Université Paris-Dauphine
J. Féjoz

Calcul différentiel et optimisation
Janvier 2017

Examen

Deux heures — Sans document ni appareil électronique.
Toutes les réponses doivent être justifiées mais ***concises****.*
Mentionner sur la copie les erreurs d'énoncé éventuelles.

1. Dérivée de l'inversion des matrices (3 points). — Calculer la dérivée de l'application $\mathcal{I} : Gl_n(\mathbb{R}) \circlearrowleft$, $M \mapsto M^{-1}$.

2. Résolution approchée d'une équation (5 points). — Donner une valeur approchée de la solution, proche de 1, de l'équation

$$x^7 + 0{,}99\,x - 2{,}03 = 0,$$

en calculant le développement limité au premier ordre de la fonction $x(p,q)$ définie implicitement par l'équation $x^7 + px + q = 0$ au voisinage de $(x,p,q) = (1,1,-2)$. Bonus : Donner une méthode pour majorer l'erreur ainsi commise (on pourra déjà montrer que la solution exacte vérifie $1 \leqslant x \leqslant 2$).

3. Une équation linéaire (5 points). — Soient $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ une fonction nulle en 0 et $f_0 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction paire, toutes deux de classe C^1. Trouver l'expression de la fonction $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ de classe C^1 telle que

$$-y\,\partial_x f(x,y) + x\,\partial_y f(x,y) = g(x,y) \quad \text{et} \quad f(x,0) = f_0(x) \quad (\forall x,y),$$

en supposant qu'elle existe ; on pourra chercher f en coordonnées polaires (r,θ) (avec $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$). Cette solution existe-t-elle si $g(x,y) = 1$ (pour tous x,y) ? Bonus : Si $g(x,y) = xy$ (sans omettre de vérifier le caractère C^1 de f) ?

4. Inégalité de Hadamard (5 points). — Montrer que, pour tous vecteurs $x_1,\dots,x_n \in \mathbb{R}^n$,

$$|\det(x_1,\dots,x_n)| \leqslant \|x_1\| \cdots \|x_n\|,$$

où $\|\cdot\|$ est la norme euclidienne de $\mathbb{R}^n$; on pourra commencer par montrer que, si $x_2,\dots,x_n$ est une famille libre donnée et si x_1 est un maximum de la fonction $\mathbb{S}^{n-1} \to \mathbb{R}$, $\xi \mapsto \det(\xi,x_2,\dots,x_n)$, x_1 est orthogonal à x_2, ..., x_n, puis en déduire les maxima de $\det(x_1,\dots,x_n)$ lorsque $x_1,\dots,x_n \in \mathbb{S}^{n-1}$.

5. Facteur intégrant (5 points). — Soit

$$v : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \quad (t,x) \mapsto 2t(x - \cos t) - \sin t.$$

Montrer qu'il existe une fonction f de classe C^∞ sur $\mathbb{R}^2$ telle que $v = -\frac{\partial_t f}{\partial_x f}$; on pourra chercher f telle que $\partial_x f(t,x) = e^{-t^2}$ $(\forall t,x)$. En déduire qu'il existe une unique fonction x sur $\mathbb{R}$ de classe C^∞, 2π-périodique, et telle que $x'(t) = v(t,x(t))$ pour tout t ; on pourra remarquer que l'image du chemin $t \mapsto (t,x(t))$ est incluse dans une courbe de niveau de f.

Solution. —

1. Dérivée de l'inversion des matrices. — Si M est inversible et H assez petite pour que $M + H$ elle-même soit inversible,

$$(M + H)^{-1} = M^{-1}(I + HM^{-1})^{-1}.$$

Quitte éventuellement à prendre H encore plus petite, la série

$$\sum_{k\geqslant 0}(-1)^k(HM^{-1})^k$$

converge absolument, et alors

$$(M + H)^{-1} = M^{-1}\left(I - HM^{-1} + o(H)\right),$$

donc l'application d'inversion $\mathcal{I} : M \mapsto M^{-1}$ est dérivable et

$$\mathcal{I}(M) \cdot H = -M^{-1}HM.$$

(Par récurrence, on peut en déduire que $\mathcal{I}$ est de classe C^∞.)

2. Résolution approchée d'une équation. — La fonction

$$f : (\mathbb{R}^3,(X,P,Q) = (1,1,-2)) \to (\mathbb{R},0), \quad (x,p,q) \mapsto x^7 + px + q$$

croît strictement avec x, et possède une unique racine réelle $x(p,q)$, d'après le théorème des valeurs intermédiaires. D'après le théorème des fonctions implicites, puisque $\partial_x f(X,P,Q) = 7X^6 + P = 8 > 0$, cette fonction $(p,q) \mapsto x(p,q)$ est de classe C^∞. La formule de Taylor au premier ordre nous dit

$$\begin{aligned} x(p,q) = {} & \partial_p x(P,Q)\,\delta p + \partial_q x(P,Q)\,\delta q + \\ & \int_0^1 (1-t)\left(\partial_p^2 x(z_t)\,\delta p^2 + \partial_q^2 x(z_t)\,\delta q^2 + 2\partial_p\partial_q x(z_t)\,\delta p\,\delta q\right) dt, \end{aligned}$$

avec $\delta p = p - P = -0{,}01$, $\delta q = q - Q = -0{,}03$ et $z_t = (P + t\,\delta p, Q + t\,\delta q)$. La partie principale donne la valeur approchée de la solution et le reste intégral donne l'erreur commise, à majorer. Calculons donc les dérivées partielles de la fonction implicite. Par une première dérivation de l'équation, on obtient

$$\begin{cases} \partial_p x(P,Q) = -\frac{X}{7X^6+P} = -\frac{1}{8} \\ \partial_q x(P,Q) = -\frac{1}{7X^6+P} = -\frac{1}{8}. \end{cases}$$

Donc

$$x(0{,}99; -2{,}03) \sim x(P,Q) + \frac{0{,}01}{8} + \frac{0{,}01}{8} = 1{,}005.$$

Estimation de l'erreur : Notons R le terme de reste intégral. En dérivant l'équation implicite une seconde fois, on trouve l'expression des dérivées partielles secondes de $(p,q) \mapsto x(p,q)$, en fonction de x, p et q. Pour majorer R, il suffit donc d'une estimation a priori de $x(p,q)$, ce qu'on obtient en remarquant que

$$f(1; p; q) = -0{,}04 < 0 < f(2; p; q) = 123{,}99$$

donc que $1 < x(p,q) < 2$, etc.

3. Une équation linéaire. — Soit f une fonction vérifiant les conditions requises. En composant l'équation aux dérivées partielles à droite par $\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $(r,\theta) \mapsto (x,y)$, on obtient

$$r\,(-\sin\theta\,\partial_x f\circ\varphi + \cos\theta\,\partial_y f\circ\varphi) = g\circ\varphi;$$

cette équation est équivalente à l'équation voulue parce que φ est surjective.

Soit F la fonction sur $\mathbb{R}^2$ définie par ce diagramme :

$$\begin{tikzcd}
(r,\theta) \arrow[r, mapsto, "\varphi"] \arrow[dr, mapsto, "F"'] & (x,y) = (r\cos\theta, r\sin\theta) \arrow[d, mapsto, "f"] \\
& f(x,y) = F(r,\theta)
\end{tikzcd}$$

On a $F(r,\theta) = f(r\cos\theta, r\sin\theta)$, donc

$$\begin{cases} \partial_r F = \cos\theta\,\partial_x f\circ\varphi + \sin\theta\,\partial_y f\circ\varphi \\ \partial_\theta F = r\,(-\sin\theta\,\partial_x f\circ\varphi + \cos\theta\,\partial_y f\circ\varphi)\,. \end{cases} \tag{1}$$

Donc l'équation aux dérivées partielles satisfaite par f équivaut à

$$\partial_\theta F = G := g\circ\varphi.$$

Dans cette équation, r est fixé et joue le rôle d'un paramètre ; on peut intégrer par rapport à θ ; la formule fondamentale du calcul différentiel dit alors que

$$F(r,\theta) = F(r,0) + \int_0^\theta g\circ\varphi\,(r,t)\,dt = f_0(r) + \int_0^\theta g\circ\varphi\,(r,t)\,dt. \tag{2}$$

Donc F est uniquement déterminée par les données du problème. Mais F, de part sa construction, doit être 2π-périodique par rapport à θ, condition satisfaite si et seulement si

$$\int_0^{2\pi} g(r\cos t, r\sin t)\,dt = 0 \quad (\forall r \geqslant 0). \tag{3}$$

Si l'équation (3) est violée, le problème n'a pas de solution. C'est le cas notamment si $g \equiv 1$.

Si en revanche cette équation est satisfaite, comme c'est le cas si $g(x,y) = xy$, on définit F par la formule (2). Ensuite, on pose d'abord $f(0,0) = f_0(0)$. Au voisinage d'un point (r_0,θ_0) tel que $r_0 \neq 0$, φ est un difféomorphisme local et l'on pose

$$f = F\circ\varphi^{-1}$$

au voisinage de $(x_0,y_0) = \varphi(r_0,\theta_0)$. Si (r_1,θ_1) est une autre détermination de $\varphi^{-1}(x_0,y_0)$, c'est-à-dire si $\varphi(r_1,\varphi_1) = (x_0,y_0)$, on a $\varphi_1 = \varphi_0 \pmod{2\pi}$, donc, comme F est 2π-périodique par rapport à θ, la formule ci-dessus définit bien une fonction f en dehors de l'origine.

La fonction f ainsi définie est-elle de classe C^1 ? On veut vérifier que les dérivées partielles, solutions du système linéaire (1), sont continues. Comme le déterminant du système vaut r, la seule difficulté est en $r = 0$.

D'après l'hypothèse, $g(0,0) = 0$. Donc, d'après la formule de Taylor, $g \circ \varphi$ est de la forme

$$g \circ \varphi(r,\theta) = rG(r,\theta),$$

où G est la fonction de classe C^0 définie par

$$G(r,\theta) = \int_0^1 \frac{\partial}{\partial r}\left(g \circ \varphi\,(\theta,sr)\right)\,ds.$$

Donc

$$F(r,\theta) = f_0(r) + r\int_0^\theta G(r,t)\,dt,$$

donc $\partial_\theta F$ est divisible par r, au sens que $\frac{1}{r}\partial_\theta F$ est continue. Donc les dérivées partielles de f sont les solutions d'un système linéaire continu et de déterminant 1, donc sont elles-même continues de (r,θ), mais pas forcément en fonction de x et y.

Dans le cas de $g(x,y) = xy$,

$$F(r,\theta) = f_0(r) - \frac{r^2}{4}(\cos 2\theta - 1) = f_0(r) + \frac{r^2}{2}\sin^2\theta,$$

donc

$$f(x,y) = f_0(\sqrt{x^2+y^2} + \frac{y^2}{2}.$$

Donc f n'est pas de classe C^1.

4. Inégalité de Hadamard. — Le déterminant, qui est continu, atteint ses bornes sur le compact $(\mathbb{S}^{n-1})^n$. Déterminons ses maxima, sachant que sa valeur maximum est $\geqslant 1$ puisque le déterminant de la base canonique de $\mathbb{R}^n$ vaut 1.

Soit x_1 un maximum de la fonction

$$f : \mathbb{S}^{n-1} \to \mathbb{R}, \quad \xi \mapsto \det(\xi,\hat{x}),$$

$\hat{x} := (x_2,\dots,x_n)$ étant fixé. On peut supposer libre la famille $\hat{x} = (x_2,\dots,x_n)$, sans quoi f est identiquement nulle.

Soit de plus $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $x_1 \mapsto \frac{1}{2}\|x_1\|^2$, de sorte que $\mathbb{S}^{n-1}$ ait pour équation (submersive) $g = \frac{1}{2}$. Il existe une forme linéaire $\lambda \in \mathbb{R}^* \equiv \mathbb{R}$ telle que

$$f'(x_1)\cdot\xi = \lambda \cdot g'(x_1)\cdot\xi \quad (\forall \xi \in \mathbb{R}^n).$$

Comme $\det(x_1,\hat{x})$ est linéaire par rapport à x_1

$$f'(x_1)\cdot\xi = \det(\xi,\hat{x}).$$

De plus,

$$g'(x_1)\cdot\xi = 2x_1\cdot\xi \quad \text{(produit scalaire)}.$$

Donc, pour tout ξ,

$$\det(\xi,\hat{x}) = \lambda\, x_1\cdot\xi.$$

En prenant $\xi = x_1$, on voit que

$$\lambda = \det(x_1,\hat{x}).$$

Si cette quantité est nulle, ceci signifie que $f(x_1,\ldots,x_n) = 0$, et $(x_1,\ldots,x_n)$ n'est pas un maximum de f. Supposons-la donc non nulle. En prenant maintenant $\xi = x_i$, $i = 2,\ldots,n$, on voit que

$$0 = x_1 \cdot x_i,$$

c'est-à-dire que x_1 est orthongonal à $x_2,\ldots,x_n$.

En répétant l'argument pour chaque variable, on voit par récurrence que, en un maximum de f sur $(\mathbb{S}^{n-1})^n$, les x_i forment une famille orthonormale. Réciproquement, si x est une base orthonormale de $\mathbb{R}^n$, son déterminant vaut ± 1 selon son orientation : x est donc un maximum (resp. un minimum) si c'est une base directe (resp. indirecte).

On en déduit l'inégalité d'Hadamard dans le cas général par multilinéarité du déterminant :

$$\det(x_1,\ldots,x_n) = \|x_1\| \cdots \|x_n\| \det\left(\frac{x_1}{\|x_1\|},\ldots,\frac{x_n}{\|x_n\|}\right) \leqslant \|x_1\| \cdots \|x_n\|.$$

5. Facteur intégrant. — *Remarque 1 :* La réponse à l'exercice est triviale en remarquant que les solutions de l'équation $x'(t) = v(t,x(t))$ sont de la forme

$$x(t) = \cos t + Ce^t, \quad C \in \mathbb{R}.$$

L'intérêt de la méthode proposée réside en fait dans des cas plus compliqués.

Remarque 2 : Il n'existe pas de fonction f de classe C^∞ telle que $v = -\frac{\partial_t f}{\partial_x f}$ et $\partial_x f = 1$, par exemple, parce qu'alors on n'aurait pas $\partial_{xt} f = \partial_{tx} f$. Mais on voit qu'on a le choix de mutiplier numérateur et dénominateur, dans la fraction $\frac{v(t,x)}{1}$, par une fonction arbitraire, pour trouver f. Ce facteur arbitraire s'appelle un *facteur intégrant.* Ici, on va voir que le facteur e^{-t^2} convient. (1)

Cherchons donc f comme suggérée telle que $\partial_x f(t,x) = e^{-t^2}$, soit $f(t,x) = x\,e^{-t^2} + \varphi(t)$ pour une certaine fonction φ de classe C^∞. Alors φ doit vérifier

$$\begin{aligned}\partial_t f(t,x) &= -2txe^{-t^2} + \varphi'(t)\\ &= e^{-t^2}\left(2t(x-\cos t) - \sin t\right),\end{aligned}$$

soit

$$\varphi'(t) = e^{-t^2}(2t\cos t + \sin t),$$

soit, à une constante additive inesstentielle prêt,

$$\varphi(t) = -e^{t^2}\cos t.$$

On peut donc poser

$$f(t,x) = e^{-t^2}\left(x - \cos t\right),$$

1. Dans le langage des formes différentielles, ceci revient à dire que la forme $dx + v\,dt$ n'est pas fermée, mais que $e^{-t^2}\,(dx + v\,dt)$, qui a même noyau, l'est.

et l'on vérifie, au cas où l'on n'en soit pas déjà convaincu, que l'on a bien
$$v = -\frac{\partial_t f}{\partial_x f}.$$

Soit x une solution 2π-périodique de l'équation différentielle
$$x'(t) = v(t,x(t)).$$
Alors, comme une simple dérivation par rapport à t le montre, la fonction $t \mapsto f(t,x(t))$ est constante sur $\mathbb{R}$; géométriquement, l'image du chemin $t \mapsto (t,x(t))$ est incluse dans une courbe de niveau de f. Comme x est supposée 2π-périodique, la courbe de niveau correspondante doit être invariante par les translations $(t,x) \mapsto (t+2\pi,x)$. Or, f ne possède qu'une seule telle courbe de niveau : c'est celle de valeur nulle, d'équation $x = \cos t$.

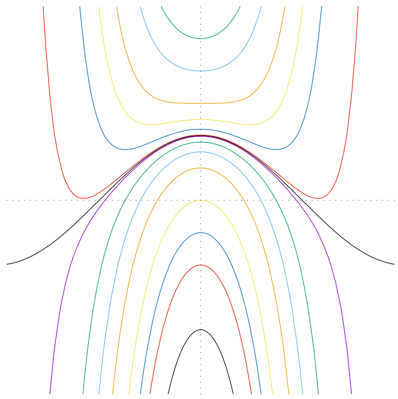

FIGURE 1. Courbes de niveau de la fonction $f(x,y) = e^{-t^2}(x - \cos t)$

Réciproquement, la fonction $x(t) = \cos t$ est bien une solution périodique de l'équation différentielle voulue, puisque
$$x'(t) = -\sin t = 2t(x(t) - \cos t) - \sin t.$$