Université Paris-Dauphine
J. Féjoz

Calcul différentiel et optimisation
Janvier 2018

Examen

Deux heures — Sans document ni appareil électronique.
*Toutes les réponses doivent être justifiées mais **concises**.*
Mentionner sur la copie les erreurs d'énoncé éventuelles.
Chaque exercice est noté sur 4 points.

1. Étude d'un chemin de $\mathbb{R}^2$. — Tracer le chemin $c : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$, $t \mapsto (\sin^3 t, \sin^2 t)$; on déterminera en particulier la direction tangente à c aux points d'annulation éventuels de c'.

2. Résolution approchée d'une équation. — Donner une valeur approchée de la solution proche de 1 de l'équation

$$x^5 + 0{,}99\, x - 2{,}01 = 0,$$

en calculant le développement limité au premier ordre de la fonction $x(p,q)$ définie implicitement par l'équation $x^5 + px + q = 0$ au voisinage de $(x,p,q) = (1,1,-2)$. Bonus : Donner une méthode pour majorer l'erreur ainsi commise.

3. Problème de Kepler. — Soit $x : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_*^+$ une fonction de classe C^2, vérifiant

$$x'' = \frac{1-x}{x^3}.$$

Montrer que l'image du chemin (x,x') est incluse dans un niveau de la fonction

$$f : \mathbb{R}_*^+ \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad (x,y) \mapsto \frac{y^2}{2} + \frac{1}{2x^2} - \frac{1}{x}.$$

En déduire que si $(x(0),x'(0))$ est proche de $(1,0)$, x est bornée. Plus généralement, trouver une condition nécessaire et suffisante sur $x(0)$ et $x'(0)$ pour que la fonction x soit bornée.

4. Extrema d'une fonction. — Trouver les extrema de la fonction $f(x,y,z) = x + y + z$ restreinte à la courbe de $\mathbb{R}^3$

$$C : \begin{cases} x^2 + y^2 - z^2 = 1 \\ y + 2z = 0. \end{cases}$$

5. Étude d'une courbe singulière. — Établir l'équation des tangentes aux différents points de la partie C de $\mathbb{R}^2$ d'équation $2xy + y^2 - x^3 = 0$.

Solution. —

1. Étude d'un chemin de $\mathbb{R}^2$. — Le chemin c est 2π-périodique. De plus, $c(-t)$ est symétrique de $c(t)$ par rapport à l'axe des y. Et $c(\pi - t) = c(t)$. Il suffit donc d'étudier c sur l'intervalle $[0,\pi/2]$.

Les fonctions x et y sont croissantes sur $[0,\pi/2]$, et leurs dérivées s'annulent l'une et l'autre en 0 et en $\pi/2$.

Au voisinage de 0, $x \sim t^3$ et $y \sim t^2$, donc la pente entre $c(0)$ et $c(t)$ vérifie $|y/x| \sim 1/|t| \to +\infty$ quand $t \to 0$. Donc la tangente à c en $t = 0$ est verticale. (Comme la fonction x est impaire, quand t est négatif la courbe repart de l'autre côté de la tangente. Donc $t = 0$ est un point de rebroussement de première espèce.)

Au voisinage de $\pi/2^-$, posons $t = \pi/2 - \tau$, de sorte que

$$x(t) = \cos^3 \tau \sim 1 - \frac{3}{2}h^2, \quad y(t) = \cos^2 \tau \sim 1 - h^2,$$

et la pente entre $c(t)$ et $c(\pi/2) = (1,1)$ vaut

$$p = \frac{1-y}{1-x} \sim \frac{2}{3}.$$

Donc la tangente à c en $t = \pi/2$ a pour équation

$$y = \frac{2}{3}(x-1) + 1.$$

(Comme $c(\pi - t) = c(t)$, quand t est supérieur à $\pi/2$ la courbe repasse par les mêmes points, donc en particulier du même côté de la tangente. Donc $t = \pi/2$ est un point de rebroussement de seconde espèce.)

D'après les remarques préliminaires, on obtient toute la courbe c en symétrisant cette portion de courbe par rapport à l'axe des y. Voir la figure 1.

2. Résolution approchée d'une équation. — Notons $(X,P,Q) = (1,1,-2)$, de sorte que $f(X,P,Q) = 0$. Comme $\partial_x f(X,P,Q) = 5X^4 + P = 6 \neq 0$, d'après le théorème des fonctions implicites il existe une unique fonction $(p,q) \mapsto x(p,q)$ de classe C^∞ localement au voisinage de $(1,-2) \mapsto 1$ qui résolve en x l'équation $f(x,p,q) = 0$. Au second ordre près,

$$f(x,p,q) = 5\,(x-X) + (p-P) + (x-X) + (q-Q) + o(x-X,p-P,q-Q).$$

L'équation $f = 0$ détermine donc au premier ordre une fonction $x(p,q)$ qui vérifie

$$6\,(x(p,q) - X) + (p-P) + (q-Q) + o(p-P,q-Q) = 0,$$

soit

$$x(p,q) = X - \frac{1}{6}\,((p-P) + (q-Q)) + o(p-P,q-Q).$$

La réponse cherchée est donc

$$x(1-0.01,-2-0.01) \sim 1 - \frac{1}{6}(-0.01-0.01) = 1 + \frac{1}{300}.$$

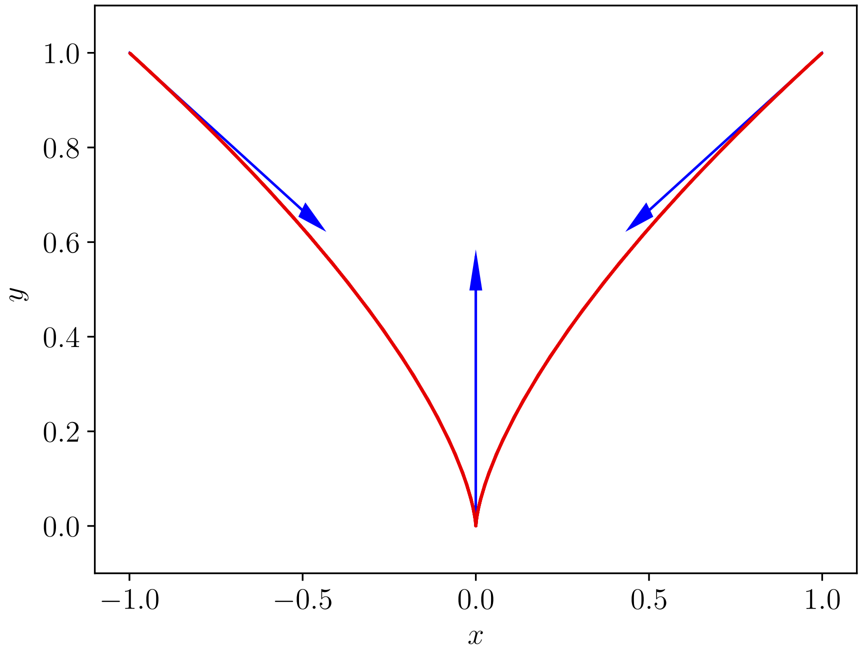

Figure 1. Le chemin $c : t \mapsto (\sin^3 t, \sin^2 t)$ et ses tangentes en $t = 0$ et $t = \pm\pi$.

Estimation de l'erreur : Notons R le terme de reste intégral. En dérivant l'équation implicite une seconde fois, on trouve l'expression des dérivées partielles secondes de $(p,q) \mapsto x(p,q)$, en fonction de x, p et q. Pour majorer R, il suffit donc d'une estimation a priori de $x(p,q)$, ce qu'on obtient en remarquant que

$$f(0; p; q) < 0 < f(2; p; q)$$

donc que $0 < x(p,q) < 2$, etc.

3. Problème de Kepler. — On voit que

$$(f(x(t),x'(t)))' = \left(\frac{x'^2}{2} + \frac{1}{2x^2} - \frac{1}{x}\right)' = x'\left(x'' - \frac{1-x}{x^3}\right) = 0.$$

Donc l'image de $c = (x,x')$ est contenue dans un niveau de la fonction f.

Quand (x,y) tend vers $(1,0)$,

$$f(x,y) = \frac{1 + y^2 + (x-1)^2}{2} + o(\|(x-1,y)\|^2).$$

Les courbes de niveau de la partie quadratique du développement de Taylor sont des cercles. D'après le lemme de Morse, les courbes de niveau de f sont donc aussi, localement, au voisinage de $(1,0)$, des courbes fermées (images de cercles par un difféomorphisme, qui plus est tangent à l'identité). (On peut aussi aboutir à cette conclusion facilement sans le lemme de Morse, en l'occurence.) Donc le chemin c, s'il part suffisamment près de $(1,0)$, est borné.

Plus généralement, le niveau $f = F$ est borné si et seulement si $F < 0$ (figure 2). Donc, si $f(x(0),x'(0)) < 0$, c est borné. Réciproquement, supposons que $f(x(0),x'(0)) \geqslant 0$. On vérifie que le chemin c n'a pas de point critique (parce que c ne passe pas par $(x,y) = (1,0)$, où f vaut $-1/2$). Donc c est non borné, et x non plus.

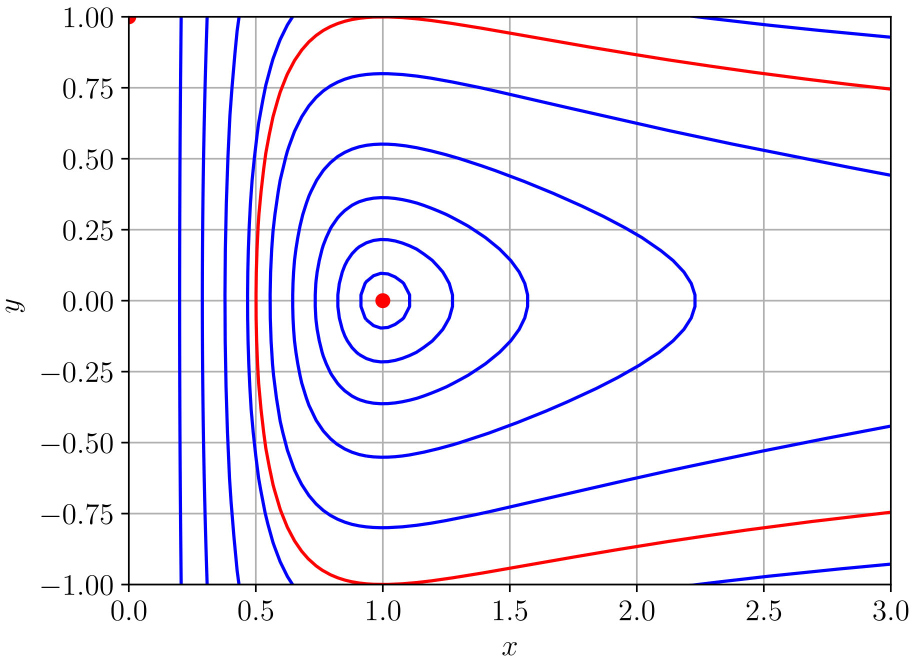

Figure 2. Courbes de niveau de la fonction f. En rouge, le point critique de f et la courbe bordant les courbes bornées, d'équation $f = 0$.

Finalement, x est bornée si et seulement si

$$\frac{x'(0)^2}{2} + \frac{1}{2x(0)^2} - \frac{1}{x(0)} < 0.$$

4. Extrema d'une fonction. — C est l'intersection d'un cylindre et d'un plan. Cette intersection est fermée, puisque son équation

$$g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2, \quad (x,y,z) \mapsto \begin{pmatrix} x^2 + y^2 - z^2 \\ y + 2z \end{pmatrix}$$

est continue. De plus, elle est bornée, puisque, d'après la première équation, $x^2 \leqslant 1$ et $3z^2 \leqslant 1$, et, d'après la seconde, la composante $y = -2z$ est bornée aussi. Donc la fonction f, qui est continue, atteint son minimum et son maximum sur C.

Remarquons que l'équation

$$g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}, \quad (x,y,z,) \mapsto \begin{pmatrix} x^2 + y^2 - z^2 \\ y + 2z \end{pmatrix}$$

a pour dérivée
$$g'(x,y,z) = \begin{pmatrix} 2x & 2y & -2z \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix},$$
matrice qui est de rang 2 sur C (où $x \neq 0$, donc le mineur de la sous-matrice $\begin{pmatrix} 2x & 2y \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ est non nul). Donc g est une submersion en tout point de C.

Si (x,y,z) un extremum de f sur C, d'après le théorème de Lagrange il existe $(\lambda,\mu) \in L(\mathbb{R}^2,\mathbb{R})$ tel que
$$f'(x,y,z) = (\lambda\ \mu)\, g'(x,y,z).$$
On pourrait parfaitement résoudre cette équation sur C, mais nous allons procéder de façon légèrement plus simple.

La seconde équation de C permet en effet d'éliminer $y = -2z$ immédiatement, de sorte qu'on est ramené à chercher les extrema de la fonction de deux variables
$$F : (x,z) \mapsto x + y + z|_{y=-2z} = x - z$$
sur la courbe
$$C' \ : \ G(x,z) := x^2 + y^2 - z^2|_{y=-2z} = x^2 + 3z^2 = 1,$$
le long de laquelle G est une submersion. En un tel extremum, d'après le théorème de Lagrange il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que
$$F'(x,z) = \frac{\lambda}{2}\, G'(x,z)$$
(nous introduisons ici un facteur 2 par simple commodité de calcul), soit
$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} x & 3z \end{pmatrix}.$$
On voit que λ, x et z ne sont pas nuls, et que
$$\frac{1}{\lambda} = x = -3z.$$
En injectant cette expression de x dans l'équation de C', on obtient
$$z = \pm\frac{1}{2\sqrt{3}},$$
puis,
$$x = -3z = \mp\frac{\sqrt{3}}{2}.$$
Par ailleurs,
$$y = -2z = \mp\frac{1}{\sqrt{3}}.$$
Donc les extrema de f sur C' sont donc parmi les deux points
$$p = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{2\sqrt{3}}\right) \quad \text{et} \quad q = \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{2\sqrt{3}}\right).$$
On voit que
$$f(p) = \frac{2}{\sqrt{3}} \quad \text{et} \quad f(q) = -\frac{2}{\sqrt{3}},$$

ce qui montre au passage que f n'est pas constante sur C (ce qui n'est pas complètement trivial). Donc f possède au moins deux extrema, à savoir un maximum et un minimum distincts. Ce sont forcément p et q, qui sont les seuls extrema possible. Donc p est le maximum et q le minimum.

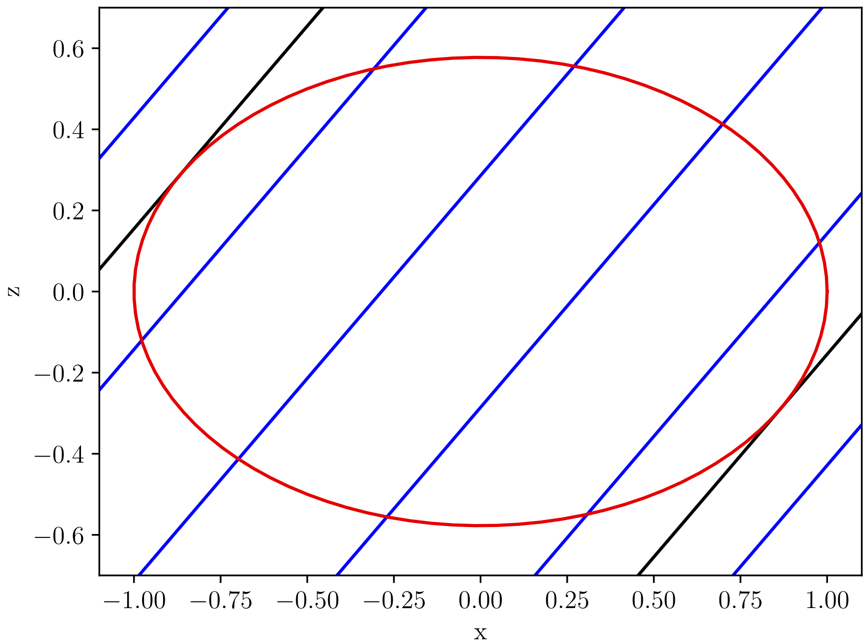

FIGURE 3. Les extrema de F sont les points de tangence des courbes de niveau de F avec l'ellipse C'

5. Étude d'une courbe singulière. — Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $(x,y) \mapsto 2xy + y^2 - x^3$ l'équation de C. Sa dérivée

$$f'(x,y) = \begin{pmatrix}\partial_x f(x,y) & \partial_y f(x,y)\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2y - 3x^2 & 2(x+y)\end{pmatrix}$$

s'annule en deux points : $(0,0)$ et $(-2/3,2/3)$, mais, puisque

$$f(0,0) = 0 \quad \text{et} \quad f(-2/3,2/3) = -\frac{4}{27} \neq 0,$$

seul le premier est sur C. Donc l'équation f de C est une submersion en tout point de $C\backslash\{(0,0)\}$.

Soit $(x,y) \in C\backslash\{(0,0)\}$. Comme f est une submersion en (x,y), C est une courbe au voisinage de (x,y) et sa tangente en (x,y) est le noyau de $f'(x,y)$, qui a pour équation

$$f'(x,y) \cdot (\xi,\eta) = 0,$$

soit

$$(2y - 3x^2)\xi + 2(x+y)\eta = 0.$$

En $(0,0)$, il faut tenir compte des termes quadratiques de f. En complétant les carrés, on voit que

$$f(x,y) = x^2 - (x+y)^2 + x^3.$$

Si l'on pose $\varphi : (x_1,y_1) \mapsto (x_1,y_1 - x_1)$, on a donc

$$f \circ \varphi(x_1,y_1) = x_1^2 - y_1^2 + x_1^3.$$

Donc d'après le lemme de Morse, il existe un C^∞-difféomorphisme ψ : $(\mathbb{R}^2,0) \circlearrowleft$ tangent à l'identité, tel que

$$f \circ \varphi \circ \psi(x_2,y_2) = x_2^2 - y_2^2.$$

L'ensemble C d'équation $f = 0$ est l'image par $\varphi \circ \psi$ de l'ensemble d'équation $x_2^2 - y_2^2 = 0$, union des deux droites $y_2 = \pm x_2$. L'image de ces deux droites par ψ est l'union de deux courbes ayant pour droites tangentes les droites d'équation $y_1 = \pm x_1$. L'image de ces deux courbes par φ est l'union C de deux nouvelles courbes ayant pour droites tangentes les droites passant par l'origines et dirigées respectivement par les vecteurs images par $\varphi'(0,0) = \varphi = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ de $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ et de $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$, soit $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$. Les deux droites tangentes ont donc pour équations respectives

$$y = 0 \quad \text{et} \quad y = -2x.$$

On a dessiné C sur la figure 4 (ce qui n'était pas demandé).

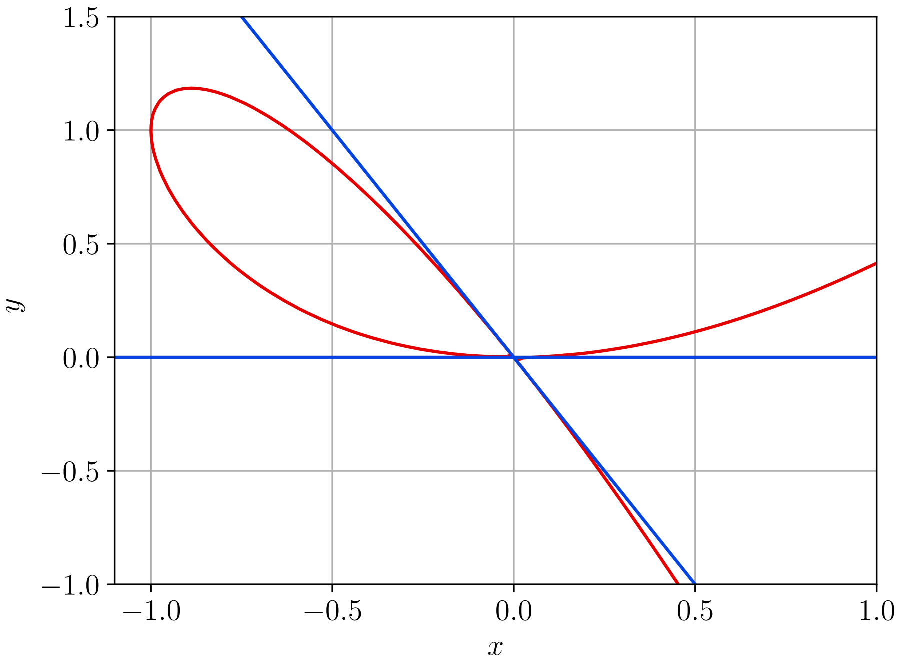

FIGURE 4. La courbe singulière $2xy + y^2 - x^3 = 0$ et ses tangentes à l'origine