire que, pour tout x proche de a, $t \mapsto \varphi_t(x)$ est l'unique solution maximale du problème de Cauchy

$$\frac{d}{dt}(\varphi_t(x)) = v(\varphi_t(x)), \quad \varphi_0(x) = x.$$

Montrer que

$$\frac{d}{dt} \det(\varphi_t')(x)\bigg|_{t=0} = \operatorname{div} v(x),$$

avec

$$\operatorname{div} v(x) = \operatorname{tr} v'(x) = \sum_{1 \leqslant i \leqslant n} \frac{\partial v_i}{\partial x_i}(x)$$

(*divergence* de v en x).

3. À quelle condition sur son champ de vecteurs vitesse un fluide est-il incompressible ?

Chapitre 4

Le théorème du point fixe

4.a Exercice (Théorème du point fixe, Peano [1] [Pea88], Picard [2] [Pic90])**.**
Soient (X, d) un espace métrique complet et $f : X \to X$ une contraction stricte.

1. Montrer que f possède un unique point fixe $a \in X$ et que, pour tout $x \in X$, la suite des images itérées de x par f converge géométriquement vers a.

2. Montrer que la convergence est localement uniforme et, si X est borné, uniforme.

Supposons maintenant que $f = f_\lambda$ dépende d'un paramètre $\lambda \in \Lambda$, où Λ est un ouvert de $\mathbb{R}^n$, et que la famille (f_λ) soit uniformément strictement contractante (il existe α tel que $\operatorname{lip} f_\lambda \leqslant \alpha < 1$ quel que soit λ). D'après ce qui précède il existe une application $a : \Lambda \to X$, $\lambda \mapsto a_\lambda =$ l'unique point fixe de f_λ.

3. Montrer que, si $\lambda \mapsto f_\lambda(x)$ est continue pour tout $x \in X$, ϕ est continue.

4. Montrer que, si $\lambda \mapsto f_\lambda(x)$ est localement lipschitzienne pour tout x, $\lambda \mapsto a_\lambda$ est localement lipschitzienne.

5. Montrer que, si $X = \mathbb{R}^p$, si Λ est un ouvert d'espace de Banach et si f est de classe C^r, $\lambda \mapsto a_\lambda$ est de classe C^r.

4.b Exercice (Points fixes attractifs ou répulsifs)**.**
Soit $f : (\mathbb{R}, a) \to (\mathbb{R}, a)$ une application de classe C^2 ayant a comme point fixe. Comme en Théorie des Systèmes dynamiques, on notera ici f^n la composée de f n fois avec elle-même : $f^0(x) = x$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f^{n+1}(x) = f(f^n(x))$.

1. Supposons que a est *attractif* : $|f'(a)| < 1$. Montrer que, si x est assez proche de a, la suite $(f^n(x))$ est définie sur $\mathbb{N}$ et, si $f'(a) \neq 0$, converge vers a géométriquement :

$$f^{n+1}(x) - a \sim f'(a)(f^n(x) - a) \quad \text{quand } n \to +\infty.$$

2. Supposons que a est même *surattractif* : $|f'(a)| = 0$. La question précédente montre que, si x est assez proche de a, la suite $(f^n(x))$ est définie sur $\mathbb{N}$ et converge

1. Giuseppe Peano, mathématicien et linguiste italien (1858–1932, qui axiomatisa l'arithmétique)

2. Charles Émile Picard, mathématicien français (1856–1941), célèbre pour ses travaux sur les singularités de fonctions holomorphes et sur les équations intégro-différentielles.

vers a. Montrer que, si $f''(a) \neq 0$, la convergence est quadratique :

$$f^{n+1}(x) - a \sim \frac{f''(a)}{2}(f^n(x) - a)^2 \quad \text{quand } n \to +\infty.$$

3. Supposons au contraire que a est *répulsif* : $|f'(a)| > 1$. Montrer qu'il existe un voisinage V de a tel que quel que soit $x \in V\backslash\{a\}$, il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $f^n(x) \notin V$.

4. Comment calculer les décimales du *nombre d'or* $a = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ à ϵ près ? *Indication :* Le nombre a est un point fixe attractif de l'application $f : [0, +\infty[,\ x \mapsto \sqrt{x+1}$.

4.c Exercice (J.-C. Yoccoz)**.**
Soit (x_n) une suite réelle définie par $x_0 \in \mathbb{R}$ et

$$x_{n+1} = x_n^2 - 100 + \sin n \quad (\forall n \in \mathbb{N}).$$

On veut montrer qu'il existe un unique $x_0 \in \mathbb{R}$ tel que (x_n) soit bornée à valeurs $\geqslant 0$.

1. Montrer que, si (x_n) est bornée, pour tout n on a $10 \leqslant x_n \leqslant 11$.

Soient X l'ensemble des suites réelles (y_n) de $[10, 11]$, d la distance

$$d((y_n), (z_n)) = \sup_n |y_n - z_n|$$

et F l'opérateur

$$F : X \circlearrowleft, \quad (y_n) \mapsto (z_n), \quad z_n = \sqrt{100 - \sin n + y_{n+1}}.$$

2. Vérifier que F est bien défini. Quelle est son rapport de Lipschitz ?

3. Conclure. On donnera une estimation de l'unique point fixe (a_n) de F.

4.d Exercice (Théorème de Cauchy-Lipschitz)**.**
1. Montrer que le problème de Cauchy

$$\begin{cases} \gamma'(t) = \gamma^{1/3}(t) \\ \gamma(0) = 0 \end{cases}$$

possède plusieurs solutions sur $\mathbb{R}$ (une infinité, même).

Soient $E = \mathbb{R}^d$, U un ouvert de E et v un champ de vecteurs[3] sur U localement lipschitzien.

Considérons, pour $\chi > 0$ et $k > 0$, la norme $\|\cdot\|_\chi$ de $C^0([-T, T], E)$ définie par

$$\|x\|_\chi = \max_{t \in [-T,T]} e^{-\chi k|t|} \|x(t)\|$$

(cette norme écrase la croissance exponentielle des trajectoires en fonction du temps) ; le paramètre k sera choisi plus tard. En particulier, $\|\cdot\|_0$ est la norme C^0.

2. Montrer que toutes les χ-normes sont équivalentes.

3. Montrer que $\|\cdot\|_\chi$ fait de $C^0([-T, T], E)$ un espace de Banach.

3. Une *champ de vecteurs* sur U est une application $U \to E$.

Supposons d'abord que $U = E$ et que v est lipschitzien sur E tout entier, et notons $k = \operatorname{lip} v$. Soit $T > 0$ et soit $\phi : C^0([-T, T], E) \to C^0([-T, T], E)$ l'application qui, à un chemin continu $x \in C^0([-T, T], E)$, associe le chemin $\phi x \in C^0([-T, T], E)$ défini par

$$(\phi x)(t) = a + \int_0^t v(x(s))\, ds.$$

Les courbes intégrales de v passant par a à $t = 0$ sont les points fixes de ϕ.

4. Montrer que, pour tout point $a \in U$ il existe un réel $T > 0$ tel qu'il existe une unique courbe $\gamma_a : [-T, T] \to U$ dérivable, solution du problème de Cauchy

$$\begin{cases} \gamma'(t) = v(\gamma(t)) \\ \gamma(0) = a. \end{cases} \tag{4.1}$$

5. En déduire le cas général, où U est un ouvert quelconque et v est seulement localement lipschitzien.

6. Si x est la solution cherchée et si x_0 est la valeur approchée initiale, montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a

$$\|x - \phi^n x_0\|_0 \leqslant \left(\frac{ekT}{n}\right)^n \frac{n}{n - kT} \|x_0 - \phi x_0\|_0 .$$

7. Calculer $\phi^n 0$ dans le cas où $d = 1$, $v(x) = x$ et $a = 1$.

8. Si v est (globalement) lipschitzien sur E, montrer que la solution maximale du problème de Cauchy est définie sur $\mathbb{R}$.

9. Si le champ de vecteurs v dépend du temps, quelle régularité de v suffit-elle ?

10. Que peut-on dire dans le cas où E est un espace de Banach ?

Chapitre 5

Inversion locale

5.a Exercice (Inversion globale)**.**
Soit $f : \mathbb{R}^n \circlearrowleft$ une application continue.

1. Montrer que, si f est injective et propre (au sens que, si (x_n) tend vers l'infini, il en est de même de $(f(x_n))$), f est surjective ; on pourra commencer par montrer que $f(\mathbb{R}^n)$ est fermée.

Supposons dorénavant que,

$$\operatorname{lip} f = \sup_{x \neq x'} \frac{\|f(x) - f(x')\|}{\|x - x'\|} < +\infty \quad \text{et} \quad \operatorname{lip\,inf} f := \inf_{x \neq x'} \frac{\|f(x) - f(x')\|}{\|x - x'\|} > 0.$$

2. Montrer que f est surjective. En déduire que f est un lipéomorphisme.

3. En déduire une autre démonstration du théorème **??**.

5.b Exercice (Algorithme de Newton)**.**
Soit $f : (\mathbb{R}^n, 0) \to (\mathbb{R}^n, 0)$ de classe C^2 telle que $f'(0)$ soit inversible. Sous ces hypothèses, on va retrouver le théorème d'inversion locale. Soit, pour $y \in \mathbb{R}^n$,

$$\phi : (\mathbb{R}^n, 0) \to \mathbb{R}^n, \quad x \mapsto x + f'(x)^{-1}(y - f(x)).$$

On définit $x_0 = 0$, et, aussi longtemps que la récurrence a un sens, $x_{n+1} = \phi(x_n) = \phi^n(0)$.

1. Montrer que, si y est assez proche de 0, x_n existe pour tout n et converge vers un $x \in \mathbb{R}^n$ tel que $f(x) = y$, quadratiquement (c'est-à-dire que $\ln|\ln\|x_n - x\||$ est linéaire en n).

2. Comment calculer $\sqrt{2}$ à ϵ près ?

5.c Exercice (Surface stable d'une application)**.**
Soient $X = \mathbb{R}^n$ et $Y = \mathbb{R}^p$, et

$$f : X \times Y \circlearrowleft, \quad (x, y) \mapsto (a(x) + r(x, y), h(x, y))$$

avec

$$a : (X, 0) \circlearrowleft, \quad r : (X \times Y, 0) \to (X, 0), \quad h : (X \times Y, 0) \to (Y, 0).$$

On suppose que a est un lipéomorphisme et que

$$\operatorname{lip} r, \operatorname{lip} h \ll 1.$$

On veut montrer qu'il existe une unique application contractante $\alpha : (X, 0) \to (Y, 0)$ dont le graphe soit invariant par f :

$$f(\operatorname{graphe} \alpha) = \operatorname{graphe} \alpha$$

(théorème de Perron). Le graphe de α s'appelle une *surface* ou *variété stable* (lipschitzienne) de f.

1. Montrer que, pour toute application contractante $\alpha : (X, 0) \to (Y, 0)$, il existe une unique application $\beta = G(\alpha) : (X, 0) \to (Y, 0)$ telle que

$$\operatorname{graphe} \beta = f(\operatorname{graphe} \alpha);$$

$\beta = G(\alpha)$ est la *transformée de graphe* de α.

Soit $\mathcal{A}$ l'espace de toutes les contractions $\alpha : (X, 0) \to (Y, 0)$ définies sur un voisinage fixe de 0 dans X.

2. Montrer que $\mathcal{A}$ est stable par G.

3. ★ Montrer qu'il existe $0 \leqslant k < 1$ tel que, pour tous $\alpha \neq \beta \in G$,

$$\operatorname{lip}(G(\alpha) - G(\beta)) \leqslant k \operatorname{lip}(\alpha - \beta);$$

on admettra que cela implique l'existence et l'unicité d'un point fixe de G.

4. L'énoncé ci-dessous persiste-t-il si X et Y sont des espaces de Banach ?

Chapitre 6

Forme normale d'une application linéaire

6.a Exercice (Critère de contrôlabilité de Kalman)**.**
Soient $A \in M_{d,d}(\mathbb{R})$ et $B \in M_{d,r}(\mathbb{R})$. On considère le problème de Cauchy

$$\begin{cases} f(0) = x \\ f'(t) = Af(t) + Bg(t), \end{cases}$$

sur l'intervalle de temps $[0, T]$, où $g : [0, T] \to \mathbb{R}^r$ est une fonction bornée continue. Soit $\mathcal{A}_{\S}$ l'ensemble des points de la forme $f(T)$ obtenus en faisant varier g. La fonction g s'appelle un *contrôle* et les points $y \in A_x$ sont qualifiés d'*atteignables.* Montrer que $\mathcal{A}_x$ est $\mathbb{R}^d$ entier si et seulement si

$$\text{rang}[B, AB, \cdots, A^{d-1}B] = d$$

(la notation $[B, AB, \cdots, A^{d-1}B]$ désigne la matrice en ligne par blocs, dont les blocs successifs sont les $A^k B$, $k = 0, ..., d-1$).

6.b Exercice (Forme normale de Jordan [1])**.**
Soient E un espace vectoriel complexe de dimension finie et φ un endomorphisme de E de polynôme minimal

$$\mu(X) = \prod_{k=1}^{r} (X - \lambda_k)^{\alpha_k},$$

où les $\lambda_k \in \mathbb{C}$ sont deux à deux distincts.

Écrivons la décomposition en éléments simples de $1/\mu$ de la façon suivante :

$$\frac{1}{\mu(X)} = \sum_{1 \leqslant k \leqslant r} \frac{Q_k(X)}{(X - \lambda_k)^{\alpha_k}}.$$

1. Montrer que les endomorphismes

$$P_i = Q_i(\varphi) \prod_{j \neq i} (\varphi - \lambda_j I)^{\alpha_j}$$

1. Camille Jordan, mathématicien français, spécialiste de théorie des groupes

sont des projecteurs algébriquement orthogonaux ($P_i P_j = 0$ si $i \neq j$), tels que $\sum_i P_i = \mathrm{id}$.

2. Montrer le *lemme des noyaux* :

$$E = \oplus_{k=1}^{r} \ker(\varphi - \lambda_r \,\mathrm{id})^{\alpha_k}.$$

3. En déduire que φ se décompose comme la somme d'un endomorphyisme diagonalisable

$$D = \sum_i \alpha_i P_i$$

et d'un endomorphisme nilpotent $N = \varphi - D$ (*décomposition de Dunford*).

4. En déduire qu'il existe une base de E dans laquelle la matrice d'un opérateur donné $\varphi \in L(E)$ est une matrice diagonale par blocs, dont chaque bloc est un bloc de Jordan

$$J_r(\lambda) = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda & 1 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & \lambda \end{pmatrix}.$$

6.c Exercice (Diagonalisabilité sur $\mathbb{R}$)**.**
Montrer que, si A est une matrice réelle diagonalisable dans $\mathbb{C}$ dont les valeurs propres sont réelles, elle est diagonalisable dans $\mathbb{R}$.

Chapitre 7

Forme normale d'une application

7.a Exercice.
Montrer que si une application est équivalente à une application localement surjective (respectivement injective), la première elle-même est localement surjective (resp. injective).

Chapitre 8

Fonctions implicites

8.a Exercice (Théorème des fonctions implicites)**.**
Sous les hypothèses du théorème des fonctions implicites, montrer qu'il existe une unique fonction $Y : (\mathbb{R}^n, a) \to (\mathbb{R}^p, b)$ telle que, localement,

$$f(x, y) = 0 \Leftrightarrow y = Y(x).$$

8.b Exercice (Relation entre dérivées partielles)**.**
Soit $f : (\mathbb{R}^3, (a, b, c)) \to (\mathbb{R}, 0)$ une fonction de classe C^1 telle que

$$\partial_x f(a, b, c) \neq 0,\ \partial_y f(a, b, c) \neq 0,\ \partial_z f(a, b, c) \neq 0.$$

On note X, Y, Z les fonctions, définies implicitement et localement, telles que

$$f(x, y, z) = 0 \Leftrightarrow x = X(y, z) \Leftrightarrow y = Y(x, z) \Leftrightarrow z = Z(x, y).$$

Que vaut le produit $\partial_y X\, \partial_z Y\, \partial_x Z$ au point (a, b, c) ?

8.c Exercice (Résolution approchée d'une équation)**.**
1. Donner une valeur approchée de la solution, proche de 1, de l'équation

$$x^7 + 0,99\, x - 2,03 = 0,$$

en calculant le développement limité au premier ordre de la fonction $x(p, q)$ définie implicitement par l'équation $x^7 + px + q = 0$ au voisinage de $(x, p, q) = (1, 1, -2)$.

2. Donner une méthode pour majorer l'erreur ainsi commise ; on pourra déjà montrer que la solution exacte vérifie $1 \leqslant x \leqslant 2$.

8.d Exercice (L'équation de degré trois)**.** Soit $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $(x, p, q) \mapsto x^3 + px + q$. Dessiner, pour p fixé respectivement < 0, $= 0$ et > 0, les courbes d'équation $f(x, p, q) = 0$ dans le plan des (x, q). Puis tracer dans le plan des (p, q) le lieu des points où l'équation $f = 0$ ne détermine pas de fonction implicite $x(p, q)$.

Chapitre 9

Submersions et immersions

9.a Exercice (Théorème de submersion)**.**
1. Démontrer le théorème de submersion. *Indication :* S'inspirer du cas où f est une application linéaire pour trouver un isomorphisme quelque part... (Si $\mathbb{R}^n \equiv \ker f'(a) \oplus V$, appliquer le théorème d'inversion locale au « déploiement » $F : (V \times \ker f'(a), a) \to \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^{n-p}$, $(x, y) \mapsto (f(x, y), y)$.)

2. En déduire que f possède un inverse à droite (appelé *section* de f), c'est-à-dire une fonction $g : (\mathbb{R}^p, b) \to (\mathbb{R}^n, a)$ telle que

$$f \circ g = \mathrm{id}_{(\mathbb{R}^p,b)} .$$

9.b Exercice. 1. Démontrer le théorème d'immersion. *Indication :* Si E est une supplémentaire de $\operatorname{im} f'(a) : \mathbb{R}^p \equiv \operatorname{im} f'(a) \oplus E$, considérer l'application $F : (\mathbb{R}^n \times E, a) \to \mathbb{R}^p$, $(x, y) \mapsto f(x) + y$.

2. En déduire que f possède un inverse local à gauche, c'est-à-dire une fonction $g : (\mathbb{R}^p, b) \to (\mathbb{R}^n, a)$ telle que

$$g \circ f = \mathrm{id}_{(\mathbb{R}^n,a)} .$$

9.c Exercice (Rang d'une application)**.**
1. Donner un exemple de discontinuité du rang d'une application.

2. Montrer que le rang d'une application en un point est semi-continu inférieurement, c'est-à-dire que, si (x_n) tend vers a, la limite du rang de f en les x_n est supérieure au rang de f en a.

9.d Exercice. Déduire le théorème du rang constant du théorème d'inversion locale.

9.e Exercice. Soit $f : (\mathbb{R}^n, a) \to \mathbb{R}^n$ une application localement injective.

1. L'application f est-elle automatiquement un difféomorphisme local ?

2. Montrer qu'il existe des points b arbitrairement proches de a tels que f soit un difféomorphisme local au voisinage de b.

Chapitre 10

Incursion en analyse complexe ⋆

10.a Exercice (Méthode des séries majorantes [Car61]).
Montrer le théorème d'inversion locale directement en classe analytique. On pourra utiliser la méthode suivante, dite des séries majorantes. Commencer par montrer le théorème dans la classe des séries formelles [1]. Puis utiliser une *série majorante* pour montrer la convergence de la série formelle réciproque trouvée ; la série majorante d'une série $\sum a_n z^n$ est une série $\sum_n \alpha_n z^n$ à coefficients réels positifs telle que $|a_n| \leqslant \alpha_n$ pour tout n.

10.b Exercice (Théorème fondamental de l'algèbre).
Montrer que tout polyñome complexe de degré n possède exactement n racines complexes.

10.c Exercice (Localisation des zéros d'un polynôme).
Soient $a \in \mathbb{C}$, $|a| \geqslant 1$ et $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 2$. Montrer que les racines du polynôme $1 + z + az^n$ ont un module $\leqslant 2$.

10.d Exercice (Polygone de Newton).
Soit $\Sigma \subset \mathbb{R}^2$ l'ensemble des zéros du polynôme réel

$$P(x, y) = y^3 + x^2y^2 - xy + x^4.$$

On s'intéresse à la structure de Σ au voisinage de l'origine. Trouver les réels $\alpha > 0$ tels qu'il existe une unique fonction analytique $Y : (\mathbb{R}, 0) \to \mathbb{R}$ telle que localement

$$P(x, x^\alpha Y(x)) \equiv 0.$$

On commencera pourra procéder en trois temps : (1) déterminer les valeurs de α pour lesquelles l'équation $P(x, x^\alpha Y(x)) = 0$ possède une unique solution formelle, (2) déterminer lesquelles de ces solutions formelles correspondent à des solutions analytiques, et (3) montrer que les autres valeurs de α ne donnent pas d'autres solutions.

1. Une *série formelle* est une série entière, ici à plusieurs variables, dont le domaine de convergence est éventuellement nul.

Chapitre 11

Surfaces I – Espace tangent

11.a Exercice (Graphe d'une application)**.**
Soit $f : (\mathbb{R}^n, a) \to (\mathbb{R}^p, b)$ une application de classe C^1. Montrer que son graphe

$$G(f) = \{(x, y),\ y = f(x)\}$$

est une surface de $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p$ de dimension n.

11.b Exercice (Groupes classiques)**.**
Montrer que les groupes suivants sont des surfaces de $M_n(\mathbb{R}) \equiv \mathbb{R}^{n^2}$, dont on calculera la dimension :

— le groupe linéaire $GL_n(\mathbb{R})$

— le groupe linéaire spécial

$$SL_n(\mathbb{R}) = \{M \in M_n(\mathbb{R}),\ \det M = 1\}$$

— le groupe orthogonal

$$O_n(\mathbb{R}) = \{M \in M_n(\mathbb{R}),\ {}^tMM = I\}.$$

11.c Exercice (Un lemme de division ★)**.** Soient $f : (\mathbb{R}^n, 0) \to \mathbb{R}$ une fonction de classe C^∞ et $g : (\mathbb{R}^n, 0) \to \mathbb{R}^p$ une submersion de classe C^∞. Montrer que

$$g(x) = 0 \Rightarrow f(x) = 0 \quad (\forall x)$$

si et seulement si il existe une fonction $a : (\mathbb{R}^n, 0) \to (\mathbb{R}^p, 0)$ telle que $f(x) = a(x) \cdot g(x)$ (le produit scalaire euclidien de $a(x)$ et $g(x)$).

11.d Exercice. Calculer le plan tangent à $\mathbb{S}^n$ en un point x.

11.e Exercice. Calculer la droite tangente à l'ellipse d'équation

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

11.f Exercice (Transversalité)**.**
Soient $f : (\mathbb{R}^n, x) \to (\mathbb{R}^p, y)$ C^1 et S une surface de $\mathbb{R}^p$ contenant y, de dimension d. On suppose que f est *transverse* à S en x, au sens que

$$\operatorname{im} f'(x) + T_yS = \mathbb{R}^p.$$

Montrer que $f^{-1}(S)$ est localement une surface de $\mathbb{R}^n$ de dimension $n - p + d$.

11.g Exercice (Contour apparent d'une surface)**.**
Soient Q une forme quadratique définie positive sur $\mathbb{R}^3$ et S l'*ellipsoïde* d'équation $Q = 1$. Soit a un point à l'extérieur de S, c'est-à-dire tel que $Q(a) > 1$ (pourquoi est-ce bien l'extérieur de S ?). Le *contour apparent* de S vu de a est l'ensemble C des points x de S où l'espace affine tangent $x + T_xS$ contient a. Montrer que C est une ellipse (intersection de S et d'un plan affine de $\mathbb{R}^3$).

Chapitre 12

Extrema de fonctions (semi-)continues

12.a Exercice. Soient X l'ensemble des fonctions f croissantes de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ telles que $f(-1) = -1$ et $f(1) = 1$, et $J : X \to \mathbb{R}$ telle que

$$J(f) = \int_{-1}^{+1} x^2 f'(x)\, dx.$$

Montrer que $\inf_X J = 0$ et que J n'atteint pas sa borne inférieure.

12.b Exercice (Géodésiques dans un espace métrique)**.**
1. Montrer que, si un espace métrique X est compact, une fonction semi-continue inférieurement sur X atteint son minimum.

2. Montrer que la longueur d'un chemin continu (cf. exercice 1.f) dépend du chemin de façon semi-continue inférieure ; on pourra utiliser que la borne supérieure de fonctions continues est semi-continue inférieurement.

3. Montrer que, pour toute courbe $\gamma \in C(T, X)$, $T = [a, b]$, $a < b$, telle que $L(\gamma) < l \in \mathbb{R}^+$ il existe un homéomorphisme croissant $\phi : [0, 1] \to [a, b]$ tel que la courbe $\gamma \circ \phi$ soit l-lipschitzienne.

4. En déduire que, pour toute famille $(\gamma_j)_{j\in J}$ de courbes paramétrées de X de longueur $< l$, il existe une famille $(\hat{\gamma}_j)_{j\in J}$ de courbes paramétrées appartenant à $C([0, 1], X)$, telle que pour tout $j \in J$ les courbes γ_j et $\hat{\gamma}_j$ soient équivalentes par homéomorphisme lipschitzien et que $\hat{\gamma}_j$ soit lipschitizienne de rapport l.

5. ★ Supposons compact l'espace métrique X. Soient A et B deux parties fermées disjointes de X. Montrer que, s'il existe dans X des courbes rectifiables d'extrémités dans A et B respectivement, et si k désigne la borne inférieure de leurs longueurs, il existe aussi un arc simple γ de longueur k et d'extrémités dans A et B respectivement (γ est une *géodésique*).

Chapitre 13

Factorisation des applications linéaires

13.a Exercice. Montrer que le quotient E/V d'un espace vectoriel E par un sous-espace V hérite d'une structure d'espace vectoriel définie par les relations

$$\begin{cases} \bar{x} + \bar{x}' = \overline{x + x'} \\ \lambda \cdot \bar{x} = \overline{\lambda \cdot x}, \end{cases}$$

et que, si E est de dimension finie,

$$\dim E/V = \operatorname{codim} V.$$

13.b Exercice (Réalisation du quotient)**.** Montrer que, si $E = V \oplus W$, la restriction à W de la projection canonique $p : E \to E/V$ est un isomorphisme.

13.c Exercice (Propriété universelle du quotient)**.** Montrer que, pour toute application linéaire $f : E \to F$ s'annulant sur V, il existe une unique application linéaire $\varphi : E/V \to F$ telle que

$$f = \varphi \circ p,$$

où p est la surjection canonique de E sur E/V. Comme E/V ne dépend pas de f, la propriété précédente est qualifiée de *propriété universelle du quotient.* Montrer de plus que p est unique à isomorphisme près parmi les applications linéaires sur E s'annulant sur V et vérifiant la propriété universelle.

13.d Exercice.
Démontrer la proposition **??** sans utiliser de quotients d'espaces vectoriels. Indication : choisir des supplémentaires de $\ker \alpha$ et de $\ker \beta$.

Chapitre 14

Points critiques de fonctions

14.a Exercice (Parallélépipèdes rectangles de volume maximal)**.**
Quel est le parallélépipède rectangle (engendré par trois vecteurs orthogonaux, donc) d'aire $A > 0$ donnée et de volume maximal ? On commencera par justifier l'existence de ce maximum, puis on donnera deux calculs : un direct en utilisant des coordonnées de l'espace des parallélépièdes rectangles d'aire donnée, et un utilisant un multiplicateur de Lagrange.

14.b Exercice (Maximisation d'un volume)**.**
Maximiser la fonction xyz sur la courbe obtenue par intersection de la sphère $\mathbb{S}^2 : x^2 + y^2 + z^2 = 1$ et du plan $x + y + z = 1$.

14.c Exercice (Formule de Héron)**.** Application : Montrer que l'aire d'un triangle dont le périmètre est fixé est maximale lorsque le triangle est équilatérale ; on pourra commencer par démontrer que l'aire A d'un triangle de côtés a, b et c vérifie

$$A^2 = p(p-a)(p-b)(p-c), \quad p = \frac{a+b+c}{2}.$$

14.d Exercice (Axes principaux d'un ellipsoïde)**.** Soit q une forme quadratique positive définie sur $\mathbb{R}^n$. Quels sont les extrema de $\|x\|$ sur l'hypersurface d'équation $q = 1$ en fonction des sous-espaces propres de q ?

14.e Exercice (Diagonalisation d'un opérateur symétrique)**.**
Soit q une forme quadratique sur $\mathbb{R}^n$ associées à $B \in L_s^2(\mathbb{R}^n, \mathbb{K})$. Montrer qu'un maximum x de la restriction de q à la sphère $\S^{n-1}$ est une valeur propre de B. En déduire par récurrence que B est diagonalisable sur $\mathbb{R}$, dans une base orthonormée.

14.f Exercice (Inégalité de Minkowski)**.**
Soit $p \geqslant 1$ un réel. Notons

$$\|x\|_p = (|x_1|^p + \ldots + |x_n|^p)^{1/p}$$

pour tout $x \in \mathbb{R}^n$. Pour tous vecteurs $x, y \in \mathbb{R}^n$ on a

$$\|x+y\|_p \leqslant \|x\|_p + \|y\|_p$$

(ce qui montre que $\|\cdot\|_p$ est une norme).

14.g Exercice (Inégalité de Hadamard).
Montrer que, pour tous vecteurs $x_1, ..., x_n \in \mathbb{R}^n$,

$$|\det(x_1, ..., x_n)| \leqslant \|x_1\| \cdots \|x_n\|,$$

où $\|\cdot\|$ est la norme euclidienne de $\mathbb{R}^n$; on pourra commencer par montrer que, si $x_2, ..., x_n$ est une famille libre donnée et si x_1 est un maximum de la fonction $\S^{n-1} \to \mathbb{R}$, $\xi \mapsto \det(\xi, x_2, ..., x_n)$, x_1 est orthogonal à x_2, ..., x_n, puis en déduire les maxima de $\det(x_1, ..., x_n)$ lorsque $x_1, ..., x_n \in \S^{n-1}$.

14.h Exercice (Inégalité de Hölder).
Quels que soient les entiers naturels non nuls p, q, r tels que $1/p + 1/q = 1/r$ et quels que soient les vecteurs $x, y \in \mathbb{R}^n$ on a

$$\|(x_1 \cdot y_1, ..., x_n \cdot y_n)\|_r \leqslant \|x\|_p \|y\|_q$$

où, rappelons-le, la norme ℓ^p est définie par

$$\|x\|_p = \left(|x_1|^p + \cdots + |x_n|^p\right)^{1/p}.$$

Chapitre 15

Surfaces II – Coordonnées

15.a Exercice (Graphe d'une application)**.**
Montrer que le graphe d'une application $f : (\mathbb{R}^n, a) \to (\mathbb{R}^p, b)$, soit

$$G = \{(x, f(x)),\ x \in \mathbb{R}^n \text{ proche de } a\}$$

est une surface de $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p$ de dimension n, admettant la première projection $p_1 : (x, f(x)) \mapsto x$ comme système de coordonnées (globales).

15.b Exercice (Surfaces comme graphes)**.**
Montrer réciproquement que, si S est une surface de dimension d de $\mathbb{R}^n$, il existe une décomposition en somme directe $\mathbb{R}^n = E \oplus F$ avec $\dim E = d$, et une application $\varphi : (E, a_1) \to (F, a_2)$ de classe C^1 (avec $a = a_1 + a_2$) telle que localement S soit le graphe de φ, i.e. la surface d'équation $y = \varphi(x)$ et

$$T_a S = \{(\xi, \varphi'(a_1) \cdot \xi); \xi \in E\}.$$

15.c Exercice (Classe C^k)**.**
Montrer que le fait d'être de classe C^k ne dépend pas des systèmes de coordonnées C^k x et y choisis.

Chapitre 16

Déterminant

16.a Exercice (Aire d'un triangle)**. 1.** Calculer l'aire orientée du triangle de sommets

$$A = (1,2), \quad B = (3,3), \quad C = (2,1).$$

2. Calculer l'aire (non orientée) du triangle dans $\mathbb{R}^3$ de sommets

$$A = (1,2,3), \quad B = (4,4,4), \quad C = (3,2,1)$$

(une solution est d'utiliser le produit vectoriel, mais on essayera plutôt de faire un calcul qui se généralise en dimension quelconque).

16.b Exercice (Matrices de Gram)**.**
La *matrice de Gram* [1] de p vecteurs $x_1, ..., x_p \in \mathbb{R}^n$ est la matrice $p \times p$ des produits scalaires,

$$G(x_1, ..., x_p) = \left((x_i|x_j)\right)_{1 \leqslant i,j \leqslant p} \in M_p(\mathbb{R}),$$

où $(\cdot|\cdot)$ désigne le produit scalaire standard de $\mathbb{R}^n$ (question complémentaire : refaire l'exercice avec un espace euclidien quelconque).

1. Montrer qu'une matrice $H \in M_p(\mathbb{R})$ est une matrice de Gram si et seulement si il existe $A \in M_{n,p}(\mathbb{R})$ telle que $H = {}^tAA$.

2. Montrer que la matrice $G(x_1, ..., x_p)$ et la famille $(x_1, ..., x_p)$ ont même rang.

3. Si $(f_1, ..., f_p)$ est une famille libre de $\mathbb{R}^n$ et $x \in \mathbb{R}^n$, montrer que la distance de x au sous-espace $F = \mathrm{Vect}\,(f_1, ..., f_p)$ est

$$d(x,F) = \sqrt{\frac{\det G(x, f_1, ..., f_p)}{\det G(f_1, ..., f_p)}}.$$

4. En déduire que $G(x_1, ..., x_p)$ est le carré du volume du parallélotope

$$P(x_1, ..., x_p) = \{\alpha_1 x_1 + \cdots + \alpha_p x_p,\ 0 \leqslant \alpha_i \leqslant 1\}$$

engendré par les vecteurs $x_1, ..., x_p \in \mathbb{R}^n$.

5. En déduire une interprétation géométrique de la formule de Binet-Cauchy [2] :

1. Jørgen Pedersen GRAM, danois, n'étudia pas à l'Université Paris-Dauphine et fut pourtant mathématicien et actuaire (1850–1916).
2. Jacques Philippe Marie BINET, mathématicien et astronome français (1786–1756)

pour toute matrice $A \in M_{n,p}(\mathbb{R})$ (avec $p \leqslant n$),

$$\det({}^tAA) = \sum_{J \in \mathcal{J}_{n,d}} \det(A_J)^2,$$

où $\mathcal{J}_{n,d}$ est l'ensemble des parties à d éléments de $\{1, ..., n\}$ (d étant un entier fixé) et où $A_S \in M_d(\mathbb{R})$ est la sous-matrice de A obtenue en ne gardant que les lignes et les colonnes dont les indices sont dans J. Que dit cette formule pour $d = 1$?

6. Question subsidiaire : Montrer la formule de Binet-Cauchy ; on pourra commencer par montrer que, si $M \in M_n(\mathbb{R})$,

$$\det(I_n + xM) = \sum_{d=1}^{n} T_d(M)x^d, \quad T_d(M) = \sum_{J \in \mathcal{J}_{n,d}} \det M_J.$$

16.c Exercice (Polynômes de Legendre)**.**
Soient $I = [-1, 1]$ et $E = L^2(I)$ l'espace des fonctions réelles de carré intégrable sur I. Le produit scalaire

$$(f|g) = \int_I f(t)\, g(t)\, dt$$

fait de E un espace de Hilbert.

Soit $G_n = ((x^i|x^j)_{0 \leqslant i,j \leqslant n}$ la matrice de Gram des monômes x^i. Comme le coefficient (i, j) de G_n ne dépend que de $i + j$, on le notera γ_{i+j}.

1. Montrer que G_n est définie positive.

Soit $(p_k)_{k=0,\dots,n}$ la famille obtenue par orthonormalisation de la famille de monômes $(1, ..., x^n)$.

2. Montrer que

$$p_n(x) = \frac{1}{\sqrt{\Delta_{n-1}\Delta_n}} q_n(x),$$

où

$$q_n(x) = \det \begin{pmatrix} \gamma_0 & \cdots & \gamma_n \\ \vdots & & \vdots \\ \gamma_{n-1} & \cdots & \gamma_{2n-1} \\ 1 & \cdots & x^n \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \Delta_n = \det G_n.$$

3. Montrons d'abord qu'il existe $c_n \in \mathbb{R}$ tel que $p_n = c_n q_n(x)$. Comme q_n est de degré n, il suffit de montrer que

$$(q_n(x)|x^i) = O \quad \forall i = 0, ..., n-1.$$

Or

$$(q_n(x)|x^i) = \int_I \det \begin{pmatrix} \gamma_0 & \cdots & \gamma_n \\ \vdots & & \vdots \\ \gamma_{n-1} & \cdots & \gamma_{2n-1} \\ x^i & \cdots & x^{n+i} \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} \gamma_0 & \cdots & \gamma_n \\ \vdots & & \vdots \\ \gamma_{n-1} & \cdots & \gamma_{2n-1} \\ \gamma_i & \cdots & \gamma_{n+i} \end{pmatrix}.$$

Dans ce dernier determinant, la ligne i et la dernière sont les mêmes, donc le déterminant est nul.

De plus $\|p_n\|^1 = 1$. Or, le coefficient dominant de p_n est $c_n\Delta_{n-1}$.

16.d Exercice. Montrer que le fait de définir une même orientation est une relation d'équivalence ; on utilisera la multiplicativité du déterminant.

16.e Exercice (Exemples de déterminants)**.**
Calculer les déterminants suivants (le dernier étant plus difficile) :

$$A_n = \det \begin{pmatrix} 1 & x_1 & \cdots & x_1^{n-1} \\ \vdots & & & \vdots \\ 1 & x_n & \cdots & x_n^{n-1} \end{pmatrix} = \prod_{i<j}(x_j - x_i)$$

$$B_n = \det \begin{pmatrix} 1 + x_1y_1 & x_1y_2 & \cdots & x_1y_n \\ x_2y_1 & 1 + x_2y_2 & \cdots & x_2y_n \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ x_ny_1 & x_ny_2 & \cdots & 1 + x_ny_n \end{pmatrix} = 1 + x_1y_1 + \cdots + x_ny_n$$

$$C_n = \det(PGCD(i,j)_{1\leqslant i,j\leqslant n}) = \prod_{1\leqslant k\leqslant n} \varphi(k),$$

où φ est l'indicatrice d'Euler.

Chapitre 17

Formes différentielles ★

17.a Exercice (Produit vectoriel)**.**
Dans cet exercice, on identifie $\mathbb{R}^3$ et son dual grâce au produit scalaire euclidien de $\mathbb{R}^3$ (via l'isomorphisme $\mathbb{R}^3 \to (\mathbb{R}^3)^*$, $\xi \mapsto (\eta \mapsto \xi \cdot \eta)$).

1. Vérifier que l'application

$$f : \mathbb{R}^3 \mapsto A_3(\mathbb{R}) = \wedge^2(\mathbb{R}^3)^*, \qquad \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 0 & -z & y \\ z & 0 & -x \\ -y & x & 0 \end{pmatrix}$$

est un isomorphisme (on a noté $A_3(\mathbb{R})$ l'espace des matrices 3×3 antisymétriques) tel que

$$f(\xi) \cdot \eta = \xi \times \eta.$$

2. Montrer que le diagramme suivant commute :

$$\begin{tikzcd} \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \arrow[r, "\times"] \arrow[d, "\simeq"'] & \mathbb{R}^3 \arrow[d, "f"] \\ (\mathbb{R}^3)^* \times (\mathbb{R}^3)^* \arrow[r, "\wedge"] & \wedge^2(\mathbb{R}^3)^*. \end{tikzcd}$$

Chapitre 18

Surfaces III – Orientabilité ⋆

Chapitre 19

Intégration ★

19.a Exercice (Forme surface de $\mathbb{R}^2$)**.**
1. Calculer l'expression de la forme surface standard $\Omega = dx \wedge dy$ de $\mathbb{R}^2$ en coordonnées polaires, c'est-à-dire l'image réciproque de Ω par l'application « coordonnées polaires » $\rho : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $(r, \theta) \mapsto (x, y) = (r\cos\theta, r\sin\theta)$.

2. Faire de même avec la forme volume standard de $\mathbb{R}^3$ et les coordonnées sphériques.

19.b Exercice (Revêtements)**.**
Une application $f : S \to T$ entre deux surfaces orientables est un *revêtement* de degré k si
- — f est un difféomorphisme local au voisinage de tout point de S
- — tout point de T possède exactement k antécédents par f.

1. Donner des exemples de revêtements de degré 2 et infini.

2. Montrer que, si β est une forme différentielle de degré maximal sur T,

$$\int_S f^*\beta = k\int_T \beta.$$

Chapitre 20

Formule de Stokes ★

20.a Exercice (Bord).
1. Montrer que le bord ∂S de S est une surface de $\mathbb{R}^n$ de dimension $d-1$.

2. En déduire que, si S est orientée, il en est de même de ∂S.

20.b Exercice.
1. Montrer que, pour toute k-forme différentielle α, $d^2\alpha = 0$ (on pourra utiliser le lemme de Schwarz).

2. En déduire que, pour toute surface à bord orientable S, $\partial^2 S = 0$.

20.c Exercice (Formule de Cauchy).
Soit f une fonction complexe définie sur un voisinage de $D = D(0,1)$, de classe C^1.

1. Montrer que, pour tout $\zeta \in D$,

$$i2\pi f(\zeta) = \int_{\partial D} \frac{f(z)}{z-\zeta}\, dz + \int_D \frac{(\partial f/\partial \bar{z})(z)}{z-\zeta}\, dz d\bar{z}.$$

2. En déduire que, si f est holomorphe,

$$i2\pi f(\zeta) = \int_{\partial D} \frac{f(z)}{z-\zeta}\, dz,$$

donc développable en série entière.

Chapitre 21

Dérivées d'ordre supérieur

21.a Exercice (Cas particuliers de la formule de Taylor)**.**
Écrire la formule de Taylor à l'ordre trois pour une fonction de deux variables, en fonction des dérivées partielles de la fonction.

21.b Exercice (Tangence d'ordre k)**.**
Deux applications $f : (\mathbb{R}^n, a) \to (\mathbb{R}^p, b)$ et $g : (\mathbb{R}^n, a) \to (\mathbb{R}^p, b)$ sont *tangentes d'ordre k* ou *k-tangentes*, ce qu'on note $f \sim_k g$, si

$$(f - g)(a + \xi) = o(\|\xi\|^k).$$

1. Montrer que la k-tangence est une relation d'équivalence.

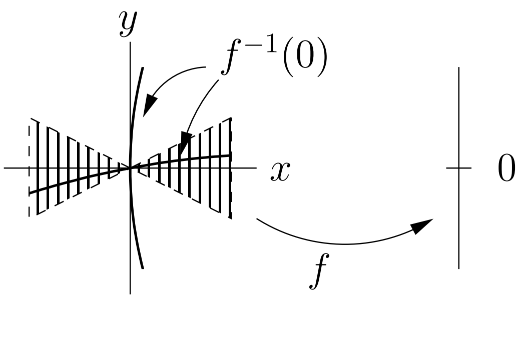
2. Montrer que f est continue en x si et seulement si f et $x \mapsto b$ sont 0-tangentes, et que f est dérivable en x avec pour dérivée $f'(x)$ si et seulement si f et $x \mapsto b + f'(x) \cdot (x - a)$ sont 1-tangentes.

3. Montrer que, si $\varphi : (\mathbb{R}^n, a') \to (\mathbb{R}^n, a)$ est un difféomorphisme local de classe C^k, $f \sim_k g$ (en a) si et seulement si $f \circ \varphi \sim_k g \circ \varphi$ (en a').

21.c Exercice (Éclatement d'une singularité)**.**
Soit $f : (\mathbb{R}^2, 0) \to (\mathbb{R}, 0)$ une fonction locale de classe C^∞ dont 0 soit un point critique non dégénéré d'indice 1 :

$$f(x, y) = xy + O_3.$$

Montrer que, localement, l'ensemble $\Sigma_0 = f^{-1}(0)$ de niveau critique de f est l'union de deux courbes transverses, dont chacune est tangente à l'un des axes de coordonnées.



Chapitre 22

Forme normale d'une forme quadratique

22.a Exercice (Forme quadratique abstraite)**.**
Montrer que, si une fonction $q : E \to \mathbb{K}$ est une forme quadratique "abstraite", au sens où q est homogène de degré 2 : $q(\lambda x) = \lambda^2 q(x)$ ($x \in E$, $\lambda \in \mathbb{K}$) et l'application

$$b : E^2 \to \mathbb{K}, \quad b_q(x,y) = \frac{1}{2}(q(x+y) - q(x) - q(y))$$

est bilinéaire, alors q est la forme quadratique associée à b, et que donc l'espace des formes quadratiques s'identifie à celui des formes bilinéaires symétriques. [1]

22.b Exercice. La fonction $q : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $(x,y) \mapsto \sqrt{x^4 + y^4}$ est-elle une forme quadratique ?

22.c Exercice (Tracé d'une conique)**.**
Tracer la courbe conique d'équation $3x^2 - 2xy + 3y^2 = 1$.

22.d Exercice (Étude d'un point critique)**.**
Déterminer la nature du point critique 0 pour la fonction $f(x,y) = 3x^2 - 2xy + 3y^2$.

22.e Exercice (Forme quadratique complexe)**.**
Montrer que, si q est une forme quadratique sur un espace vectoriel complexe de dimension finie, il existe une base q-orthonormée dans laquelle q est la forme quadratique sur $\mathbb{C}^n$

$$x_1^2 + \cdots + x_{x_r}^2;$$

r est le rang, qui est un invariant.

22.f Exercice (Spectre d'un opérateur isométrique)**.**
Soient E un espace vectoriel de dimension finie sur $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, et $\varphi \in L(E)$ un opérateur préservant une forme bilinéaire non dégénérée (ce qui s'appelle un *produit scalaire* [2].). Montrer que φ est inversible et semblable à son inverse. *Indication :* on pourra utiliser la forme normale de Frobenius.

1. Il est essentiel ici que la caractéristique du corps $\mathbb{K}$ ne soit pas 2.
2. Par exemple, un produit scalaire antisymétrique s'appelle un *produit scalaire symplectique*

Chapitre 23

Fonctions de Morse

23.a Exercice.
Tracer, au voisinage de l'origine, l'ensemble d'équation

$$x^2 - y^2 + 2x^3 + y^3 = 0.$$

Préciser les tangentes au point double et la position de la courbe par rapport aux tangentes.

23.b Exercice (Distance à une hypersurface)**.**
Soient $\varphi : (\mathbb{R}^n, t) \to (\mathbb{R}^{n+1}, a)$ une immersion de classe C^∞, et $\theta : (\mathbb{R}^n, t) \to \mathbb{R}^{n+1}$ une application C^∞ telle que, pour tout u, $\theta(u)$ soit un vecteur unitaire orthogonal à $\operatorname{Im} \varphi'(u)$.

1. Montrer que l'application $F : (\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}, (t, 0)) \to \mathbb{R}^{n+1}$, $(u, v) \mapsto \varphi(u) + v\theta(u)$ est un difféomorphisme local.

2. Montrer que la fonction $v(x) = \mathrm{pr}_2 \circ F^{-1}(x)$ satisfait l'*équation eikonale*

$$\|v'(x)\|^2 = (\partial_{x_1} v)^2 + \cdots + (\partial_{x_{n+1}} v)^2 = 1.$$

3. Soit de plus z est un point fixé de $\mathbb{R}^{n+1}$. On suppose que t est un point critique de la fonction

$$f : (\mathbb{R}^n, t) \to \mathbb{R}, \quad u \mapsto \|\varphi(u) - z\|^2.$$

Soient Q_1 et Q_2 les deux formes quadratiques sur $\mathbb{R}^n$ définies par

$$Q_1(\tau) = \|\varphi'(t) \cdot \tau\|^2 \quad \text{et} \quad Q_2(\tau) = (\varphi''(t) \cdot \tau^2) \cdot \theta(t).$$

Montrer que $z - a$ et $\theta(t)$ sont colinéaires, et qu'il existe un réel α tel que

$$f(t + \tau) - f(t) = Q_1(\tau) - \alpha Q_2(\tau) + o(\|\tau\|^2).$$

En déduire une condition nécessaire et suffisante sur les valeurs propres de $Q_1^{-1} Q_2$ et sur α pour que t soit un minimum local strict de f.

Chapitre 24

Convexité

24.a Exercice (Théorème de Minkowski)**.**
Supposons E de dimension finie.

1. Soit C un convexe fermé non vide de E. Montrer que tout point $p \in E$ n'appartenant pas à C est strictement séparé de C par un hyperplan affine.

(Ce lemme est un cas particulier en dimension finie du théorème de Hahn-Banach.)

2. En déduire qu'un convexe fermé C de E est l'intersection des demi-espaces affines (quelconques, ou tous fermés, ou tous ouverts) qui le contiennent.

24.b Exercice (Inégalité de Jensen)**.**
Supposons E est de dimension finie n.

1. Montrer que l'enveloppe convexe d'une partie X de E est

$$\mathrm{conv}(X) = \{\alpha_0 x_0 + \ldots + \alpha_n X_n,\ x_j \in X,\ \alpha_j \geqslant 0,\ \alpha_0 + \ldots + \alpha_n = 1\}$$

(théorème de Carathéodory).

2. Si X est fermée, $\mathrm{conv}(X)$ est-elle automatiquement fermée ?

On suppose dorénavant X compacte.

3. Montrer que $\mathrm{conv}(X)$ est compacte.

4. Montrer que $\mathrm{conv}(X)$ est l'intersection des demi-espaces affines (quelconques, ou tous ouverts, ou tous fermés) contenant X.

Soient m une mesure de E borélienne, finie et à support compact. Le *centre de masse* de m est le point

$$c(m) = \frac{1}{m(E)} \int_E x\, dm \in E.$$

5. Montrer que $c(m)$ appartient à l'enveloppe convexe du support de m.

6. En déduire que, si $f : I$ intervalle ouvert borné $\subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est une fonction convexe et si μ est une probabilité sur I,

$$f\left(\int_I x\, d\mu\right) \leqslant \int_I f\, d\mu.$$

Remarque : Comme la formule d'intégration par rapport à une mesure image le montre, le membre de droite de l'inégalité est le centre de masse

$$\int_I f(x)\,d\mu(x) = \int_{f(I)} y\,d(f_*\mu)(y)$$

de la loi $f_*\mu$ de f. Donc l'inégalité de Jensen affirme que :

$$f(c(\mu)) \leqslant c(f_*\mu).$$

24.c Exercice (Théorème de Gauss-Lucas)**.** Soit P un polynôme complexe. Montrer que les points critiques de P sont dans l'enveloppe convexe de $P^{-1}(a)$ pour tout $a \in \mathbb{C}$ (théorème de Gauss-Lucas).

(Ce théorème est un analogue complexe du théorème de Rolle. Il est élémentaire si P est de degré 2 (l'unique point critique de P est alors au milieu du segment des deux racines), ou quand $|a|$ est grand.)

Chapitre 25

Fonctions convexes

25.a Exercice (Fonctions convexes sur un intervalle de $\mathbb{R}$)**.**
Soit $f : I$ intervalle de $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction convexe.

1. Montrer que les propriétés suivantes sont équivalentes :

1. f est convexe
2. pour tous $x_0 < x_1$ dans I,
$$f\left(\frac{x_0 + x_1}{2}\right) \leqslant \frac{f(x_0) + f(x_1)}{2}.$$
3. pour tous $x_0 < x < x_1$ dans I,
$$\det \begin{pmatrix} 1 & x_0 & f(x_0) \\ 1 & x & f(x) \\ 1 & x_1 & f(x_1) \end{pmatrix} \geqslant 0.$$
4. le taux d'accroissement
$$\frac{f(y) - f(x)}{y - x} \quad (x < y,\ x, y \in I)$$
est une fonction croissante de chacune de ses variables.

2. Retrouver la propriété que, si f est convexe, f est continue sur l'intérieur de I.

3. Montrer que, si f est de classe C^1, f est convexe si et seulement si f' est croissante.

4. Montrer que, si f est de classe C^2, f est convexe si et seulement si $f'' \geqslant 0$.

5. Montrer l'*inégalité de Jensen* : si f est convexe et si $x_1, ..., x_n \in I$, $p_1, ..., p_n \in [0, 1]$ et $\sum p_k = 1$,
$$f(p_1 x_1 + \cdots + p_n x_n) \leqslant p_1 f(x_1) + \cdots + p_n f(x_n).$$

6. Montrer que, pour un triangle dont on note α, β, γ les mesures d'angles dans $]0, \pi[$,
$$\frac{1}{\sin\alpha} + \frac{1}{\sin\beta} \geqslant \frac{8}{3 + 2\cos\gamma}.$$

25.b Exercice (Géodésiques du pklan euclidien)**.**

25.c Exercice.
1. Montrer que si $f : E \to \mathbb{R}$ est convexe et majorée, elle est constante.

2. Montrer que, si E est de dimension finie et $f : X$ convexe $\subset E \to \mathbb{R}$ est convexe, f est continue en tout point intérieur de X.

25.d Exercice (Fonction fortement convexe)**.**
Soit $f : X$ convexe fermé $\subset \mathbb{R}^n$ continue. On dit que f est *α-convexe* s'il existe $\alpha > 0$ tel que

$$f(x) - \frac{\alpha}{2}\|x\|^2$$

soit convexe. (On dit aussi *fortement convexe*.)

1. Montrer que, si f est α-convexe, f est minorée, puis qu'elle possède un unique minimum.

On suppose de plus que f est de classe C^2.

2. Montrer que f est α-convexe si et seulement si

$$f''(x) \cdot (v, v) \geqslant \alpha\|v\|^2 \quad (\forall x \in X,\ v \in \mathbb{R}^n).$$

3. Montrer que, si f est α-convexe, elle possède un minimum unique a, que de plus toute suite minimisante converge vers a, et que l'on a

$$\|x - a\|^2 \leqslant \frac{4}{\alpha}(f(x) - f(a)).$$

25.e Exercice (Algorithme de relaxation)**.**
Soit $f : X$ convexe fermé $\subset \mathbb{R}^n$ continue et α-convexe. Construisons la suite (x^k) de $\mathbb{R}^n$ par l'*algorithme de relaxation* suivant, qui consiste à minimiser f par rapport à chacune de ses variables, prises dans un ordre cyclique fixe :

– Commençons avec un point $x^0 = (x_1^0, ..., x_n^0) \in X$ quelconque.

– La fonction $t \mapsto f(t, x_2^0, ..., x_n^0)$ possède un unique minimum t_1^0.

– Puis on appelle t_2^0 l'unique minimum de la fonction $t \mapsto f(t_1^0, t, x_3^0, ..., x_n^0)$.

...

– Puis on appelle t_n^0 l'unique minimum de la fonction $t \mapsto f(t_1^0, t_2^0, ..., x_{n-1}^0, t)$.

– On pose $x^{0,i} = (t_1^0, ..., t_i^0, x_{i+1}^0, ..., x_n^0)$ pour tout i et $x^1 = (t_1^0, ..., t_n^0)$, et l'on recommence en remplaçant x^0 par x^1, et ainsi de suite.

Montrer que (x^k) converge vers le minimum de f.

25.f Exercice.
1. Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ contine convexe. Montrer que

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right) \leqslant \frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)\,dt \leqslant \frac{f(a) + f(b)}{2}$$

(inégalité de Hermite-Hadamard). Quels sont les cas d'égalité ?

Nous allons appliquer cette inégalité dans plusieurs cas.

2. Soient $g : [a, b] \to \mathbb{R}$ de classe C^2, $m = \min g''$ et $M = \max f$. Montrer que

$$\begin{cases} \frac{m(b-a)^2}{24} \leqslant \frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)\,dt \leqslant \frac{M(b-a)^2}{24} \\ \frac{m(b-a)^2}{12} \leqslant \frac{f(a)+f(b)}{2} \leqslant \frac{M(b-a)^2}{12}. \end{cases}$$

3. Montrer que, pour tous $x, y > 0$,

$$\sqrt{xy} \leqslant \frac{x-y}{\ln x - \ln y} \leqslant \frac{x+y}{2}$$

(inégalité arithmético-logarithmico-géométrique).

4. Montrer que, si $x \geqslant 0$,

$$x - \frac{x^2}{2+x} \leqslant \ln(1+x) \leqslant x - \frac{x^2}{2(1+x)},$$

en déduire que, pour tout $n \in \mathbb{N}_*$,

$$\frac{1}{n+\frac{1}{2}} \leqslant \ln(n+1) - \ln n \leqslant \frac{1}{2}\left(\frac{1}{n} + \frac{1}{n+1}\right).$$

En déduire la formule de Stirling :

$$n! \simeq \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n.$$

25.g Exercice (Méthode du trapèze)**.**

1. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ convexe dérivable. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}_*$,

$$0 \leqslant \frac{f(0)}{2} + f(1) + f(2) + \cdots + f(n-1) + \frac{f(n)}{2} - \int_0^n f \leqslant \frac{f'(n)-f'(0)}{8}.$$

2. Interpréter cette inégalité en terme d'erreur dans le calcul approché d'une intégrale par la méthode du trapèze.

Chapitre 26

Et la dimension infinie ? ⋆

26.a Exercice. La norme uniforme sur l'espace des fonctions continues sur un ouvert U de $\mathbb{R}^n$ est-elle différentiable en dehors de la fonction nulle ?

26.b Exercice (Inversion locale entre espaces de Banach)**.**
Soient E et F deux espaces de Banach et $f : (E, a) \to F$ une application de classe C^1. Montrer que f est un difféomorphisme local si et seulement si $f'(a)$ est un isomorphisme.

26.c Exercice (Exemples de facteurs directs)**.**
1. Montrer qu'un sous-espace de dimension finie ou de codimension finie est facteur direct.

2. Montrer qu'un sous-espace fermé d'un espace de Hilbert est facteur direct.

26.d Exercice. Montrer les théorèmes de submersion, d'immersion et de fonction implicite pour des applications entre espaces de Banach. Montrer les théorèmes du rang et du corang constants.

26.e Exercice (Théorème de Cauchy-Lipschitz)**.**
Soient E un espace de Banach et v un champ de vecteurs lipschitzien sur un voisinage ouvert U d'un point $a \in E$.

1. Il existe une unique application lipschitzienne locale $\phi : (U \times \mathbb{R}, (a, 0)) \to (U, a), (x, t) \mapsto \phi_t(x)$ telle que pour tout x l'application partielle $t \mapsto \phi_t(x)$ soient de classe C^1 et qui satisfasse le problème de Cauchy suivant :

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}(\phi_t(x)) = v(\phi_t(x)) & (\forall x, t) \\ \phi_0(x) = x & (\forall t). \end{cases}$$

2. Si v est de classe C^k $(0 \leqslant k \leqslant \infty, \Omega)$, il en est de même pour ϕ et, si $k < \infty$, pour tout x l'application partielle $t \mapsto \phi_t(x)$ est de classe C^{k+1}.

L'application ϕ est le *flot local* de v, et réciproquement $v = \frac{d\phi}{dt} \circ \phi_t^{-1}$ est le *générateur infinitésimal* de ϕ.

26.f Exercice (Hamilton [Ham82, p. 75])**.**
On considère une bulle de savon s'appuyant sur deux cercles parallèles dans $\mathbb{R}^3$,

situés dans les plans $x = \pm 1$, et de même rayon $r > 0$. En Statique des fluides, on montre que la bulle de savon prend la forme d'une surface de révolution obtenue en faisant tourner la courbe $y = f(x)$ autour de l'axe des x, avec la contrainte $f(\pm 1) = r$, et que cette surface est d'aire $A(f)$ minimale.

1. Montrer que
$$A(f) = \int_{-1}^{1} 2\pi f \sqrt{1 + f'^2}\, dx.$$

2. En déduire que
$$f f'' = f'^2 + 1;$$
on pourra montrer que la fonction
$$A : E = \{f \in C^\infty([-1, 1]),\ f(\pm 1) = r\} \to \mathbb{R}, \quad f \mapsto A(f)$$
a toutes ses dérivées directionnelles nulles.

3. Montrer qu'il existe des solutions si r est suffisamment grand ; on pourra remarquer que ces solutions sont de la forme $f(x) = \frac{1}{s}\cosh(sx)$, pour un $s \in \mathbb{R}_*$ que l'on caractérisera en fonction de r.

Annexe A

Topologie

A.a Exercice (Voisinages dans un espace métrique).
Soit (X, d) un espace métrique. Pour $x \in X$, soit $\mathcal{V}(x)$ l'ensemble des parties $V \subset X$ telles qu'il existe $r > 0$ telles que $B(x, r) \subset V$. Montrer que ces $V(x)$ définissent une structure de voisinages sur X.

A.b Exercice (Continuité).
Montrer que $f : X \to Y$ est continue (sous-entendu : en tout point de X) si et seulement si, pour tout ouvert W de Y, $f^{-1}(W)$ est un ouvert de X.

A.c Exercice (Correspondance entre ouverts et voisinages).
Une topologie étant donnée, un partie V de X contenant un point x est un voisinage si et seulement si V contient un ouvert contenant X. Montrer qu'il est équivalent de se donner une structure de voisinage ou une topologie sur X.

A.d Exercice (Topologie initiale).
Soient X un ensemble, Y un espace topologique et $f : X \to Y$ une application. La *topologie initiale* de f est la topologie de X la plus petite pour l'inclusion (on dit aussi la plus *grossière*) qui rende f continue. Si f est injective, on parle de *topologie induite.*

1. Montrer que la topologie initiale existe.

2. Montrer qu'elle est caractérisée par la propriété universelle suivante : pour tout espace topologique Z, une application $g : Z \to X$ est continue si et seulement si $f \circ g$ est continue.

On généralise cela de façon évidente à une famille quelconque d'applications. En particulier, la *topologie faible* d'un espace vectoriel topologique E est la topologie initiale de ses formes linéaires continues $\alpha \in E'$.

A.e Exercice (Topologie finale).
Soient X un espace topologique, Y un ensemble, et $f : X \to Y$ une application. La *topologie finale* de f est la topologie de Y la plus grande pour l'inclusion (on dit aussi la plus *fine*) qui rende f continue. Si f est surjective, on parle de *topologie quotient* ; si f est injective (et pour toute topologie de Y plus petite que la topologie

finale), f s'appelle un *plongement*.

1. Montrer que la topologie finale existe.

2. Montrer qu'elle est caractérisée par la propriété universelle suivante : pour tout espace topologique Z, une application $g : Y \to Z$ est continue si et seulement si $g \circ f$ est continue.

3. On munit $\mathbb{T} = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ de la topologie quotient associée à la projection canonique $p : \mathbb{R} \to \mathbb{R}/\mathbb{Z}$, et $\mathbb{U} = \{z \in \mathbb{C};\ |z| = 1\}$ de la topologie initiale de l'inclusion $j : \mathbb{U} \hookrightarrow \mathbb{C}$. Montrer que $\mathbb{T}$ et $\mathbb{U}$ sont homéomorphes.

A.f Exercice (Topologie de l'ordre)**.**
Soit $(X, \leqslant)$ un ensemble non vide totalement ordonné.[1] On note $<$ la relation d'ordre strict associée à $\leqslant$ ($a < b$ si et seulement si $a \leqslant b$ et $a \neq b$). Un *intervalle ouvert* est une partie de l'une des quatre formes suivantes :

$$]a, b[:= \{x,\ a < x < b\}, \quad]\alpha, a[:= \{x,\ x < a\}, \quad]a, \omega[:= \{x,\ a < x\}, \quad]\alpha, \omega[:= X,$$

où $a, b \in X$ (et où α et ω ne sont que deux symboles qui n'ont aucun sens hérité d'ailleurs).

1. Montrer que l'ensemble des parties O de X telles que quel que soit $a \in O$ la partie O contient un intervalle ouvert contenant a est une topologie de X ; c'est la *topologie de l'ordre* de $(X, \leqslant)$.

2. Dans le cas de $(\mathbb{R}, \leqslant)$, montrer que la topologie de l'ordre coïncide avec la topologie de la métrique euclidienne.

Notons $-\infty$ et $+\infty$ deux éléments quelconques n'appartenant pas à $\mathbb{R}$, et $X = \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$. Soit $\leqslant$ l'unique relation d'ordre sur X qui prolonge celle de $\mathbb{R}$ et telle que

$$-\infty \leqslant x \leqslant +\infty \quad (\forall x \in \mathbb{R}).$$

On munit X de la topologie de la relation d'ordre.

3. Donner une base de voisinages de $\pm\infty$.

4. Montrer que $\mathbb{R}$ est dense dans X, c'est-à-dire que X est le plus petit fermé contenant $\mathbb{R}$. (Pour cette raison, on note souvent $X = \bar{\mathbb{R}}$.)

5. Montrer que la fonction $\varphi : \mathbb{R} \to]0, 1[$ définie par

$$\varphi(x) = \frac{x}{1 + |x|}$$

se prolonge par continuité en une application $\bar{\mathbb{R}} \to [0, 1]$ et que ce prolongement est un homéomorphisme, c'est-à-dire une bijection bicontinue.

6. En déduire une distance d sur X dont la topologie métrique associée soit la topologie de l'ordre de X.

---

1. On rappelle qu'une *relation d'ordre* est une relation binaire $\leqslant$
   — réflexive : $x \leqslant x$
   — antisymétrique : $x \leqslant y$ et $y \leqslant x \Rightarrow x = y$
   — transitive : $x \leqslant y \leqslant z \Rightarrow x \leqslant z$.

(Le lecteur rigoureux remarquera que $]\alpha, \omega[= [-\infty, +\infty]$, ce qui montre que l'on ne peut généralement pas identifier α et ω aux plus petit et plus grand éléments de X, même à supposer que ceux-ci existent !)

7. Montrer que la tribu borélienne de X (c'est-à-dire engendrée par les ouverts de X) est la "tribu borélienne" de $\bar{\mathbb{R}}$, c'est-à-dire la tribu engendrée par les ouverts de $\bar{\mathbb{R}}$.

A.g Exercice (Connexité)**.**
Un espace topologique X est *connexe* s'il n'est pas l'union disjointe de deux fermés non vides.

1. Montrer que l'union de parties connexes dont l'intersection est non vide est connexe.

2. Montrer que les parties connexes de $\mathbb{R}$ sont les intervalles

3. Montrer que l'image d'un connexe par une application continue est connexe.

La *composante connexe* d'un point $x \in X$ est la plus grande partie connexe contenant X.

4. Montrer que les composantes connexes forment une partition de X.

5. Montrer que, si entre deux points quelconques de X il existe un chemin continu (on dit que X est *connexe par arcs*), X est connexe.

6. Montrer que le groupe orthogonal O_n possède deux composantes connexes. On note SO_n la composante connexe de l'identité (et O_n^- l'autre composante, qui n'est pas un groupe).

Annexe B

Compacité

B.a Exercice. Montrer que tout intervalle fermé borné de $\mathbb{R}$ est compact.

Annexe C

Espaces métriques complets

C.a Exercice. Soient (X, d) est métrique complet, $\Lambda(X)$ l'espace de ses chemins $\gamma : [0, 1] \to X$ continus. Notons

$$d_\Lambda(\gamma, \gamma') = \sup_{[0,1]} d(\gamma, \gamma').$$

Montrer que $(\Lambda(X), d_\Lambda)$ est un espace métrique complet ; on pourra utiliser le fait que la limite uniforme d'une suite d'applications continues est continue.

C.b Exercice.
Montrer que, si X est complet, l'intersection d'une suite décroissante (A_n) de fermés non vides dont le diamètre tend vers 0 est un singleton.

C.c Exercice.
Montrer qu'un espace métrique compact est complet.

Bibliographie

[Car61] H. Cartan. *Théorie élémentaire des fonctions analytiques d'une ou plusieurs variables complexes.* Avec le concours de Reiji Takahashi. Hermann, Paris, 1961.

[Ham82] R. S. Hamilton. The inverse function theorem of Nash and Moser. *Bull. Amer. Math. Soc. (N.S.)*, 7(1) :65–222, 1982.

[Pea88] G. Peano. Intégration par séries des équations différentielles linéaires. *Math. Ann.*, 32 :450–456, 1888.

[Pic90] É. Picard. Mémoire sur la théorie des équations aux dérivées partielles et la méthode des approximations successives. *J. Math.*, 6(4) :145–210, 1890.

[Rud74] W. Rudin. *Real and complex analysis.* McGraw-Hill, 1974.