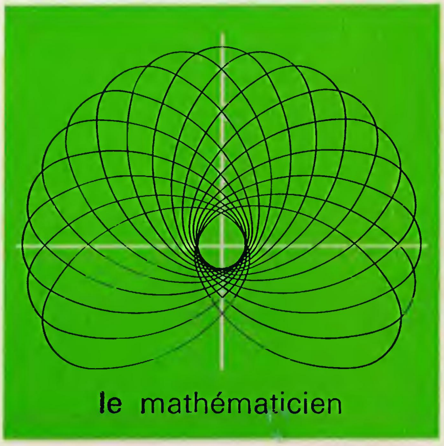
COLLECTION SUP

ivar ekeland

la théorie des jeux

et ses applications à l'économie mathématique



PRESSES UNIVERSITAIRES DE FRANCE

La théorie des jeux occupe au sein des mathématiques de la décision une place prépondérante. Point de domaine de la recherche opérationnelle, du contrôle optimal ou de l'économie mathématique où elle ne fasse sentir son influence. C'est qu'en dépit de ses imperfections, elle reste le seul moyen rigoureux et formalisé d'appréhender les situations de conflit.

Cet ouvrage donne une vue synthétique et concise de la théorie et s'oriente très rapidement vers ses applications à l'économie mathématique. C'est le fruit d'un enseignement pluridisciplinaire de plusieurs années à l'Université de Paris IX-Dauphine.

On y trouvera aussi bien des exemples élémentaires destinés à faire comprendre la signification économique des concepts mis en œuvre, que des théorèmes difficiles, destinés à montrer leur fécondité mathématique.

Ivar Ekeland, ancien élève de l'Ecole Normale Supérieure, est actuellement maître de conférences à l'Université de Paris IX et à l'Ecole Polytechnique.

22224012 / 4 / 74

La théorie des jeux
et ses applications
à l'économie mathématique

LE MATHÉMATICIEN

SECTION DIRIGÉE PAR JEAN-PIERRE KAHANE

12

COLLECTION SUP

La théorie des jeux

et ses applications à l'économie mathématique

IVAR EKELAND

Ancien élève de l'Ecole Normale Supérieure
Maître de conférences à l'Université de Paris IX
Maître de conférences à l'Ecole Polytechnique

PRESSES UNIVERSITAIRES DE FRANCE

1974

A la mémoire de mon père

Dépôt légal. — 1re édition : 4e trimestre 1974

Introduction

La théorie des jeux a d'abord été l'étude des jeux de société. Ceux-ci ont suscité au cours des siècles de nombreux problèmes mathématiques, dont le plus célèbre est sans doute le problème des partis, posé à Pascal par le chevalier de Méré. Il revenait à von Neumann de donner à la théorie des jeux ses lettres de noblesse, en lui assignant pour objet les formes générales du conflit et de la coopération, et en lui conférant le statut d'auxiliaire privilégié des sciences humaines. Quelles sont en effet les situations économiques ou sociologiques qui ne relèvent pas de l'un ou de l'autre ?

Nous définissons actuellement la théorie des jeux comme l'étude formelle des situations où plusieurs personnes ont à prendre des décisions dont dépend un résultat qui les concerne. Elle élabore des modèles mathématiques de situations concrètes, modèles qui doivent être pertinents pour rendre compte de la réalité, et suffisamment riches pour permettre des conclusions intéressantes. Le plus bel exemple en est le modèle de von Neumann, décrivant les jeux de somme nulle à deux personnes, et aboutissant au théorème du minimax. La théorie des jeux partage avec la théorie de l'optimisation et la théorie de la décision sa démarche et ses méthodes. Leur essor a d'ailleurs été parallèle, suivant le développement récent de l'économie et de la gestion. Elle se différencie par la pluralité des centres de décision, leurs appréciations divergentes d'une même situation, et leurs interactions sur le terrain.

Nous présentons ici cette branche récente de la théorie des jeux qui a choisi l'analyse fonctionnelle comme outil et l'économie comme champ d'applications. Sans chercher à être exhaustif, nous avons choisi les résultats les plus significatifs, c'est-à-dire ceux qui sont mathématiquement les plus profonds, et qui serrent le mieux la réalité économique. Nous espérons ainsi convaincre l'étudiant que les meilleures mathématiques ne sont pas les moins *appliquées, et montrer au praticien combien le formalisme mathématique peut redonner de tranchant à des concepts économiques depuis longtemps classiques. La lecture de cet ouvrage nécessite des éléments de topologie générale et d'algèbre linéaire, ainsi qu'une certaine habitude du raisonnement formel, tels que l'on peut les acquérir dans les premiers cycles mathématiques de l'enseignement supérieur. Il sera en outre fait appel à quelques éléments de la théorie des « espaces de Banach », particulièrement au théorème de Hahn-Banach, qui sera énoncé en appendice.*

L'ouvrage est divisé en deux parties. Le premier chapitre, consacré aux jeux non coopératifs, est centré sur le concept d'équilibre. On démontre les deux théorèmes fondamentaux d'existence d'équilibres pour les jeux à n personnes, l'un concernant les jeux finis à information complète, l'autre les jeux topologiques. Puis l'on passe aux jeux de somme nulle à deux personnes en présentant la théorie de von Neumann et la forme moderne du théorème du minimax. Quelques exemples permettent d'illustrer cette théorie et de faire comprendre la notion de stratégie mixte. Enfin, on montre comment les résultats fondamentaux en programmation convexe se déduisent du théorème du minimax, jetant ainsi un pont entre la théorie de l'optimisation et la théorie des jeux.

Le deuxième chapitre, consacré aux jeux coopératifs, est centré sur le concept de noyau. On démontre le théorème fondamental de non-vacuité du noyau, dans le cas des jeux avec paiements latéraux, puis dans le cas des jeux sans paiements latéraux. Puis on applique ces résultats à l'étude des économies d'échange : ils permettent d'affiner la notion d'équilibre de Walras, et d'en préciser les conditions d'existence. La boîte d'Edgeworth permet d'illustrer simplement cette théorie. On termine par une présentation rapide des notions de nucléole et de solution de von Neumann.

Ce livre s'inspire d'un cours de 3^e^ cycle professé par l'auteur à l'Université Paris IX Dauphine. Il incorpore nombre de résultats originaux obtenus par l'équipe de recherches de Mathématiques de la Décision, particulièrement par J.-P. Aubin.

CHAPITRE PREMIER

Jeux non coopératifs

1. Formes normales. Stratégies. Equilibres

Au cours de ce chapitre, nous étudierons le modèle suivant. Le joueur i se fixe une politique σ_i, c'est-à-dire que sa décision est prise à l'avance pour toute situation intermédiaire où il peut avoir à intervenir. Si les n joueurs ont adopté n politiques $\sigma_1, \ldots, \sigma_n$, l'évolution du jeu ne dépend plus que de la nature, et est appréciée diversement par chacun d'eux. En particulier, le joueur i lui attache une valeur qu'il chiffre par $G_i(\sigma_1, \ldots, \sigma_n)$. Ainsi on peut dire que l'objectif du joueur i sera de maximiser $G_i(\sigma_1, \ldots, \sigma_n)$, la difficulté étant que cela dépend non seulement de son choix σ_i, mais des politiques des $(n - 1)$ autres joueurs, qui poursuivent leurs objectifs propres. Avant de donner un exemple, formalisons ce modèle :

Définition 1.1. *On appelle jeu à n joueurs sous forme normale la donnée de n ensembles* Σ_i, *ensemble des stratégies du joueur i,* $1 \leqslant i \leqslant n$, *et de n applications* G_i *de* $\prod_{i=1}^{n} \Sigma_i$ *dans* $\mathbf{R}$, *fonction de gain du joueur i,* $1 \leqslant i \leqslant n$.

Nous interdirons dorénavant toute coopération entre les joueurs. Il est clair que l'union fait la force, et qu'une coalition de joueurs peut apporter beaucoup d'avantages à ses membres. C'est ici exclu, soit parce que les joueurs ne communiquent pas, soit parce que leurs intérêts sont inconciliables. Le joueur i choisira donc sa stratégie σ_i sans connaître les choix de ses partenaires. Dans ces conditions, certaines situations apparaissent comme privilégiées :

DÉFINITION. *Un n-uple de stratégies* $(\bar{\sigma}_1, \ldots, \bar{\sigma}_n)$ *est dit en équilibre si :*

$$\forall i, \forall \sigma_i \in \Sigma_i, \quad G_i(\bar{\sigma}_1, \ldots, \sigma_i, \ldots, \bar{\sigma}_n) \leqslant G_i(\bar{\sigma}_1, \ldots, \bar{\sigma}_i, \ldots, \bar{\sigma}_n).$$

Un équilibre est donc une situation où chaque joueur se trouve avoir joué au mieux, pour son propre critère et en considérant comme fixés les choix des autres. C'est donc une situation qui est stable, dans la mesure où aucun joueur, même si les stratégies de ses adversaires lui sont révélées, ne désirera la modifier.

Il n'existe malheureusement pas toujours d'équilibre. Nous allons commencer par illustrer ces notions à l'aide des jeux finis à information complète, avant de donner le théorème général d'existence d'un équilibre.

2. Jeux a information complète

Beaucoup de jeux de société se jouent coup par coup, selon le schéma suivant. L'état initial du jeu, S_0, est donné. L'état suivant du jeu, S_1, est choisi par le joueur 1 parmi un ensemble fini $\mathscr{S}_1$ de possibilités. Pour chaque $S_1 \in \mathscr{S}_1$, la règle du jeu précise un joueur i qui choisira l'état suivant S_2 parmi un ensemble fini $\mathscr{S}_2$ de possibilités. Et ainsi de suite. On se donne en outre un certain nombre de situations finales $\mathscr{F}$, et pour chaque $S \in \mathscr{F}$, le gain $g_i(S)$, $1 \leqslant i \leqslant n$, revenant à chaque joueur. Le jeu est terminé lorsqu'une situation finale est atteinte, et on postule que cela a nécessairement lieu en un nombre fini de coups : aucune partie ne peut durer indéfiniment.

Avant le début de la partie, le joueur i recensera toutes les situations où il peut être appelé à jouer; il y en a un ensemble fini $\mathscr{J}_i$. Pour chaque $S \in \mathscr{J}_i$, il choisira un successeur $\sigma_i(S)$ permis par la règle. C'est la collection des $\sigma_i(S)$, $S \in \mathscr{J}_i$, qui constitue une stratégie du joueur i. Si les n joueurs ont choisi leurs n stratégies $\sigma_1, \ldots, \sigma_n$, le déroulement de la partie est parfaitement déterminé. Elle aboutit à une situation finale $S_F(\sigma_1, \ldots, \sigma_n) \in \mathscr{F}$, et on pose naturellement :

$$g_i(S_F(\sigma_1, \ldots, \sigma_n)) = G_i(\sigma_1, \ldots, \sigma_n).$$

On s'est donc ramené au modèle précédent : tout jeu fini à information complète peut se mettre sous forme normale.

Théorème 2.1. *Tout jeu fini à information complète admet un équilibre.*

Démonstration. Elle se fait par récurrence sur la longueur ℓ du jeu, c'est-à-dire sur la durée maximale d'une partie. Si $\ell = 1$, il n'y a qu'un coup, et le joueur 1 choisira un S_1 qui maximise g_1 sur $\mathscr{S}_1$, les autres joueurs n'intervenant pas dans le résultat.

Supposons le théorème démontré jusqu'à $\ell - 1$ et montrons-le pour ℓ.

Soient $S \in \mathscr{J}_i \cap \mathscr{S}_{\ell-1}$, $S \notin \mathscr{F}$. C'est-à-dire qu'il reste un seul coup à jouer, lequel revient au joueur i. Celui-ci choisira $\bar{\sigma}_i(S)$ de façon à maximiser g_i. On pose alors $g'_j(S) = g_j(\bar{\sigma}_i(S))$, $1 \leqslant j \leqslant n$.

Considérons alors le jeu qui se termine sur :

$$\mathscr{F}' = \mathscr{F} \cup \mathscr{S}_{\ell-1}$$

le gain étant $g_j(\mathrm{S})$ si $\mathrm{S} \in \mathscr{F}$ et $g'_j(\mathrm{S})$ sinon, $1 \leqslant j \leqslant n$. C'est un jeu de longueur $\ell - 1$; soit donc $(\bar{\sigma}'_1, \ldots, \bar{\sigma}'_n)$ un équilibre. On lui associe un n-uple de stratégies $(\bar{\sigma}_1, \ldots, \bar{\sigma}_n)$ du jeu entier par $\bar{\sigma}_i(\mathrm{S}) = \bar{\sigma}'_i(\mathrm{S})$ si $\mathrm{S} \notin \mathscr{S}_{\ell-1}$, $\bar{\sigma}_i$ étant déjà défini directement sur $\mathscr{S}_{\ell-1}$. Montrons donc que $(\bar{\sigma}_1, \ldots, \bar{\sigma}_n)$ est un équilibre.

Supposons que le joueur i adopte une autre stratégie σ_i, et notons σ'_i la stratégie tronquée aux $(\ell - 1)$ premiers coups. Si la partie $(\bar{\sigma}_1, \ldots, \sigma_i, \ldots, \bar{\sigma}_n)$ dure moins de ℓ coups, on a :

$$\mathrm{G}_i(\bar{\sigma}_1, \ldots, \sigma_i, \ldots, \bar{\sigma}_n) = \mathrm{G}'_i(\bar{\sigma}'_1, \ldots, \sigma'_i, \ldots, \bar{\sigma}'_n). \tag{1}$$

Comme on a un équilibre pour le jeu tronqué à $(\ell - 1)$ coups :

$$\mathrm{G}'_i(\bar{\sigma}'_1, \ldots, \sigma'_i, \ldots, \bar{\sigma}'_n) \leqslant \mathrm{G}_i(\bar{\sigma}'_1, \ldots, \bar{\sigma}'_i, \ldots, \bar{\sigma}'_n). \tag{2}$$

Par construction enfin :

$$\mathrm{G}'_i(\bar{\sigma}'_1, \ldots, \bar{\sigma}'_i, \ldots, \bar{\sigma}'_n) = \mathrm{G}_i(\bar{\sigma}_1, \ldots, \bar{\sigma}_i, \ldots, \bar{\sigma}_n). \tag{3}$$

Si maintenant la partie $(\bar{\sigma}_1, \ldots, \sigma_i, \ldots, \bar{\sigma}_n)$ dure ℓ coups, soit S l'état après le $(\ell - 1)$-ième coup. Si $\mathrm{S} \in \mathscr{J}_j \cap \mathscr{S}_{\ell-1}$, avec $i \neq j$, alors l'égalité (1) subsiste. Si $\mathrm{S} \in \mathscr{J}_i \cap \mathscr{S}_{\ell-1}$, alors $g_i(\bar{\sigma}_i(\mathrm{S})) \geqslant g_i(\sigma_i(\mathrm{S}))$ par construction, si bien que l'égalité (1) se transforme en inégalité :

$$\mathrm{G}_i(\bar{\sigma}_1, \ldots, \sigma_i, \ldots, \bar{\sigma}_n) \leqslant \mathrm{G}'_i(\bar{\sigma}'_1, \ldots, \sigma'_i, \ldots, \bar{\sigma}'_n). \tag{1'}$$

En ajoutant (1) ou (1′), (2) et (3), on a pour tout i :

$$\mathrm{G}_i(\bar{\sigma}_1, \ldots, \sigma_i, \ldots, \bar{\sigma}_n) \leqslant \mathrm{G}_i(\bar{\sigma}_1, \ldots, \bar{\sigma}_i, \ldots, \bar{\sigma}_n). \blacksquare \tag{4}$$

La méthode de démonstration est constructive, et s'applique en particulier au jeu d'échecs qui est un jeu fini à information complète. Cela montre bien sa force et sa faiblesse. Sa force : il existe un couple de stratégies en équilibre aux échecs, c'est-à-dire une meilleure façon de jouer pour les Blancs et pour les Noirs. Sa faiblesse : la mise en mémoire d'une stratégie, sans parler du calcul de l'équilibre, dépasse de très loin les possibilités des plus gros ordinateurs.

3. Jeux topologiques

Nous allons maintenant abandonner les jeux finis ou dénombrables, qui relèvent de méthodes de théorie des graphes, pour nous placer dans un cadre topologique : les ensembles de stratégies Σ_i seront des espaces topologiques, sur lesquels les fonctions de gain G_i posséderont certaines propriétés de continuité. Le résultat principal en ce qui concerne les jeux non coopératifs est alors le suivant :

Théorème de Nash. *Supposons que les* Σ_i, $1 \leqslant i \leqslant n$, *soient des convexes compacts et que les* G_i, $1 \leqslant i \leqslant n$

a) *soient continues sur* $\prod_{i=1}^{n} \Sigma_i$.

b) $\forall (\sigma_1, \ldots, \sigma_n), \forall i$, *l'ensemble des points de* Σ_i *où la fonction* $\tau_i \mapsto G_i(\sigma_1, \ldots, \tau_i, \ldots, \sigma_n)$ *atteint son maximum est convexe.*

Alors le jeu $(\Sigma_i, G_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ *admet au moins un équilibre.*

Les hypothèses de convexité sous-entendent que les Σ_i sont plongés dans des espaces vectoriels E_i. L'hypothèse a) est une continuité globale des fonctions G_i en $(\sigma_1, \ldots, \sigma_n)$. L'hypothèse b) est satisfaite si la fonction G_i est concave partiellement en σ_i, ou si elle atteint son maximum en σ_i en un point unique, les autres variables étant arbitrairement fixées. La démonstration de ce théorème nécessite quelques résultats importants sur les multi-applications.

La fonction $\tau_i \mapsto G_i(\sigma_1, \ldots, \tau_i, \ldots, \sigma_n)$ est continue de Σ_i dans **R**. Elle atteint donc son maximum en un ensemble compact non vide (puisque Σ_i est compact) et convexe (hypothèse b) que nous notons $M_i(\sigma_1, \ldots, \sigma_n)$.

A tout point $(\sigma_1, \ldots, \sigma_n)$ de $\prod_{i=1}^{n} \Sigma_i$, on peut ainsi faire correspondre l'ensemble non vide $\prod_{i=1}^{n} M_i(\sigma_1, \ldots, \sigma_n)$, inclus dans $\prod_{i=1}^{n} \Sigma_i$. On dit qu'on a défini une multi-application de $\prod_{i=1}^{n} \Sigma_i$ dans lui-même. Tout revient à montrer qu'elle admet un point fixe, c'est-à-dire qu'il existe $(\bar{\sigma}_1, \ldots, \bar{\sigma}_n) \in \prod_{i=1}^{n} \Sigma_i$ tel que :

$$(\bar{\sigma}_1, \ldots, \bar{\sigma}_n) \in \prod_{i=1}^{n} M_i(\bar{\sigma}_1, \ldots, \bar{\sigma}_n).$$

En effet, cela signifie exactement que :

$$\bar{\sigma}_i \in M_i(\bar{\sigma}_1, \ldots, \bar{\sigma}_n)$$

pour tout i, ou encore que la fonction :

$$\sigma_i \mapsto G_i(\bar{\sigma}_1, \ldots, \sigma_i, \ldots, \bar{\sigma}_n)$$

atteint son maximum en $\bar{\sigma}_i$, pour tout i. C'est exactement la définition de l'équilibre.

On est donc ramené à montrer l'existence d'un point fixe. Le théorème suivant a été inventé pour les besoins de la cause.

Théorème de Kakutani. *Soient* C *un convexe compact et* Γ *une multi-application à valeurs convexes compactes non vides de* C *dans* C. *Si le graphe de* Γ :

$$\{ (x, y) \in C \times C \,|\, y \in \Gamma(x) \}$$

est fermé, alors Γ *admet un point fixe* x :

$$\exists\, \bar{x} \in C : \bar{x} \in \Gamma(\bar{x}).$$

Si Γ se réduit à une application $\gamma : C \to C$, c'est-à-dire si $\Gamma(x) = \{\gamma(x)\}$ $\forall\, x \in C$, la condition de fermeture sur le graphe de Γ signifie en fait que γ est continue. On retrouve ainsi le théorème de Brouwer-Tychonov (toute application continue d'un convexe compact dans lui-même admet un point fixe), dont le théorème de Kakutani n'est qu'une extension.

Prenons maintenant $C = \prod_{i=1}^{n} \Sigma_i$ et $\Gamma = \prod_{i=1}^{n} M_i$. On est bien dans les hypothèses du théorème de Kakutani. Vérifions que le graphe de Γ est fermé.

Prenons donc une suite :

$$(\sigma_1^k, \ldots, \sigma_n^k) \in \prod_{i=1}^{n} M_i(\tau_1^k, \ldots, \tau_n^k), \qquad k \in \mathbf{N},$$

et supposons que $\sigma_i^k \to \sigma_i$ et $\tau_i^k \to \tau_i$ quand $k \to \infty$. Il s'agit de montrer que $(\sigma_1, \ldots, \sigma_n) \in \prod_{i=1}^{n} M_i(\tau_1, \ldots, \tau_n)$. Nous procéderons par l'absurde, en supposant que $\sigma_i \notin M_i(\tau_1, \ldots, \tau_n)$ pour un certain i. En d'autres termes, il existe $\sigma'_i \in \Sigma_i$ et $\varepsilon > 0$ tels que :

$$G_i(\tau_1, \ldots, \sigma'_i, \ldots, \tau_n) - G_i(\tau_1, \ldots, \sigma_i, \ldots, \tau_n) \geqslant \varepsilon. \qquad (1)$$

Mais, comme G_i est continue sur le compact $\prod_{i=1}^{n} \Sigma_i$, et donc uniformément continue, on peut choisir $k_0 \in \mathbf{N}$ assez grand pour que :

$$\forall\, k \geqslant k_0, \quad |G_i(\tau_1^k, \ldots, \sigma'_i, \ldots, \tau_n^k) - G_i(\tau_1, \ldots, \sigma'_i, \ldots, \tau_n)| \leqslant \frac{\varepsilon}{3}. \qquad (2)$$

$$\forall\, k \geqslant k_0, \quad |G_i(\tau_1^k, \ldots, \sigma_i^k, \ldots, \tau_n^k) - G_i(\tau_1, \ldots, \sigma_i, \ldots, \tau_n)| \leqslant \frac{\varepsilon}{3}. \qquad (3)$$

D'où, en ajoutant les inégalités (1), (2) et (3) :

$$\forall\, k \geqslant k_0, \quad G_i(\tau_1^k, \ldots, \sigma_i', \ldots, \tau_n^k) - G_i(\tau_1^k, \ldots, \sigma_i^k, \ldots, \tau_n^k) \geqslant \frac{\varepsilon}{3}$$

en contradiction manifeste avec le fait que :

$$\sigma_i^k \in M_i(\tau_1^k, \ldots, \tau_n^k),$$

c'est-à-dire que le maximum partiel est atteint en σ_i^k. Le graphe est donc bien fermé et la multi-application $\prod_{i=1}^{n} M_i$ a un point fixe, ce qui termine la démonstration du théorème de Nash.

L'utilité du théorème de Nash est limitée par deux écueils : tout d'abord, dans certaines situations, ce peut être beaucoup trop demander que d'exiger la continuité globale des fonctions de gain; ensuite, la démonstration ne donne ni une méthode pour construire les équilibres ni une estimation de leur nombre. Ces difficultés vont être levées dans le cas particulier que nous étudions maintenant.

4. Jeux a deux personnes de somme nulle

Dorénavant, il n'y aura plus que deux joueurs $(n = 2)$, et $G_1 + G_2 = 0$, c'est-à-dire que chacun des joueurs gagne ce que perd l'autre, ou encore que leurs intérêts sont directement opposés. Il est clair que, dans une situation aussi compétitive, toute coopération entre les joueurs est exclue. Par définition donc, un jeu à deux personnes de somme nulle sera la donnée de deux ensembles Σ_1 et Σ_2 et d'une application G de $\Sigma_1 \times \Sigma_2$ dans $\mathbf{R}$, fonction de gain du premier joueur. La fonction de gain du second joueur sera — G. En d'autres termes, le premier joueur cherche à maximiser G et le second à le minimiser. On caractérise immédiatement les équilibres :

Proposition. *Il est équivalent de dire :*

a) *le couple* $(\bar{\sigma}_1, \bar{\sigma}_2)$ *est en équilibre;*

b) $$\begin{cases} G(\bar{\sigma}_1, \bar{\sigma}_2) = \max\limits_{\sigma_1 \in \Sigma_1} G(\sigma_1, \bar{\sigma}_2) \\ G(\bar{\sigma}_1, \bar{\sigma}_2) = \min\limits_{\sigma_2 \in \Sigma_2} G(\bar{\sigma}_1, \sigma_2). \end{cases}$$

La condition b) est appelée condition de point-selle. En effet, dans le cas où Σ_1 et Σ_2 sont contenus dans **R**, le graphe de G aura la forme d'une selle en $(\bar{\sigma}_1, \bar{\sigma}_2)$, se baissant en σ_1 et se relevant en σ_2. On dit aussi que $(\bar{\sigma}_1, \bar{\sigma}_2)$ est un col. Nous allons maintenant chercher des conditions analytiques permettant de caractériser les équilibres.

A la fonction $G : \Sigma_1 \times \Sigma_2 \to \mathbf{R}$, nous associons les scalaires (éventuellement $\pm \infty$) :

$$\beta = \inf_{\sigma_2 \in \Sigma_2} \sup_{\sigma_1 \in \Sigma_1} G(\sigma_1, \sigma_2) \in \overline{\mathbf{R}}$$

$$\alpha = \sup_{\sigma_1 \in \Sigma_1} \inf_{\sigma_2 \in \Sigma_2} G(\sigma_1, \sigma_2) \in \overline{\mathbf{R}}.$$

Lemme. *On a toujours* $\beta \geqslant \alpha$.

Démonstration. En effet, $\forall \tau_1 \in \Sigma_1$, $\forall \tau_2 \in \Sigma_2$:

$$\inf_{\sigma_2 \in \Sigma_2} G(\tau_1, \sigma_2) \leqslant G(\tau_1, \tau_2) \leqslant \sup_{\sigma_1 \in \Sigma_1} G(\sigma_1, \tau_2)$$

$$\inf_{\sigma_2 \in \Sigma_2} G(\tau_1, \sigma_2) \leqslant \sup_{\sigma_1 \in \Sigma_1} G(\sigma_1, \tau_2).$$

Les variables figurant à gauche et à droite étant indépendantes, on obtient le résultat aux notations près :

$$\sup_{\tau_1 \in \Sigma_1} \inf_{\sigma_2 \in \Sigma_2} G(\tau_1, \sigma_2) \leqslant \inf_{\tau_2 \in \Sigma_2} \sup_{\sigma_1 \in \Sigma_1} G(\sigma_1, \tau_2). \blacksquare$$

DÉFINITION. *On dit que* $\bar{\sigma}_1 \in \Sigma_1$ *est un maxinf si :*

$$\inf_{\sigma_2 \in \Sigma_2} G(\bar{\sigma}_1, \sigma_2) = \beta > -\infty.$$

On dit que $\bar{\sigma}_2 \in \Sigma_2$ *est un minisup si :*

$$\sup_{\sigma_1 \in \Sigma_1} G(\sigma_1, \bar{\sigma}_2) = \alpha < +\infty.$$

L'existence d'un minisup ou d'un maxinf impose immédiatement que $\alpha = \beta \in \mathbf{R}$. Si par exemple $\bar{\sigma}_1$ est un maxinf :

$$\alpha = \sup_{\sigma_1 \in \Sigma_1} \inf_{\sigma_2 \in \Sigma_2} G(\sigma_1, \sigma_2)$$
$$\geqslant \inf_{\sigma_2 \in \Sigma_2} G(\bar{\sigma}_1, \sigma_2) = \beta.$$

L'inégalité inverse étant toujours vérifiée, on a donc l'égalité. On a la caractérisation suivante :

PROPOSITION. *Il est équivalent de dire :*

a) $\bar{\sigma}_1 \in \Sigma_1$ *est un maxinf,* $\bar{\sigma}_2 \in \Sigma_2$ *est un minisup et* $\alpha = \beta = v$.
b) $(\bar{\sigma}_1, \bar{\sigma}_2)$ *est un équilibre et* $G(\bar{\sigma}_1, \bar{\sigma}_2) = v$.

On appelle v *la valeur du jeu.*

Démonstration.

a) $\Rightarrow$ b). On a :

$$G(\bar{\sigma}_1, \bar{\sigma}_2) \geqslant \inf_{\sigma_2 \in \Sigma_2} G(\bar{\sigma}_1, \sigma_2) = \beta = v$$
$$G(\bar{\sigma}_1, \bar{\sigma}_2) \leqslant \sup_{\sigma_1 \in \Sigma_1} G(\sigma_1, \bar{\sigma}_2) = \alpha = v.$$

D'où $G(\bar{\sigma}_1, \bar{\sigma}_2) = v$, et la condition de point-selle est satisfaite.

b) $\Rightarrow$ a). On a :

$$\sup_{\sigma_1 \in \Sigma_1} \inf_{\sigma_2 \in \Sigma_2} G(\sigma_1, \sigma_2) \geqslant \inf_{\sigma_2 \in \Sigma_2} G(\bar{\sigma}_1, \sigma_2).$$

Ou encore, d'après la condition de point-selle :

$$\sup_{\sigma_1 \in \Sigma_1} \inf_{\sigma_2 \in \Sigma_2} G(\sigma_1, \sigma_2) \geqslant G(\bar{\sigma}_1, \bar{\sigma}_2).$$

Mais on a aussi :

$$\inf_{\sigma_2 \in \Sigma_2} G(\sigma_1, \sigma_2) \leqslant G(\sigma_1, \bar{\sigma}_2)$$

$$\sup_{\sigma_1 \in \Sigma_1} \inf_{\sigma_2 \in \Sigma_2} G(\sigma_1, \sigma_2) \leqslant \sup_{\sigma_1 \in \Sigma_1} G(\sigma_1, \bar{\sigma}_2).$$

Ou encore, d'après la condition de point-selle :

$$\sup_{\sigma_1 \in \Sigma_1} \inf_{\sigma_2 \in \Sigma_1} G(\sigma_1, \sigma_2) \leqslant G(\bar{\sigma}_1, \bar{\sigma}_2).$$

En comparant, on constate que la fonction :

$$\sigma_1 \mapsto \inf_{\sigma_2 \in \Sigma_2} G(\sigma_1, \sigma_2)$$

atteint son maximum en $\bar{\sigma}_1$ et que :

$$\max_{\sigma_1 \in \Sigma_1} \inf_{\sigma_2 \in \Sigma_2} G(\sigma_1, \sigma_2) = G(\bar{\sigma}_1, \bar{\sigma}_2) = v.$$

De même on aura :

$$\min_{\sigma_2 \in \Sigma_2} \sup_{\sigma_1 \in \Sigma_1} G(\sigma_1, \sigma_2) = G(\bar{\sigma}_1, \bar{\sigma}_2) = v.$$

On aura donc $\alpha = v = \beta$, d'où le résultat. ▮

COROLLAIRE. *Supposons que* $(\bar{\sigma}_1, \bar{\sigma}_2)$ *et* $(\bar{\sigma}'_1, \bar{\sigma}'_2)$ *soient en équilibre. Alors* $(\bar{\sigma}_1, \bar{\sigma}'_2)$ *et* $(\bar{\sigma}'_1, \bar{\sigma}_2)$ *sont en équilibre.*

La recherche d'un couple de stratégies en équilibre se ramène donc à la recherche d'un minisup et d'un maxinf de la fonction G sur $\Sigma_1 \times \Sigma_2$. C'est le but du paragraphe suivant.

5. Théorèmes inf-sup

Le théorème de Nash se traduit immédiatement dans le présent contexte. On obtient le résultat suivant, dont la première version est due à von Neumann.

THÉORÈME DE MINIMAX. *Soient* A *et* B *deux convexes compacts, et* f *une application continue de* $A \times B$ *dans* $\mathbf{R}$, *concave par rapport à la première variable, convexe par rapport à la seconde. Alors :*

$$\max_{x \in A} \min_{y \in B} f(x, y) = \min_{y \in B} \max_{x \in A} f(x, y).$$

Démonstration. On considère le jeu à deux personnes de somme nulle (A, B, f). Les hypothèses du théorème de Nash sont vérifiées, et le jeu admet donc un équilibre. On a vu que ceci s'écrivait :

$$\max_{x \in A} \inf_{y \in B} f(x, y) = \min_{y \in B} \sup_{x \in A} f(x, y).$$

Mais par continuité de f et compacité de A et B, les bornes qui subsistent sont atteintes. ∎

Mais nous allons obtenir des résultats beaucoup plus puissants. Nous nous donnons deux convexes A et B et une fonction f de $A \times B$ dans $\mathbf{R}$, telle que :

a) $\forall y \in B, \quad x \mapsto f(x, y)$ est concave.

Cherchons à quelles conditions il existe un minisup $\bar{y} \in B$. Pour tout $y \in B$, nous noterons f_y la fonction $x \mapsto f(x, y)$ de A dans $\mathbf{R}$; c'est un élément de l'espace vectoriel $\mathbf{R}^A$, que nous munissons de sa topologie produit habituelle. On désigne par $\mathbf{R}^A_+$ le cône positif de $\mathbf{R}^A$, ou encore l'ensemble des applications positives de A dans $\mathbf{R}$. Dire que $\bar{y} \in B$ est un minisup signifie que :

$$\alpha \in f_{\bar{y}} + \mathbf{R}^A_+$$

où α désigne la fonction constante $x \mapsto \alpha$ sur A.

Le résultat fondamental est alors le suivant :

PROPOSITION. *Soit* $\mathscr{F} = \{f_y \mid y \in B\}$. *Si* $\alpha \neq \pm \infty$, *si le cône* $\mathscr{F} + \mathbf{R}^A_+$ *est convexe fermé dans* $\mathbf{R}^A$, *il existe un minisup* $\bar{y} \in B$ *et* $\alpha = \beta$.

Démonstration. Il suffit de montrer que $\alpha \in \mathscr{F} + \mathbf{R}_+^A$. Raisonnons donc par l'absurde, en supposant que :

$$\alpha \notin \mathscr{F} + \mathbf{R}_+^A.$$

Comme le second membre est convexe fermé, on peut appliquer le théorème de séparation de Hahn-Banach. Il existe donc une forme linéaire continue sur $\mathbf{R}^A$ séparant strictement α et $\mathscr{F} + \mathbf{R}_+^A$. En d'autres termes, il existe des points $a_i \in A$ et des coefficients $\mu_i \in \mathbf{R}$, $\neq 0$, en nombre fini, $1 \leqslant i \leqslant n$, et un nombre $m \in \mathbf{R}$ tels que :

$$\sum_{i=1}^{n} \mu_i \alpha < m$$

$$\forall y \in B, \quad \forall g \in \mathbf{R}_+^A, \quad \sum_{i=1}^{n} \mu_i(f_y(a_i) + g(a_i)) > m.$$

La seconde expression s'écrira aussi :

$$\forall y \in B, \quad \forall \gamma_i \geqslant 0, \quad 1 \leqslant i \leqslant n, \quad \sum_{i=1}^{n} \mu_i \gamma_i > m - \sum_{i=1}^{n} \mu_i f_y(a_i)$$

et implique donc que les coefficients μ_i sont positifs. On aura donc :

$$\forall y \in B, \quad \alpha \sum_{i=1}^{n} \mu_i < m < \sum_{i=1}^{n} \mu_i f(a_i, y).$$

En divisant par $M = \sum_{i=1}^{n} \mu_i$, on obtient une famille de coefficients $\nu_i = \mu_i/M$, positifs de somme 1, tels que :

$$\forall y \in B, \quad \alpha < m/M < \sum_{i=1}^{n} \nu_i f(a_i, y).$$

En utilisant l'hypothèse a) (concavité par rapport à la première variable), on obtient :

$$\forall y \in B, \quad \alpha < m/M < f(\sum_{i=1}^{n} \nu_i a_i, y).$$

A fortiori :

$$\alpha < \inf_{v \in \mathrm{B}} f(\sum_{i=1}^{n} \nu_i a_i , y)$$

$$\alpha < \sup_{x \in \mathrm{A}} \inf_{v \in \mathrm{B}} f(x, y)$$

ce qui contredit la définition de α. ▮

Il ne reste plus qu'à exprimer des conditions suffisantes pour que $\mathcal{F} + \mathbf{R}_+^{\mathrm{A}}$ soit convexe et fermé. On a facilement la première.

LEMME. *Voici une condition suffisante pour que* $\mathcal{F} + \mathbf{R}_+^{\mathrm{A}}$ *soit convexe :*

b) $\forall\, x \in \mathrm{A}$, $y \mapsto f(x, y)$ *est convexe.*

Démonstration. Donnons-nous des fonctions $g_i \in \mathcal{F} + \mathbf{R}_+^{\mathrm{A}}$ et des coefficients ν_i positifs de somme 1, $1 \leqslant i \leqslant n$. Il existe des $y_i \in \mathrm{B}$ tels que :

$$\forall\, x \in \mathrm{A}, \quad f(x, y_i) \leqslant g_i(x)$$

$$\forall\, x \in \mathrm{A}, \quad \sum_{i=1}^{n} \nu_i f(x, y_i) \leqslant \sum_{i=1}^{n} \nu_i g_i(x).$$

D'après l'hypothèse de convexité b) :

$$\forall\, x \in \mathrm{A}, \quad f(x, \sum_{i=1}^{n} \nu_i y_i) \leqslant \sum_{i=1}^{n} \nu_i g_i(x)$$

$$\sum_{i=1}^{n} \nu_i g_i \in f_{\sum_{i=1}^{n} \nu_i v_i} + \mathbf{R}_+^{\mathrm{A}}. \ ▮$$

Les conditions de fermeture sont plus délicates :

LEMME. *L'une quelconque des hypothèses ci-dessous est suffisante pour que* $\mathcal{F} + \mathbf{R}_+^{\mathrm{A}}$ *soit fermé :*

(H1) $\{$ B est compact et la fonction $y \mapsto f(x, y)$ est s.c.i. $\forall x$.

(H2) $\left\{\begin{array}{l} \text{B est fermé dans un Banach réflexif, la fonction} \\ y \mapsto f(x, y) \text{ est faiblement s.c.i. } \forall x, \text{ et } \exists x_0 \text{ tel que} \\ \lim_{\|y\| \to \infty} f(x_0, y) = +\infty. \end{array}\right.$

Démonstration. Soit g_i, $i \in \mathrm{I}$, une famille de fonctions de $\mathscr{F} + \mathbf{R}_+^{\mathrm{A}}$, convergeant simplement vers $\bar{g}$ suivant un ultrafiltre sur I. Pour tout $i \in \mathrm{I}$, il existe $y_i \in \mathrm{B}$ tel que :

$$\forall x \in \mathrm{A}, \quad f(x, y_i) \leqslant g_i(x).$$

Mais chacune des hypothèses (H1) et (H2) (prendre $x = x_0$) implique que la base d'ultrafiltre y_i, $i \in \mathrm{I}$, converge vers un $\bar{y} \in \mathrm{B}$. Par semi-continuité inférieure, on a :

$$\forall x \in \mathrm{A}, \quad f(x, \bar{y}) \leqslant \varliminf_{i \in \mathrm{I}} f(x, y_i) \leqslant \varliminf_{i \in \mathrm{I}} g_i(x) = \bar{g}(x).$$

Donc $\bar{g} \in \mathscr{F} + \mathbf{R}_+^{\mathrm{A}}$. ∎

Rassemblons nos résultats.

Théorème. *Soient* A *et* B *deux convexes, et f une application de* $\mathrm{A} \times \mathrm{B}$ *dans* $\mathbf{R}$, *vérifiant* a) *et* b) *et* (H1) *ou* (H2). *Si* $\alpha \neq \pm \infty$, *il existe un minisup* $\bar{y} \in \mathrm{B}$ *et* $\alpha = \beta$.

Il suffit de combiner ce théorème avec le théorème analogue pour le maxinf pour obtenir des résultats d'existence de point-selle. Citons-en un, primitivement dû à Sion :

Théorème de Sion. *Soient* A *et* B *deux convexes compacts, et f une fonction de* $\mathrm{A} \times \mathrm{B}$ *dans* $\mathbf{R}$ *telle que :*

$\forall x \in \mathrm{A}, \quad y \mapsto f(x, y)$ *soit convexe s.c.i.*
$\forall y \in \mathrm{B}, \quad x \mapsto f(x, y)$ *soit concave s.c.s.*

Alors il existe un point-selle $(\bar{x}, \bar{y}) \in \mathrm{A} \times \mathrm{B}$:

$$\min_{y \in \mathrm{B}} \max_{x \in \mathrm{A}} f(x, y) = f(\bar{x}, \bar{y}) = \max_{x \in \mathrm{A}} \min_{y \in \mathrm{B}} f(x, y).$$

6. Jeux finis

La considération des jeux finis est très instructive. Soient $\Sigma_1 = \{1, \ldots, n\}$, $\Sigma_2 = \{1, \ldots, p\}$. On peut représenter le jeu par un tableau à double entrée :

$$a_{ij} = G(i, j)$$

matrice à n lignes et p colonnes. Le jeu consiste alors, pour le joueur 1 à choisir une ligne i, pour le joueur 2 à choisir une colonne j : une fois les choix faits, le second joueur paie la somme α_{ij} au premier.

On a alors une excellente interprétation des stratégies minimax et maximin. Considérons le joueur 1. S'il choisit la ligne i, il s'assure, dans l'hypothèse la plus défavorable pour lui, un gain d'au moins $\min_j a_{ij}$. La stratégie maximin $\bar{i}$ maximise ce gain minimum, lui assurant ainsi un gain d'au moins :

$$\max_i \min_j a_{ij} = \alpha.$$

De même, le joueur 2, s'il choisit la colonne j perdra, dans l'hypothèse la plus défavorable pour lui, au plus $\max_i a_{ij}$. En adoptant la stratégie minimax $\bar{j}$ qui minimise cette perte maximum, il est sûr de perdre moins que :

$$\min_j \max_i a_{ij} = \beta.$$

Si le joueur 1 joue sa stratégie maximin et le joueur 2 sa stratégie minimax, le gain résultant sera :

$$\alpha \leqslant a_{\bar{i}\bar{j}} \leqslant \beta.$$

Deux cas se présentent alors :

A) *Cas* $\alpha = \beta$

Le jeu possède un col. En particulier, les stratégies $\bar{i}$ et $\bar{j}$ sont en équilibre, et aucun des deux joueurs n'a intérêt à changer de stratégie, même s'il connaît le choix adverse. En vertu de l'égalité $\beta = a_{\bar{i}\bar{j}} = \alpha$, le premier joueur gagnera exactement ce qu'il avait prévu, le second perdra exactement ce qu'il avait prévu.

B) *Cas* $\alpha < \beta$

Il n'y a pas d'équilibre. En outre, $\alpha \leqslant a_{\bar{i}\bar{j}} \leqslant \beta$, l'une des inégalités au moins étant stricte : l'un des deux joueurs, ou les deux, feront mieux qu'ils n'avaient espéré. On entre alors dans une situation où la ruse joue un rôle capital : celui qui aura deviné les intentions de l'autre aura un avantage considérable.

Considérons par exemple le jeu :

$$\begin{pmatrix} 5 & 6 & 7 \\ 4 & 15 & 8 \\ 12 & 3 & 10 \end{pmatrix}$$

La stratégie maximin du joueur 1 est $\bar{i} = 1$, conduisant à un gain minimum $\alpha = 5$, et la stratégie minimax du joueur 2 est $\bar{j} = 3$, conduisant à une perte maximum $\beta = 10$. Le résultat effectif est $a_{13} = 7$.

Mettons-nous à la place du joueur 1. En jouant $i = 1$, il s'assure un gain de 5. Mais il peut aussi juger que le joueur 2 va jouer sa stratégie minimax $j = 3$ et l'anticiper en jouant $i = 3$, ce qui lui permettra de gagner 10. Mais en anticipant ainsi, le joueur 1 s'expose, car le joueur 2 peut prévoir le coup et jouer $j = 2$, auquel cas le joueur 1 se retrouvera avec un gain de 3. Et ainsi de suite... On voit l'importance de l'information, qu'elle soit obtenue par traîtrise ou par ruse.

7. Stratégies mixtes

Il s'agit d'une idée qui remonte à Borel, en vue d'éliminer la ruse dans les jeux sans équilibre. Etant donné un jeu (Σ_1, Σ_2, G), on cherchera à construire un autre jeu (K_1, K_2, f) tel que :

— $\Sigma_1 \subset K_1$, $\Sigma_2 \subset K_2$, f prolonge G;
— K_1 et K_2 soient des convexes compacts;
— f soit bilinéaire séparément continue sur $K_1 \times K_2$;
— K_1 (resp. K_2) soit l'enveloppe convexe fermée de Σ_1 (resp. Σ_2).

On appellera *stratégies mixtes* du joueur 1 (resp. 2) les éléments de K_1 (resp. K_2). D'après le théorème de Sion, il existera un couple de stratégies mixtes en équilibre. L'intérêt réside dans le fait qu'il y a pratiquement toujours une interprétation probabiliste, comme nous allons le voir sur trois exemples.

A) Jeux finis

$$\Sigma_1 = \{1, \ldots, n\} \qquad \Sigma_2 = \{1, \ldots, p\} \qquad a_{ij} = G(i, j).$$

On prend pour K_1 (resp. K_2) le simplexe de base de $\mathbf{R}^n$ (resp. de $\mathbf{R}^p$) :

$$K_1 = \{\xi \in \mathbf{R}^n \mid \forall i, \xi_i \geqslant 0 \quad \text{et} \quad \sum_{i=1}^{n} \xi_i = 1\}$$

$$K_2 = \{\zeta \in \mathbf{R}^p \mid \forall j, \zeta_j \geqslant 0 \quad \text{et} \quad \sum_{j=1}^{p} \zeta_j = 1\}.$$

On plonge Σ_1 (resp. Σ_2) dans K_1 en identifiant la stratégie pure $i \in \{1, \ldots, n\}$ (resp. $j \in \{1, \ldots, p\}$) au i-ème sommet du simplexe K_1 (resp. au j-ième sommet du simplexe K_2) :

$i \in \Sigma_1$ identifié à $(0, \ldots, \xi_i = 1, \ldots, 0) \in K_1$
$j \in \Sigma_2$ identifié à $(0, \ldots, \zeta_j = 1, \ldots, 0) \in K_2$.

On prolonge G à $K_1 \times K_2$ par bilinéarité :

$$f(\xi, \zeta) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{i=1}^{p} \xi_i \zeta_j a_{ij}.$$

THÉORÈME (von NEUMANN). *Tout jeu fini admet un couple de stratégies mixtes en équilibre.*

L'interprétation probabiliste est en évidence : ξ est une répartition de probabilité sur Σ_1, ζ une répartition de probabilité sur Σ_2, f est l'espérance de gain associée.

L'interprétation pratique est la suivante. Soit $(\bar{\xi}, \bar{\zeta})$ un couple de stratégies mixtes en équilibre. Le joueur 1 se fixera la répartition $\bar{\xi}$ et, au moment du choix, tirera au hasard sa décision suivant cette probabilité. Il s'assure ainsi une espérance de gain qui est égale à la valeur du jeu en stratégie mixte, supérieure en particulier à α. De même pour le joueur 2 qui, en jouant sa stratégie mixte $\bar{\zeta}$, a une espérance de perte inférieure à β. On retombe sur l'analyse classique de l'équilibre. Remarquons en particulier qu'on a bien éliminé la ruse : la connaissance par le joueur 2 de l'intention qu'a le joueur 1 de tirer sa décision au sort suivant la loi $\bar{\xi}$ ne lui apporte plus aucun avantage.

B) JEUX SUR LE CARRÉ

Supposons que Σ_1 et Σ_2 soient des compacts et que G soit séparément continue. On peut alors prendre $K_1 = \mathscr{M}_+^1(\Sigma_1)$, espace des probabilités de Radon sur Σ_1 muni de la topologie vague. L'injection $\sigma_1 \mapsto \delta_{\sigma_1}$, qui à un point de Σ_1 associe la mesure de Dirac en ce point, plonge Σ_1 dans K_1. On sait que K_1 est un convexe compact, enveloppe convexe fermée de Σ_1. De même, on prendra $K_2 = \mathscr{M}^1_+(\Sigma_2)$. Il ne reste plus qu'à poser, pour $\mu \in K_1$ et $\nu \in K_2$:

$$f(\mu, \nu) = \int_{\Sigma_1 \times \Sigma_2} G\, \mu \otimes \nu.$$

D'après le théorème de Sion, on a des équilibres. Les stratégies mixtes sont des répartitions de probabilité sur Σ_1 (resp. Σ_2), et on a donc la même interprétation que dans le cas précédent.

C) Un modèle de poker

Ce modèle (très simplifié) ne comporte que deux joueurs et trois mains équiprobables, numérotées 1, 2 et 3, de la plus faible à la plus forte. Chacun reçoit une des trois mains et met *a* au pot. Pour miser ou pour voir, il faut rajouter *a* au pot. Le jeu se déroule alors suivant le schéma suivant : les trois premières colonnes montrent la succession possible des annonces, la dernière désigne le vainqueur, qui emporte le pot :

Joueur 1	*Joueur 2*	*Joueur 1*	*Pot*
mise →	voit →	→	meilleure main
	passe →	→	joueur 1
passe →	passe →	→	meilleure main
	mise →	voit →	meilleure main
		passe →	joueur 2

On peut mettre le jeu sous forme extensive et compter les stratégies. On constate que, si le premier joueur a la main *i*, il a une seule décision à prendre parmi les trois suivantes :

miser au 1^{er} tour;
passer au 1^{er} tour et voir au 3^e tour;
passer au 1^{er} tour et passer au 3^e tour.

Soit Σ_1^i l'ensemble de ces trois décisions. L'ensemble des stratégies du premier joueur sera $\Sigma_1 = \Sigma_1^1 \times \Sigma_1^2 \times \Sigma_1^3$. On prendra comme stratégies mixtes $K_1^i = \{(\alpha_i, \beta_i, \gamma_i)\}$:

α_i = probabilité de miser au 1^{er} tour, avec la main i;
β_i = probabilité de passer au 1^{er} et voir au 3^e, avec la main i;
γ_i = probabilité de passer au 1^{er} et au 3^e, avec la main i.

De même, si le deuxième joueur a la main i, il a à prendre deux décisions :

miser ou passer après une passe du joueur 1;
voir ou passer après une mise du joueur 1.

On propose comme linéarisation $K_2 = K_2^1 \times K_2^2 \times K_2^3$, avec $K_2^i = \{(x_i, y_i)\}$:

x_i = probabilité de miser après une passe du joueur 1;
y_i = probabilité de voir après une mise du joueur 1.

Remarquons que α_i, β_i, γ_i, x_i, y_i sont des nombres compris entre 0 et 1, et que seuls α_i, β_i et γ_i sont liés par la relation :

$$\alpha_i + \beta_i + \gamma_i = 1$$

posons : $$L(i,j) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad i > j \\ -1 & \text{si} \quad i < j. \end{cases}$$

Le gain du joueur 1 est donné par :

$$
\begin{aligned}
& 3\,!\, f(\tilde{\alpha}, \tilde{\beta}, \tilde{\gamma}; \tilde{x}, \tilde{y}) \\
& = \ a \sum_{i \neq j} (\beta_i + \gamma_i)(1 - x_j)\,\mathrm{L}(i,j) && \text{passe + passe} \\
& + 2a \sum_{i \neq j} \beta_i x_j \mathrm{L}(i,j) && \text{passe + mise + voit} \\
& - \ a \sum_{i \neq j} \gamma_i x_j && \text{passe + mise + quitte} \\
& + \ a \sum_{i \neq j} \alpha_i (1 - y_j) && \text{mise + quitte} \\
& + 2a \sum_{i \neq j} \alpha_i y_j \mathrm{L}(i,j) && \text{mise + mise.}
\end{aligned}
$$

C'est bien une forme bilinéaire, et il existe donc un couple de stratégies en équilibre. On peut en calculer un explicitement à l'aide de la condition de point-selle, par tâtonnements.

On trouve que la valeur du jeu est $-a/18$, et :

$$
\begin{array}{ll}
\bar{x}_1 = 1/3 & \bar{y}_1 = 0 \\
\bar{x}_2 = 0 & \bar{y}_2 = 1/3 \\
\bar{x}_3 = 1 & \bar{y}_3 = 1
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{lll}
\bar{\alpha}_2 = 0 & \bar{\beta}_3 + \bar{\alpha}_3 = 1 & -3\bar{\alpha}_1 + \bar{\alpha}_3 = 0 \\
\bar{\beta}_1 = 0 & \bar{\beta}_2 + \bar{\gamma}_2 = 1 & -2\bar{\gamma}_2 + \bar{\beta}_2 + \bar{\beta}_3 = 0. \\
\bar{\gamma}_3 = 0 & \bar{\alpha}_1 + \bar{\gamma}_1 = 1 &
\end{array}
$$

On peut donc avoir :

$$
\begin{array}{llll}
\bar{\alpha}_1 \neq 0 & \bar{\beta}_1 = 0 & \bar{\gamma}_1 \neq 0. & (1) \\
\bar{\alpha}_2 = 0 & \bar{\beta}_2 \neq 0 & \bar{\gamma}_2 \neq 0. & (2) \\
\bar{\alpha}_3 \neq 0 & \bar{\beta}_3 \neq 0 & \bar{\gamma}_3 = 0. & (3)
\end{array}
$$

(1) signifie que le joueur 1 mise sur une main perdante et passe après = *bluff*.

(3) signifie que le joueur 1 passe sur une main gagnante et voit après = *matraquage*.

8. Programmation convexe

Nous allons maintenant montrer comment la théorie de la dualité en programmation convexe dérive des théorèmes inf-sup que nous avons exposés au paragraphe 5. C'est un chapitre très important de la recherche opérationnelle et de la microéconomie qui se trouvera ainsi rattaché à la théorie des jeux.

Définition 8.1. *On appelle programme convexe un problème d'optimisation du type :*

$$(\mathscr{P})\begin{cases}\text{minimiser } f_0(x), \text{ pour } x \in \mathrm{R}^n\\ \text{vérifiant } f_1(x) \leqslant c_1, \ldots, f_p(x) \leqslant c_p\end{cases}$$

où les $f_i : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$, $0 \leqslant i \leqslant p$, sont des fonctions convexes (et donc continues), et les $c_i \in \mathbf{R}$, $1 \leqslant i \leqslant p$, sont des scalaires.

On l'écrira plus souvent sous la forme abrégée :

$$(\mathscr{P})\begin{cases}\inf f_0(x) & (8.1)\\ f_j(x) \leqslant c_j \quad \text{pour} \quad j = 1, \ldots, p. & (8.2)\end{cases}$$

Les p inégalités (8.2) sont appelées les *contraintes*. Si un point $x \in \mathbf{R}^n$ vérifie $f_j(x) = c_j$, on dit qu'il sature la j-ième contrainte. Remarquons que ce formalisme permet de rendre compte d'une *liaison* $f(x) = c$: il suffit de la décomposer en deux contraintes, $f(x) \leqslant c$ et $-f(x) \leqslant -c$; cela impose toutefois que f et $-f$ soient convexes, c'est-à-dire que f soit linéaire. Tout point $x \in \mathrm{R}^n$ qui vérifie les contraintes (8.2) est dit *admissible*. L'ensemble des points admissibles :

$$\mathrm{K} = \{x \in \mathrm{R}^n \mid f_j(x) \leqslant 0 \quad \text{pour} \quad j = 1, \ldots, p\} \qquad (8.3)$$

est appelé le *domaine permis*. C'est un convexe fermé de $\mathbf{R}^n$.

La fonction à minimiser, f_0, est appelée le *critère* ou l'objectif. On appellera *valeur* du problème $(\mathscr{P})$ le nombre de $\overline{\mathbf{R}}$ défini par :

$$\inf(\mathscr{P}) = \inf_{x \in K} f_0(x) \tag{8.4}$$

avec les conventions habituelles. En particulier :

$$\inf(\mathscr{P}) = +\infty$$

signifiera que le domaine permis est vide, $K = \varnothing$. Si, dans (8.4), la borne inférieure est atteinte en un point $\bar{x}$, on dira que $\bar{x}$ est *solution optimale* du problème $(\mathscr{P})$, et la valeur de celui-ci sera notée min $(\mathscr{P})$:

$$\bar{x} \in K \quad \text{et} \quad f_0(\bar{x}) = \min(\mathscr{P}). \tag{8.5}$$

Résoudre le problème $(\mathscr{P})$, c'est chercher ses solutions optimales.

Nous introduisons maintenant, en vue d'un usage ultérieur, une hypothèse technique qui sera généralement vérifiée. On commence par ramener les contraintes affines, du type $\langle e_j, x \rangle + d_j \leqslant c_j$, à la contrainte linéaire correspondante, $\langle e_j, x \rangle \leqslant c_j - d_j$. Puis, dans $\{1, \ldots, p\}$, on isole l'ensemble L des indices associés aux contraintes linéaires :

$$j \in L \Leftrightarrow f_j \text{ est une forme linéaire.} \tag{8.6}$$

On notera C le complémentaire de L dans $\{1, \ldots, p\}$: il indexe les contraintes non linéaires. Notre hypothèse s'énonce alors :

DÉFINITION 8.2. *Le programme convexe $(\mathscr{P})$ est dit normal si :*

ou bien, $\quad K = \varnothing$

ou bien : $\quad \exists x_0 \in K : \forall j \in C, \quad f_j(x_0) < c_j.$

En d'autres termes, ou bien le domaine permis est vide, ou bien il contient un point ne saturant aucune des contraintes non linéaires.

Nous allons successivement étudier le Lagrangien du problème $(\mathscr{P})$, interpréter ses multiplicateurs de Lagrange, et définir son problème dual $(\mathscr{P}^*)$.

a) *Etude du Lagrangien.* Par définition, on appelle *Lagrangien* du problème $(\mathscr{P})$ la fonction $L : \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^p_+ \to \mathbf{R}$ définie par :

$$L(x, \lambda) = f_0(x) + \sum_{j=1}^{p} \lambda^j(f_j(x) - c_j). \qquad (8.7)$$

Comme au paragraphe 5, on notera :

$$\alpha = \sup_{\lambda \geqslant 0} \inf_x L(x, \lambda) \qquad (8.8)$$

$$\beta = \inf_x \sup_{\lambda \geqslant 0} L(x, \lambda). \qquad (8.9)$$

Voici qui éclaire quelque peu la signification du Lagrangien :

LEMME 8.3. $\inf(\mathscr{P}) = \beta$. *En outre, il est équivalent de dire :*

a) $\bar{x}$ *est solution optimale du problème* $(\mathscr{P})$.

b) $\sup_{\lambda \geqslant 0} L(\bar{x}, \lambda) = \beta \neq \pm \infty$.

Démonstration. Définissons une fonction $h : \mathbf{R}^n_+ \to \overline{\mathbf{R}}$ par:

$$h(x) = \sup_{\lambda \geqslant 0} \sum_{j=1}^{p} \lambda^j(f_j(x) - c_j). \qquad (8.10)$$

Pour l'exprimer plus simplement, on remarque que :

$$\sup_{\lambda^j \geqslant 0} \lambda^j(f_j(x) - c_j) = \begin{cases} +\infty & \text{si} \quad f_j(x) > c_j \\ 0 & \text{si} \quad f_j(x) \leqslant c_j. \end{cases} \qquad (8.11)$$

Donc $h(x)$ vaudra $+\infty$ si x viole une des contraintes du problème $(\mathscr{P})$ et 0 sinon :

$$\begin{cases} h(x) = +\infty & \text{si} \quad x \notin K \\ h(x) = 0 & \text{si} \quad x \in K. \end{cases} \qquad (8.12)$$

Mais, en reportant dans (8.7) :

$$\begin{aligned}\sup_{\lambda \geqslant 0} L(x, \lambda) &= f_0(x) + h(x) \\ &= +\infty \quad \text{si} \quad x \notin K \\ &= f_0(x) \quad \text{si} \quad x \in K\end{aligned}$$

d'où le résultat. En particulier, $\beta = +\infty$ signifie que le domaine permis est vide, $K = \varnothing$, et $\beta = -\infty$ signifie que le critère n'est pas borné inférieurement sur K. ▮

Voici maintenant le résultat essentiel :

THÉORÈME 8.4. *Si le programme convexe* ($\mathscr{P}$) *est normal, et si* $\inf(\mathscr{P}) \neq \pm\infty$, *alors son Lagrangien possède un maxinf* $\bar{\lambda} \in \mathbf{R}_+^p$:

$$\inf_x L(x, \bar{\lambda}) = \beta = \alpha. \tag{8.13}$$

Démonstration. Nous allons appliquer les résultats du paragraphe 5 au Lagrangien L sur $\mathbf{R}^n \times \mathbf{R}_+^p$. Par hypothèse $\beta = \inf(\mathscr{P}) \neq \pm\infty$. En outre, la fonction L est convexe en x (puisque $\lambda \geqslant 0$) et linéaire (donc concave) en λ. Il ne reste plus qu'à montrer que l'ensemble de fonctions :

$$\mathscr{F} = \{f : \mathbf{R}_+^n \to \mathbf{R} \mid \exists\, \lambda \in \mathbf{R}_+^p : f(x) \leqslant L(x, \lambda) \quad \forall\, x \in \mathbf{R}^n\}$$

est fermé pour la topologie de la convergence simple.

Soit par exemple f_α, $\alpha \in A$, une famille de fonctions de $\mathscr{F}$ convergeant simplement vers $\bar{f}$ suivant un ultrafiltre sur l'ensemble d'indices A. Pour tout $\alpha \in A$, il existe $\lambda_\alpha \in \mathbf{R}_+^p$ tel que :

$$\forall\, x \in \mathbf{R}^n \quad f_\alpha(x) \leqslant f_0(x) + \sum_{j=1}^{p} \lambda_\alpha^j (f_j(x) - c_j). \tag{8.14}$$

Or ($\mathscr{P}$) est normal. Grâce à la définition 8.2, nous choisissons un point $x_0 \in \mathbf{R}^n$ tel que :

$$f_j(x_0) - c_j \leqslant 0 \qquad \forall j \in \mathrm{L}. \tag{8.15}$$

$$f_j(x_0) - c_j < 0 \qquad \forall j \in \mathrm{C}. \tag{8.16}$$

Notons $\mathrm{L}_0 = \{j \in \mathrm{L} \mid f_j(x_0) - c_j < 0\}$. Au point x_0, l'inégalité (8.14) devient :

$$f_\alpha(x_0) \leqslant f_0(x_0) + \sum_{j \in \mathrm{C} \cup \mathrm{L}_0} \lambda_\alpha^j (f_j(x_0) - c_j). \tag{8.17}$$

Les coefficients des λ_α^j étant négatifs, on en tire :

$$\forall j \in \mathrm{C} \cup \mathrm{L}_0, \qquad 0 \leqslant \lambda_\alpha^j \leqslant \frac{-1}{f_j(x_0) - c_j} (f_0(x_0) - f_\alpha(x_0)). \tag{8.18}$$

Mais $f_\alpha(x_0)$ converge vers $\bar{f}(x_0)$ par hypothèse. On en déduit que, pour $j \in \mathrm{C} \cup \mathrm{L}_0$, la famille λ_α^j, $\alpha \in \mathrm{A}$, est bornée. Comme on s'est donné un ultrafiltre sur A, les λ_α^j pour $j \in \mathrm{C} \cup \mathrm{L}_0$ ont une limite $\bar{\lambda}^j$:

$$\forall j \in \mathrm{C} \cup \mathrm{L}_0, \qquad \lambda_\alpha^j \to \bar{\lambda}^j \geqslant 0. \tag{8.19}$$

Examinons maintenant les indices $j \in \mathrm{L} - \mathrm{L}_0$. Par hypothèse, les f_j correspondants sont linéaires et vérifient $f_j(x_0) = c_j$. En posant $y = x - x_0$ dans (8.14), on obtient l'inégalité, valable pour tout $y \in \mathbf{R}^n$:

$$f_\alpha(x_0 + y) \leqslant f_0(x_0 + y) + \sum_{j \in \mathrm{C} \cup \mathrm{L}_0} \lambda_\alpha^j (f_j(x_0 + y) - c_j) + \sum_{j \in \mathrm{L} - \mathrm{L}_0} \lambda_\alpha^j f_j(y)$$

ou encore :

$$\sum_{j \in \mathrm{L} - \mathrm{L}_0} \lambda_\alpha^j f_j(y) \geqslant f_\alpha(x_0 + y) - f_0(x_0 + y) - \sum_{j \in \mathrm{C} \cup \mathrm{L}_0} \lambda_\alpha^j (f_j(x_0 + y) - c_j). \tag{8.20}$$

En changeant y en $-y$ et en tenant compte de la linéarité du premier membre, on obtient l'inégalité, valable pour tout $y \in \mathbf{R}^n$:

$$\sum_{j\in L-L_0} \lambda_\alpha^j f_j(y) \leqslant -f_\alpha(x_0-y)+f_0(x_0-y) + \sum_{j\in C\cup L_0} \lambda_\alpha^j (f_j(x_0-y)-c_j). \quad (8.21)$$

En comparant (8.20) et (8.21), on voit que la famille de formes linéaires $\sum_{j\in L-L_0} \lambda_\alpha^j f_j$, $\alpha \in A$, est bornée dans le dual $(\mathbf{R}^n)^*$ de $\mathbf{R}^n$. Comme cet espace est isomorphe à $\mathbf{R}^n$, et comme on a un ultrafiltre sur A, on en déduit la convergence dans $(\mathrm{R}^n)^*$:

$$\sum_{j\in L-L_0} \lambda_\alpha^j f_j \to u \in (\mathrm{R}^n)^*. \quad (8.22)$$

Mais, d'après un lemme dont nous repoussons la démonstration à plus tard, le cône convexe de sommet O engendré par les f_j :

$$\mathscr{C} = \{ \sum_{j\in L-L_0} \lambda^j f_j \,|\, \lambda_j \geqslant 0 \quad \forall j \in L - L_0 \} \quad (8.23)$$

est un polyèdre fermé de $(\mathbf{R}^n)^*$. Il contient les $\sum_{j\in L-L_0} \lambda_\alpha^j f_j$, $\alpha \in A$, et d'après (8.22), il contient donc u, qui se met sous la forme :

$$u = \sum_{j\in L-L_0} \bar{\lambda}^j f_j, \quad \text{où} \quad \bar{\lambda}^j \geqslant 0. \quad (8.24)$$

Grâce à (8.19) et (8.22), on passe à la limite dans (8.14) :

$$\forall x \in \mathrm{R}^n, \quad \bar{f}(x) \leqslant f_0(x) + \sum_{j\in C\cup L_0} \bar{\lambda}^j (f_j(x)-c_j) + u(x)$$

ou encore, grâce à (8.24) :

$$\forall x \in \mathrm{R}^n, \quad \bar{f}(x) \leqslant f_0(x) + \sum_{j=1}^{p} \bar{\lambda}_j (f_j(x)-c_j). \quad (8.25)$$

On a donc $\bar{f}(x) \leqslant \mathrm{L}(x, \bar{\lambda})$, ce qui exprime que $\bar{f} \in \mathscr{F}$. On a ainsi montré que $\mathscr{F}$ était fermé, d'où le résultat. ∎

La démonstration a fait usage du lemme suivant :

LEMME. *Dans* $\mathbf{R}^n$, *un cône convexe de sommet* O *engendré par un nombre fini de points est toujours fermé.*

Démonstration. Soient f_j, $1 \leqslant j \leqslant p$, les points donnés. On notera K leur enveloppe convexe et C le cône convexe de sommet O qu'ils engendrent :

$$K = \{\sum_{j=1}^{p} \lambda^j f_j \,|\, \lambda^j \geqslant 0 \quad \text{pour} \quad 1 \leqslant j \leqslant p \quad \text{et} \quad \sum_{j=1}^{p} \lambda^j = 1\}$$

$$C = \{\sum_{j=1}^{p} \lambda^j f_j \,|\, \lambda^j \geqslant 0 \quad \text{pour} \quad 1 \leqslant j \leqslant p\}.$$

Il est clair que K est un polyèdre compact de $\mathbf{R}^n$, et que C est le cône de sommet O engendré par K. On pourra donc écrire $K = \cap E_i$, pour $i \in I$ fini, où les E_i sont des demi-espaces fermés limités respectivement par des hyperplans H_i. On raisonnera sur la position de l'origine O par rapport à K.

Si O est intérieur à K, alors $C = R^n$. Si O appartient à la frontière de K, alors $C = \cap E_i$, pour $H_i \ni O$, et est donc fermé.

Si $O \notin K$, prenons une suite e_n, $n \in N$, de points de C convergeant vers $\bar{e}$. Pour tout $n \in N$ il existe $\lambda_n \geqslant 0$ et $z_n \in K$ tels que $e_n = \lambda_n z_n$. Comme K est compact, les z_n ont un point d'accumulation $\bar{z} \in K$, donc $\bar{z} \neq 0$. Les λ_n doivent alors rester bornés, sans quoi $\lambda_n z_n$ ne convergerait pas. Ils ont donc un point d'accumulation $\bar{\lambda} \geqslant 0$, et on obtient par passage à la limite $\bar{e} = \bar{\lambda}\bar{z}$. Donc C est fermé. ▮

Les composantes $(\bar{\lambda}^1, \ldots, \bar{\lambda}^p)$ du maxinf sont appelées *multiplicateurs de Lagrange* du problème $(\mathscr{P})$. Bien entendu, il n'y a pas d'unicité : un programme convexe normal peut posséder plusieurs systèmes de multiplicateurs de Lagrange, c'est-à-dire que le Lagrangien peut admettre plusieurs maxinf. Voici une conséquence très importante du théorème 8.4 :

PROPOSITION 8.5. *Soit* $(\mathscr{P})$ *un programme convexe normal tel que* $\inf(\mathscr{P}) \neq \pm\infty$. *Il est équivalent de dire :*

a) $(\bar{x}, \bar{\lambda}) \in \mathrm{R}^n \times \mathrm{R}^p_+$ *est un point-selle du Lagrangien :*

$$\min_x \mathrm{L}(x, \bar{\lambda}) = \mathrm{L}(\bar{x}, \bar{\lambda}) = \max_{\lambda \geqslant 0} \mathrm{L}(\bar{x}, \lambda). \tag{8.26}$$

b) *Le problème* $(\mathscr{P})$ *admet* $\bar{x}$ *comme solution optimale et* $(\bar{\lambda}^1, \ldots, \bar{\lambda}^p)$ *comme multiplicateurs de Lagrange.*

Démonstration. D'après le théorème 8.4, $\alpha = \beta$. Mais alors, la condition b) du lemme 8.3 exprime que $\bar{x}$ est un minisup. Dire que le problème $(\mathscr{P})$ admet $\bar{x}$ comme solution optimale et $(\bar{\lambda}^1, \ldots, \bar{\lambda}^p)$ comme multiplicateurs de Lagrange revient à dire que le Lagrangien L admet $\bar{x}$ comme minisup et $\bar{\lambda}$ comme maxinf, donc $(\bar{x}, \bar{\lambda})$ comme point-selle. ∎

COROLLAIRE 8.6. *Soient* $(\mathscr{P})$ *un programme convexe normal, tel que* $\inf(\mathscr{P}) \neq \pm\infty$, *et* $(\bar{\lambda}^1, \ldots, \bar{\lambda}^p)$ *ses multiplicateurs de Lagrange. Toute solution optimale de* $(\mathscr{P})$ *est solution optimale du problème :*

$$(\mathscr{P}') \quad \inf_{x \in \mathrm{R}^n} \{f_0(x) + \sum_{j=1}^{p} \bar{\lambda}^j (f_j(x) - c_j)\}$$

$(\mathscr{P}')$ n'est autre que le premier membre de (8.26). La connaissance des multiplicateurs de Lagrange permet donc de se ramener de $(\mathscr{P})$ à $(\mathscr{P}')$, d'un problème à n variables et p contraintes à un problème à n variables sans contraintes, ce qui est un avantage considérable pour la résolution numérique.

COROLLAIRE 8.7. *Soit* $(\mathscr{P})$ *un programme convexe normal, tel que* $\inf(\mathscr{P}) \neq \pm\infty$, *admettant* $\bar{x}$ *comme solution optimale et* $(\bar{\lambda}^1, \ldots, \bar{\lambda}^p)$ *comme multiplicateurs de Lagrange. On a :*

$$\bar{\lambda}^j(f_j(\bar{x}) - c_j) = 0 \quad pour \quad 1 \leqslant j \leqslant p. \tag{8.27}$$

Démonstration. On se sert du deuxième membre de (8.26) :

$$\begin{aligned} L(\bar{x}, \bar{\lambda}) &= \max\{f_0(\bar{x}) \\ &\qquad + \sum_{j=1}^{p} \lambda^j(f_j(\bar{x}) - c_j) \mid \lambda^1 \geqslant 0, \ldots, \lambda^p \geqslant 0\} \\ &= f_0(\bar{x}) + \sum_{j=1}^{p} \max_{\lambda^j \geqslant 0} \lambda^j(f_j(\bar{x}) - c_j). \end{aligned} \tag{8.28}$$

On sait que $f_j(\bar{x}) - c_j \leqslant 0$, puisque $\bar{x}$ est admissible. Si $f_j(\bar{x}) - c_j = 0$, le résultat est établi. Si $f_j(\bar{x}) - c_j < 0$, le maximum dans (8.28) ne peut être atteint que pour $\bar{\lambda}^j = 0$, et de nouveau le résultat est établi. ∎

Les relations (8.27) portent le nom de *relations d'extrémalité*. Elles expriment que si une contrainte n'est pas saturée à l'optimum, le multiplicateur de Lagrange correspondant est nul. Inversement, si on connaît un multiplicateur de Lagrange non nul, $\bar{\lambda}^j \neq 0$, on en déduit que la contrainte correspondante est saturée à l'optimum, $f_j(\bar{x}) = c_j$; on peut donc remplacer, dans l'énoncé du problème $(\mathscr{P})$, la contrainte $f_j(x) \leqslant c_j$ par la liaison $f_j(x) = c_j$, ce qui rétrécit d'autant le domaine permis, et peut grandement faciliter la résolution.

Au terme de cette étude, nous avons donc ramené la résolution du problème d'optimisation $(\mathscr{P})$ à la recherche d'un point-selle de son Lagrangien L, et indiqué que la connaissance de multiplicateurs de Lagrange apporte des renseignements précieux sur $(\mathscr{P})$. La notion de multiplicateur de Lagrange est très riche, et susceptible de différentes interprétations suivant les utilisateurs et le problème concret. Nous en donnons deux, fort importantes en économie.

b) *Les multiplicateurs de Lagrange comme paramètres de décentralisation.* On rencontre très fréquemment en pratique des programmes convexes du type suivant :

$$\begin{cases} \inf\{f_{01}(x_1) + \ldots + f_{0m}(x_m)\}, \quad x_i \in \mathbf{R}^{n_i} \\ f_{11}(x_1) + \ldots + f_{1m}(x_m) \leqslant 0 \\ \ldots \\ f_{p1}(x_1) + \ldots + \ldots + f_{pm}(x_m) \leqslant 0. \end{cases} \tag{8.29}$$

Les variables indépendantes $x_i \in \mathrm{R}^{n_i}$, $1 \leqslant i \leqslant m$, sont couplées par les p contraintes. Dès que m est grand devant p, il devient intéressant de chercher à décomposer $(\mathscr{P})$ en m problèmes indépendants en dimension inférieure. Une méthode pour cela consiste à se servir des multiplicateurs de Lagrange. Le Lagrangien s'écrit :

$$\mathrm{L}(x, \lambda) = \sum_{i=1}^{m} \left(f_{0i}(x_i) + \sum_{j=1}^{p} \lambda^j f_{ji}(x_i)\right). \tag{8.30}$$

Dans une première étape, on calcule $\bar{\lambda}$ comme point où la fonction $\lambda \to \inf\limits_x \mathrm{L}(x, \lambda)$ atteint son maximum sur R_+^p. Cela conduit à un problème en p variables.

Dans une deuxième étape, on calcule $\bar{x}$ comme point où la fonction $x \to \mathrm{L}(x, \bar{\lambda})$ atteint son minimum. Mais on a :

$$\inf_x \mathrm{L}(x, \bar{\lambda}) = \sum_{i=1}^{m} \inf\{f_{0i}(x_i) + \sum_{j=1}^{p} \bar{\lambda}^j f_{ji}(x_i)\}, \tag{8.31}$$

et les $\bar{x}_i$, $1 \leqslant i \leqslant m$, peuvent être calculés indépendamment les uns des autres. Le problème (8.29) en $n_1 + \ldots + n_m$ variables et p contraintes, se trouve donc décomposé en m problèmes sans contraintes, respectivement de

$n_1, \ldots, n_m$ variables. La simplification peut être considérable.

Considérons par exemple un problème de la forme :

$$\begin{cases} \sup \sum_{i=1}^{n} h_i(x_i) \\ x_i \geqslant 0 \quad \text{pour} \quad i = 1, \ldots, n \\ \sum_{i=1}^{n} x_i \leqslant a \end{cases} \tag{8.32}$$

où n est très grand, de l'ordre de 10^3, et où les fonctions $h_i : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ sont toutes concaves. S'il n'y avait pas la contrainte $\sum_{i=1}^{n} x_i \leqslant a$, les solutions optimales seraient obtenues en minimisant les h_i sur $\mathbf{R}_+$, indépendamment les uns des autres, d'où $\bar{x}_i$, $1 \leqslant i \leqslant n$, puis en les regroupant en $\bar{x} = (\bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_n)$.

En remarquant que :

$$\sup \sum_{i=1}^{n} h_i(x_i) = -\inf \sum_{i=1}^{n} -h_i(x_i)$$

on se ramène à un programme convexe à contraintes linéaires, donc normal. On dispose donc de multiplicateurs de Lagrange :

$$\bar{\mu}^i \text{ pour la contrainte } x_i \geqslant 0$$

$$\bar{\lambda} \text{ pour la contrainte } \sum_{i=1}^{n} x_i \leqslant a.$$

Le Lagrangien du problème s'écrit, en tenant compte des changements de signe :

$$L(x, \lambda, \mu) = \sum_{i=1}^{n} h_i(x_i) - \lambda\Big(\sum_{i=1}^{n} x_i - a\Big) + \sum_{i=1}^{n} \mu^i x_i \tag{8.33}$$

et les solutions optimales sont caractérisées par :

$$\max_{x \in \mathbf{R}^n} L(x, \bar{\lambda}, \bar{\mu}) = L(\bar{x}, \bar{\lambda}, \bar{\mu}) = \min_{\lambda \in \mathbf{R}_+} \min_{\mu \in \mathbf{R}_+^n} L(\bar{x}, \lambda, \mu). \tag{8.34}$$

Mais il est clair que :

$$\min_{\mu \geqslant 0} \mathrm{L}(x, \lambda, \mu) = -\infty \quad \text{si} \quad \exists\, i : x_i < 0$$
$$= \sum_{i=1}^{n} h_i(x_i) - \lambda\Big(\sum_{i=1}^{n} x_i - a\Big)$$
$$\text{si} \quad x_i \geqslant 0 \quad \forall\, i. \tag{8.35}$$

On peut donc introduire un Lagrangien réduit :

$$\mathrm{L}(x, \lambda) = \sum_{i=1}^{n} h_i(x_i) - \lambda\Big(\sum_{i=1}^{n} x_i - a\Big) \tag{8.36}$$

et la caractérisation (8.34) devient :

$$\max_{x \in \mathbf{R}_+^n} \mathrm{L}(x, \bar{\lambda}) = \mathrm{L}(\bar{x}, \bar{\lambda}) = \min_{\lambda \in \mathbf{R}_+} \mathrm{L}(\bar{x}, \lambda). \tag{8.37}$$

Elle permet d'abord de calculer $\bar{\lambda}$, par l'intermédiaire de la fonction $\varphi : \mathbf{R}_+ \to \mathbf{R}$ définie par :

$$\varphi(\lambda) = \sup_{x \in \mathbf{R}_+} \mathrm{L}(x, \lambda)$$
$$= \lambda a + \sum_{i=1}^{n} \sup_{x_i \geqslant 0} \{h_i(x_i) - \lambda x_i\}. \tag{8.38}$$

C'est une fonction convexe, comme enveloppe supérieure de fonctions affines. On peut dans des cas simples donner son expression analytique. Sinon on peut toujours la calculer point par point, ce qui est suffisant pour trouver son minimum sur $\mathbf{R}_+$: ce n'est autre que le multiplicateur $\bar{\lambda}$.

Elle permet ensuite, une fois $\bar{\lambda}$ calculé, d'obtenir $\bar{x}$ comme solution du problème d'optimisation $\sup_{x \in \mathbf{R}_+^n} \mathrm{L}(x, \bar{\lambda})$, qui s'écrit :

$$\sup_{x \in \mathbf{R}_+^n} \{\bar{\lambda} a + \sum_{i=1}^{n} (h_i(x_i) - \bar{\lambda} x_i)\} \tag{8.39}$$

ou encore :

$$\bar{\lambda} a + \sum_{i=1}^{n} \sup_{x_i \geqslant 0} \{h_i(x_i) - \bar{\lambda} x_i\}. \tag{8.40}$$

Le problème initial se trouve donc décomposé en n problèmes indépendants : chacune des composantes $\bar{x}_i$ de la solution optimale est calculée, indépendamment des autres, en résolvant le programme concave à une variable :

$$\begin{cases} \sup\{h_i(x_i) - \bar{\lambda}x_i\} \\ x_i \geqslant 0. \end{cases} \tag{8.41}$$

Considérons par exemple une entreprise qui fabrique un produit et le diffuse par l'intermédiaire de n succursales. Si la i-ème succursale reçoit une quantité x_i, elle peut en tirer un profit $h_i(x_i)$. Le problème consiste à répartir la quantité disponible, a, de façon à maximiser le profit total, $\sum_{i=1}^{n} h_i(x_i)$. Cela conduit au problème (8.32), et la direction peut évidemment tenter de déterminer elle-même la quantité optimale $\bar{x}_i$ à adresser à chaque succursale : on a ainsi un modèle de décision centralisé, où aucune initiative n'est laissée à la périphérie. Mais la direction peut atteindre le même résultat en décidant que le produit sera facturé aux succursales au prix $\bar{\lambda}$, et en les laissant libres de leurs choix. La i-ème succursale cherchera alors à maximiser son profit; si elle a commandé à la maison mère une quantité x_i, facturée $\bar{\lambda}x_i$, son profit sera $h_i(x_i) - \bar{\lambda}x_i$; elle résoudra donc pour son propre compte le problème (8.41), dont la solution optimale est justement $\bar{x}_i$. On a là un modèle de décision décentralisé : l'intervention du centre se limite au choix du prix interne $\bar{\lambda}$, toutes les autres décisions étant prises à l'échelon individuel.

c) *Les multiplicateurs de Lagrange comme coûts marginaux des contraintes.* Revenons au problème $(\mathscr{P})$: nous nous proposons d'étudier la sensibilité de $\inf(\mathscr{P})$ aux variations des c_i. Pour cela, nous considérons $\inf(\mathscr{P})$ comme une fonction de $c = (c_1, \ldots, c_p) \in \mathbf{R}^p$:

$$\inf(\mathscr{P}) = \mathrm{V}(c) \tag{8.42}$$

et nous étudions ses variations autour d'un point $\bar{c} \in \mathbf{R}^p$ donné. On a d'abord une propriété globale :

PROPOSITION 8.8. *La fonction* V *est convexe sur son domaine de finitude.*

Démonstration. Soient c et c' tels que $V(c) \neq \pm \infty$ et $V(c') \neq \pm \infty$. Soient α et β deux scalaires positifs de somme 1. Pour tout $\varepsilon > 0$, on choisit x et x' dans $\mathbf{R}^n$ tels que :

$$f_0(x) \leqslant V(c) + \varepsilon \quad \text{et} \quad f_i(x) \leqslant c_i \quad \text{pour} \quad i = 1, \ldots, p \tag{8.43}$$

$$f_0(x') \leqslant V(c') + \varepsilon \quad \text{et} \quad f_i(x') \leqslant c'_i \quad \text{pour} \quad i = 1, \ldots, p. \tag{8.44}$$

On a alors, par convexité de f_0 :

$$\begin{aligned} f_0(\alpha x + \beta x') &\leqslant \alpha f_0(x) + \beta f_0(x') \\ &\leqslant \alpha V(c) + \beta V(c') + \varepsilon \end{aligned} \tag{8.45}$$

et par convexité des f_i, $1 \leqslant i \leqslant p$:

$$\begin{aligned} f_i(\alpha x + \beta x') &\leqslant \alpha f_i(x) + \beta f_i(x') \\ &\leqslant \alpha c + \beta c'. \end{aligned} \tag{8.46}$$

On conclut que :

$$V(\alpha c + \beta c') \leqslant f_0(\alpha x + \beta x') \leqslant \alpha V(c) + \beta V(c') + \varepsilon. \tag{8.47}$$

Comme $\varepsilon > 0$ est arbitraire, on en déduit l'inégalité cherchée :

$$V(\alpha c + \beta c') \leqslant \alpha V(c) + \beta V(c'). \blacksquare \tag{8.48}$$

Le résultat fondamental est le suivant :

PROPOSITION 8.9. *Supposons que pour* $c = \bar{c}$, *le programme convexe* $(\mathscr{P})$ *soit normal et que* $\inf(\mathscr{P}) \neq \pm \infty$. *Alors il est équivalent de dire :*

a) *pour* $c = \bar{c}$, *le problème* $(\mathscr{P})$ *admet* $(\bar{\lambda}^1, \ldots, \bar{\lambda}^p)$ *comme multiplicateurs de Lagrange.*

b) $\forall c \in \mathrm{R}^p$, $\mathrm{V}(c) \geqslant \mathrm{V}(\bar{c}) - \langle \bar{\lambda}, c - \bar{c} \rangle$.

Démonstration. Dire que $(\bar{\lambda}^1, \ldots, \bar{\lambda}^p)$ sont des multiplicateurs de Lagrange signifie que $\bar{\lambda}$ est un maxinf, c'est-à-dire que $\beta = \inf_x \mathrm{L}(x, \bar{\lambda})$; ceci s'écrit :

$$\mathrm{V}(\bar{c}) = \inf_{x \in \mathbf{R}^n} \{ f_0(x) + \sum_{j=1}^{p} \bar{\lambda}^j f_j(x) \} - \sum_{j=1}^{p} \bar{\lambda}^j \bar{c}_j. \quad (8.50)$$

A fortiori, comme les $\bar{\lambda}^j$ sont positifs ou nuls :

$$\begin{aligned}
\mathrm{V}(\bar{c}) &= \inf_{x \in \mathbf{R}^n} \inf_{\substack{c \in \mathbf{R}^p \\ c_j \geqslant f_j(x)}} \{ f_0(x) + \sum_{j=1}^{p} \bar{\lambda}^j c_j \} - \sum_{j=1}^{p} \bar{\lambda}^j \bar{c}_j \\
&= \inf_{c \in \mathbf{R}^p} \inf_{\substack{x \in \mathbf{R}^n \\ f_j(x) \leqslant c_j}} \{ f_0(x) + \sum_{j=1}^{p} \bar{\lambda}^j c_j \} - \sum_{j=1}^{p} \bar{\lambda}^j \bar{c}_j \\
&= \inf_{c \in \mathbf{R}^p} \{ \sum_{j=1}^{p} \bar{\lambda}^j c_j + \inf_{\substack{x \in \mathbf{R}^n \\ f_j(x) \leqslant c_j}} f_0(x) \} - \sum_{j=1}^{p} \bar{\lambda}^j \bar{c}_j \\
&= \inf_{c \in \mathbf{R}^p} \{ \sum_{j=1}^{p} \bar{\lambda}^j c_j + \mathrm{V}(c) \} - \sum_{j=1}^{p} \bar{\lambda}^j \bar{c}_j. \qquad (8.51)
\end{aligned}$$

Donc (8.50) équivaut à $\mathrm{V}(c) \geqslant \mathrm{V}(\bar{c}) - \sum_{j=1}^{p} \bar{\lambda}^j (c_j - \bar{c}_j)$ pour tout $c \in \mathrm{R}^p$, ce qui est le résultat annoncé. ∎

On a là un résultat de sensibilité de la valeur $\mathrm{V}(c)$ du problème aux contraintes c. Si, par exemple, on relâche (resp. on resserre) les contraintes, c'est-à-dire qu'on augmente (resp. on diminue) tous les c_i, le domaine permis va s'agrandir (resp. se rétrécir) et la valeur du problème va donc diminuer (resp. augmenter). La proposition 8.9 permet d'estimer cette variation : si on a relâché (resp. resserré) les contraintes de $\Delta c \in \mathrm{R}_+^p$, la valeur du problème diminuera au plus de $\langle \bar{\lambda}, \Delta c \rangle$ (resp. augmentera au moins de $\langle \bar{\lambda}, \Delta c \rangle$). On peut avoir un résultat plus précis :

COROLLAIRE 8.10. *Supposons que, pour* $c = \bar{c}$, *le programme convexe* $(\mathscr{P})$ *soit normal,* $\inf(\mathscr{P}) \neq \pm\infty$, *et admette un seul système* $(\bar{\lambda}^1, \ldots, \bar{\lambda}^p)$ *de multiplicateurs de Lagrange. Alors la fonction* V *est dérivable au point* $\bar{c}$ *dans toutes les directions, et :*

$$\forall c \in \mathbf{R}^p, \quad \frac{d}{dt} \mathrm{V}(\bar{c} + t(c - \bar{c}))\Big|_{t=0} = -\langle \bar{\lambda}, c - \bar{c} \rangle. \tag{8.52}$$

Démonstration. Notons $v : \mathbf{R} \to \overline{\mathbf{R}}$ la fonction :

$$v(t) = \mathrm{V}(\bar{c} + t(c - \bar{c})). \tag{8.53}$$

D'après la proposition 8.9 :

$$\lim_{t \to 0_+} \frac{v(-t) - v(0)}{-t} \leqslant \langle -\bar{\lambda}, c - \bar{c} \rangle \leqslant \lim_{t \to 0_+} \frac{v(t) - v(0)}{t}. \tag{8.54}$$

Comme v est convexe sur son domaine de finitude (prop. 8.8), $\dfrac{v(-t) - v(0)}{-t}$ est une fonction décroissante de t, $\dfrac{v(t) - v(0)}{t}$ est une fonction croissante de t, ce qui fait que les limites au premier et au troisième membre de (8.54) existent. Il suffit de montrer qu'elles sont égales.

Si elles ne l'étaient pas, il existerait un nombre :

$$u \neq \langle -\bar{\lambda}, c - \bar{c} \rangle$$

tel que :

$$\lim_{t \to 0_+} \frac{v(-t) - v(0)}{-t} \leqslant u \leqslant \lim_{t \to 0_+} \frac{v(t) - v(0)}{t}. \tag{8.55}$$

Comme v est convexe, la fonction $t \to tu + v(0)$ minorerait v sur R tout entier. Considérons alors dans $\mathbf{R}^p \times \mathbf{R}$ la droite :

$$\mathrm{D} = \{ (\bar{c} + t(c - \bar{c}), tu + \mathrm{V}(\bar{c}) \mid t \in \mathbf{R} \}$$

et le convexe :

$$C = \{ (\xi, \alpha) \in \mathbf{R}^p \times \mathbf{R} \mid \alpha \geqslant V(\xi) \}.$$

La droite D est située sous le convexe C, et a en commun avec lui le point $(\bar{c}, V(\bar{c}))$. Il existe alors un hyperplan H de $\mathbf{R}^p \times \mathbf{R}$ contenant D et situé au-dessous de D. Mais H est le graphe d'une fonction affine $\xi \to \langle -\lambda, \xi \rangle + \beta$ de $\mathbf{R}^p$ dans $\mathbf{R}$, de telle sorte que :

$$u = \langle -\lambda, c - \bar{c} \rangle \quad \text{et} \quad \beta = V(\bar{c}) + \langle \lambda, \bar{c} \rangle \tag{8.56}$$

$$\forall \xi \in \mathbf{R}^p, \quad V(\xi) \geqslant \langle -\lambda, \xi \rangle + \beta. \tag{8.57}$$

On a donc, en reportant (8.56) dans (8.57) :

$$\forall \xi \in \mathbf{R}^p, \quad V(\xi) \geqslant \langle -\lambda, \xi - \bar{c} \rangle + V(\bar{c}). \tag{8.58}$$

Mais d'après la proposition 8.9, $\lambda = (\lambda^1, \ldots, \lambda^p)$ est un système de multiplicateurs de Lagrange, différent de $\bar{\lambda} = (\bar{\lambda}^1, \ldots, \bar{\lambda}^p)$ puisque $\langle \lambda, c - \bar{c} \rangle \neq \langle \bar{\lambda}, c - \bar{c} \rangle$. On a donc contredit l'hypothèse d'unicité, d'où le résultat. ∎

En particulier, dans le cas d'unicité, on aura :

$$-\bar{\lambda}^j = \frac{\partial V}{\partial c_j} \quad \text{pour} \quad j = 1, \ldots, p. \tag{8.59}$$

Ceci éclaire les conditions d'extrémalité (cor. 8.7). Si, en effet, la j-ième contrainte n'est pas saturée à l'optimum, on peut perturber légèrement c_j sans déplacer la solution $\bar{x}$, et donc $\dfrac{\partial V}{\partial c_j} = 0$, soit $\bar{\lambda}^j = 0$.

Dans un langage économique, on exprimera (8.59) en disant que $-\bar{\lambda}^j$ est le coût marginal de la j-ième contrainte. En microéconomie, on pourra par exemple considérer $(\mathscr{P})$ comme le problème d'un industriel qui fabrique des biens i, $i \leqslant 1 \leqslant n$, à partir de biens j, $1 \leqslant j \leqslant p$, dont il a un stock c_j, $1 \leqslant j \leqslant p$. La fabrication de quantités x_i de bien i, $1 \leqslant i \leqslant n$, nécessite des quantités $f_j(x)$ de bien j, $1 \leqslant i \leqslant p$, et apporte un profit (1) $-f_0(x)$. La solution optimale $\bar{x}$ de $(\mathscr{P})$ donne à l'industriel les quantités à produire pour maximiser le profit tout en respectant les limitations de stocks. Mais les multiplicateurs $(\bar{\lambda}^1, \ldots, \bar{\lambda}^p)$ lui permettent de répondre à la question suivante : sachant qu'il existe un marché pour le bien j au prix p^j, quelle attitude adopter ? L'achat d'une petite quantité supplémentaire Δc_j lui coûtera $p^j \Delta c_j$ mais améliorera son profit (1) de $\bar{\lambda}^j \Delta c_j$. La vente d'une petite quantité Δc_j de son stock lui rapportera $p^j \Delta c_j$ mais diminuera son profit (1) de $\bar{\lambda}^j \Delta c_j$. L'industriel sera acquéreur de bien j si $\bar{\lambda}^j > p^j$, et vendeur de bien j si $\bar{\lambda}^j < p^j$. Il y aura équilibre si $\bar{\lambda}^j = p^j$, c'est-à-dire si le profit marginal est égal au prix du marché. On voit donc que les entreprises sont en équilibre avec le marché si leur profit marginal est, pour chaque bien, égal au prix du marché (à condition, bien entendu, qu'elles ne puissent pas influencer ce prix). On voit aussi que le prix que les utilisateurs sont disposés à payer pour le bien j est fonction de sa rareté relative plutôt que du rôle plus ou moins important qu'il joue dans le processus de production. C'est ainsi que l'air est un bien économique indispensable, mais dont le prix est nul : c'est qu'il est disponible en quantité suffisante pour que la contrainte correspondante ne soit pas saturée, et donc que le multiplicateur associé soit nul. On rencontre là le principe macroéconomique de la rémunération au profit marginal : on paie tout l'air que l'on consomme au prix que l'on est disposé à payer pour un litre supplémentaire, c'est-à-dire rien du tout.

d) *Le problème dual.* Nous avons montré l'importance des multiplicateurs de Lagrange $(\bar{\lambda}^1, \ldots, \bar{\lambda}^p)$ du pro-

(1) Le profit est calculé à stock fixe, en faisant intervenir tous les coûts de fabrication, mais non le coût du stock.

blème $(\mathscr{P})$. Si celui-ci admet une solution optimale $\bar{x}$, on peut obtenir $(\bar{x}, \bar{\lambda})$ comme point-selle du Lagrangien. Mais on peut aussi chercher directement $\bar{\lambda}$ comme maxinf du Lagrangien. Il faut alors introduire la fonction $f^* : \mathbf{R}^p \to \overline{\mathbf{R}}$ définie par :

$$f^*(\lambda) = \inf_{x \in \mathbf{R}^n} \{f_0(x) + \sum_{j=1}^{p} \lambda^j (f_j(x) - c_j)\} \tag{8.60}$$

et résoudre le problème d'optimisation :

$$(\mathscr{P}^*) \begin{cases} \sup f^*(\lambda) \\ \lambda^j \geqslant 0 \quad \text{pour} \quad j = 1, \ldots, p. \end{cases}$$

On dit que $(\mathscr{P}^*)$ est le *problème dual* de $(\mathscr{P})$, appelé lui-même *problème primal*. On remarque que f^* est une enveloppe inférieure de fonctions affines : elle est donc concave sur son domaine de finitude. Le problème primal $(\mathscr{P})$ consiste à minimiser une fonction convexe de n variables, le problème dual $(\mathscr{P}^*)$ consiste à maximiser une fonction concave de p variables. Avec cette nouvelle définition, le théorème 8.4 s'énonce :

Proposition 8.11. *Supposons que le primal $(\mathscr{P})$ soit normal et que* $\inf(\mathscr{P}) \neq \pm\infty$. *Alors le dual $(\mathscr{P}^*)$ a des solutions optimales $\bar{\lambda}$, et il a même valeur que le primal :*

$$\inf(\mathscr{P}) = \max(\mathscr{P}^*). \tag{8.61}$$

L'équation (8.61), valable même si le primal $(\mathscr{P})$ n'a pas de solution optimale, nous donne sa valeur dès qu'on a résolu le dual $(\mathscr{P}^*)$. En outre, dire que $\bar{\lambda}$ est solution optimale du dual $(\mathscr{P}^*)$ veut dire que c'est un maxinf du Lagrangien L, et donc que ses composantes $(\bar{\lambda}^1, \ldots, \bar{\lambda}^p)$ sont des multiplicateurs de Lagrange pour $(\mathscr{P})$. Nous allons expliciter le dual $(\mathscr{P}^*)$ dans deux cas particulièrement importants : la programmation quadratique et la programmation linéaire.

1. *Programmation quadratique*

On appelle programme quadratique un problème d'optimisation du type suivant :

$$(\mathscr{Q})\begin{cases}\inf \frac{1}{2}\langle Ax, x\rangle - \langle b, x\rangle \\ Bx \leqslant c\end{cases}$$

où $A \in \mathscr{L}(\mathbf{R}^n, \mathbf{R}^n)$, $B \in \mathscr{L}(\mathbf{R}^n, \mathbf{R}^p)$, $b \in \mathbf{R}^n$ et $c \in \mathbf{R}^p$. On suppose que la matrice A est symétrique et que la forme quadratique $\langle Ax, x\rangle$ est définie positive. La notation $Bx \leqslant c$ exprime que $c - Bx \in \mathbf{R}^p_+$; on a donc là p contraintes linéaires. Le programme $(\mathscr{Q})$ est donc convexe et normal. Les hypothèses faites impliquent que A est diagonalisable sur une base orthonormée, la plus petite valeur propre étant $a > 0$. On en déduit que A est inversible, et que :

$$\forall x \in \mathbf{R}^n, \qquad \langle Ax, x\rangle \geqslant a\,\|x\|^2.$$

Le critère est donc strictement convexe et tend vers $+\infty$ quand $\|x\| \to \infty$. On en déduit, par un argument de compacité, que le problème $(\mathscr{Q})$ a une solution optimale unique. Donc $\inf(\mathscr{Q}) \neq -\infty$.

La fonction objectif du problème dual s'écrit :

$$f^*(\lambda) = \inf_{x \in \mathbf{R}^n}\left[\tfrac{1}{2}\langle Ax, x\rangle - \langle b, x\rangle + \langle \lambda, Bx - c\rangle\right]. \tag{8.62}$$

La fonction entre crochets est une fonction strictement convexe sur $\mathbf{R}^n$, tendant vers l'infini quand $\|x\| \to \infty$: elle atteint donc son minimum en un point unique x_λ, obtenu en annulant le gradient :

$$Ax_\lambda - b + B^*\lambda = 0$$
$$x_\lambda = A^{-1}(b - B^*\lambda) \tag{8.63}$$

en notant B^* la transposée de B. En reportant dans (8.62) :

$$f^*(\lambda) = -\tfrac{1}{2}\langle A^{-1}(b - B^*\lambda), b - B^*\lambda\rangle - \langle \lambda, c\rangle. \tag{8.64}$$

D'où le problème dual :

$$(\mathcal{Q}^*)\begin{cases}\max\,[-\tfrac{1}{2}\langle A^{-1}(b-B^*\lambda), b-B^*\lambda\rangle - \langle\lambda, c\rangle]\\ \lambda^j \geqslant 0 \quad \text{pour} \quad j=1,\ldots,p.\end{cases}$$

Si $\inf(\mathcal{Q}) \neq +\infty$, c'est-à-dire si le domaine permis est non vide, on est dans les conditions d'application de la proposition 8.11.

2. *Programmation linéaire*

On appelle programme linéaire un problème d'optimisation du type suivant :

$$(\mathcal{L})\begin{cases}\inf \sum_{i=1}^{n} b^i x_i\\ x_i \geqslant 0 \quad \text{pour} \quad i=1,\ldots,n\\ \sum_{i=1}^{n} a^i_j x_i \geqslant c_j \quad \text{pour} \quad j=1,\ldots,p\end{cases}$$

qui s'écrit aussi, avec des notations évidentes :

$$(\mathcal{L})\begin{cases}\inf\langle b, x\rangle\\ x \geqslant 0\\ Ax \geqslant c.\end{cases}$$

Le programme $(\mathcal{L})$ est trivialement convexe et normal. On notera $(\overline{\mu}^1, \ldots, \overline{\mu}^n)$ et $(\overline{\lambda}^1, \ldots, \overline{\lambda}^p)$ les multiplicateurs de Lagrange associés respectivement aux n premières contraintes et aux p dernières. La fonction objectif du problème dual s'écrit alors :

$$\begin{aligned} f^*(\mu, \lambda) &= \inf_{x\in\mathbf{R}^n}\Big\{\sum_{i=1}^{n} b_i x_i - \sum_{i=1}^{n}\mu^i x_i + \sum_{j=1}^{p}\lambda^j\big(c_j - \sum_{i=1}^{n} a^i_j x_i\big)\Big\}\\ &= \inf_{x\in\mathbf{R}^n}\Big\{\sum_{i=1}^{n}\big(b_i - \mu^i - \sum_{j=1}^{p} a^i_j\lambda^j\big)x_i + \sum_{j=1}^{p}\lambda^j c_j\Big\}. \end{aligned} \tag{8.65}$$

Il est clair que cette borne inférieure est $-\infty$, sauf si les coefficients des x_i sont nuls pour tout i. Il peut donc se présenter deux cas :

(i) ou bien $\exists i : (b^i - \sum_{j=1}^{p} a^i_j \lambda^j) < 0$. Dans ce cas, quels que soient les $\mu^i \geqslant 0$, l'objectif vaut $-\infty$;

(ii) ou bien $\forall i : (b^i - \sum_{j=1}^{p} a^i_j \lambda^j) \geqslant 0$. Dans ce cas, l'objectif vaut $\sum_{j=1}^{p} \lambda^j c_j$ si $\mu^i = b^i - \sum_{j=1}^{p} a^i_j \lambda^j$ pour tout i, et $-\infty$ sinon.

On obtient donc les multiplicateurs de Lagrange $(\bar\lambda^1, \ldots, \bar\lambda^p)$ associés aux contraintes $Ax \geqslant c$ comme solution optimale du programme linéaire :

$$(\mathscr{L}^*) \begin{cases} \sup \sum_{j=1}^{p} \lambda^j c_j \\ \lambda^j \geqslant 0 \quad \text{pour} \quad j = 1, \ldots, p \\ \sum_{j=1}^{p} a^i_j \lambda^j \leqslant b^i \quad \text{pour} \quad i = 1, \ldots, p \end{cases}$$

et les multiplicateurs associés aux contraintes $x \geqslant 0$ s'en déduisent par :

$$\bar\mu^i = b^i - \sum_{j=1}^{p} a^i_j \bar\lambda^j \quad \text{pour} \quad i = 1, \ldots, n. \tag{8.66}$$

Ceci s'écrit encore, en notant A^* la transposée de A :

$$(\mathscr{L}^*) \begin{cases} \sup \langle c, \lambda \rangle \\ \lambda \geqslant 0 \\ A^*\lambda \leqslant b \end{cases}$$

$$\bar\mu = b - A^*\bar\lambda. \tag{8.67}$$

$(\mathscr{L})$ est un programme linéaire à n variables positives ou nulles et p contraintes, $(\mathscr{L}^*)$ est un programme linéaire à p variables positives ou nulles et n contraintes. On dit que $(\mathscr{L}^*)$ est le programme linéaire dual de $(\mathscr{L})$. Mais $(\mathscr{L})$ est également le programme linéaire dual de $(\mathscr{L}^*)$, comme on le vérifie aisément. Pour exprimer que $(\mathscr{L})$ et $(\mathscr{L}^*)$ jouent des rôles symétriques, on dit volontiers que ce sont deux programmes linéaires en dualité.

Les résultats généraux comme la proposition 8.11 prennent ici une forme particulièrement simple :

THÉORÈME 8.12. *Il est équivalent de dire :*

a) *le primal* $(\mathscr{L})$ *a une solution optimale* $\bar{x}$
a′) *le primal* $(\mathscr{L})$ *a une valeur finie*
b) *le dual* $(\mathscr{L}^*)$ *a une solution optimale* $\bar{\lambda}$
b′) *le dual* $(\mathscr{L}^*)$ *a une valeur finie*
c) *le primal* $(\mathscr{L})$ *et le dual* $(\mathscr{L}^*)$ *ont des points admissibles.*

Si ces conditions sont satisfaites, on a en outre :

$$\min(\mathscr{L}) = \max(\mathscr{L}^*) \tag{8.68}$$

$$\bar{\lambda}^j\Big(\sum_{i=1}^{n} a^i_j \bar{x}_i - c_j\Big) = 0 \quad \textit{pour} \quad j = 1, \ldots, p \tag{8.69}$$

$$\Big(b^i - \sum_{j=1}^{p} a^i_j \bar{\lambda}^j\Big)\, \bar{x}_i = 0 \quad \textit{pour} \quad i = 1, \ldots, n. \tag{8.70}$$

Démonstration. La condition a′) s'écrit $\inf(\mathscr{L}) \neq \pm\infty$; d'après le théorème 8.4, son dual $(\mathscr{L}^*)$ a une solution optimale $\bar{\lambda}$ et vérifie (8.68). Donc a′) $\Rightarrow$ b). La condition b′) s'écrit $\sup(\mathscr{L}^*) = \pm\infty$; d'après le théorème 8.4, son dual $(\mathscr{L})$ a une solution optimale $\bar{x}$ et vérifie (8.68). Donc b′) $\Rightarrow$ a). Il est clair que a) $\Rightarrow$ a′) et b) $\Rightarrow$ b′). Donc toutes les conditions a), a′), b), b′) sont équivalentes et impliquent (8.68).

Elles impliquent aussi c) puisque les solutions optimales sont des points admissibles. Réciproquement, si la condition c) est satisfaite, on a :

$$\beta = \inf\ (\mathscr{L}) < +\ \infty \tag{8.71}$$

$$\alpha = \sup\ (\mathscr{L}^{\bullet}) > -\ \infty. \tag{8.72}$$

Mais on a toujours $\alpha \leqslant \beta$, d'où :

$$-\ \infty < \sup\ (\mathscr{L}^{\bullet}) \leqslant \inf\ (\mathscr{L}) < +\ \infty. \tag{8.73}$$

Donc c) implique a′) et b′). On a ainsi établi l'équivalence annoncée, ainsi que (8.68). Les relations (8.69) et (8.70) ne sont autres que les relations d'extrémalité (cor. 8.7). ❙

On voit combien la situation est simple : ou bien les deux programmes linéaires en dualité ont tous deux des solutions optimales; ou bien l'un n'a pas de point admissible et l'autre pas de solution optimale ; ou bien aucun des deux n'a de point admissible. Les relations (8.69) et (8.70) expriment que les contraintes du primal et du dual sont en correspondance biunivoque de telle sorte que, sur deux contraintes associées, l'une au moins est saturée à l'optimum.

e) *Cas des liaisons.* Nous terminons ce chapitre en explicitant le cas où le problème $(\mathscr{P})$ est donné sous la forme :

$$(\mathscr{P}) \begin{cases} \inf f_0(x) & \\ f_j(x) \leqslant c_j & \text{pour} \quad j = 1, \ldots, p \\ \ell_k(x) = d_k & \text{pour} \quad k = 1, \ldots, q \end{cases}$$

où les $f_j : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R},\ 1 \leqslant j \leqslant p,$ sont des fonctions convexes et les $\ell_k : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R},\ 1 \leqslant k \leqslant q,$ des formes linéaires. On se ramène à la forme classique en l'écrivant :

$$(\mathscr{P}) \begin{cases} \inf f_0(x) & \\ f_j(x) \leqslant c_j & \text{pour} \quad j = 1, \ldots, p \\ \ell_k(x) \leqslant d_k & \text{pour} \quad k = 1, \ldots, q \\ -\ \ell_k(x) \leqslant -\ d_k & \text{pour} \quad k = 1, \ldots, q. \end{cases}$$

Supposons $(\mathscr{P})$ normal. C'est uniquement une hypothèse sur les contraintes $f_j(x) \leqslant c_j$; les liaisons $\ell_k(x) = d_k$ ne sont pas concernées puisqu'elles sont linéaires. On dispose alors de multiplicateurs de Lagrange :

$$0 \leqslant \bar{\lambda}^j \quad \text{pour} \quad f_j(x) \leqslant c_j \tag{8.74}$$

$$0 \leqslant \bar{\mu}^k \quad \text{pour} \quad \ell_k(x) \leqslant d_k \tag{8.75}$$

$$0 \leqslant \bar{\nu}^k \quad \text{pour} \quad -\ell_k(x) \leqslant -d_k, \tag{8.76}$$

et on écrit le Lagrangien :

$$\mathbf{L}(x, \lambda, \mu, \nu) = f_0(x) + \sum_{j=1}^{p} \lambda^j (f_j(x) - c_j) + \sum_{k=1}^{q} (\mu^k - \nu^k)(\ell_k(x) - d_k). \tag{8.77}$$

On voit que $\mu \in \mathbf{R}^q_+$ et $\nu \in \mathbf{R}^q_+$ n'interviennent que par leur différence $\pi = \mu - \nu$. Mais celle-ci peut être n'importe quel élément de $\mathbf{R}^q$. On est donc conduit au Lagrangien :

$$\mathrm{L}(x, \lambda, \pi) = f_0(x) + \sum_{j=1}^{p} \lambda^j (f_j(x) - c_j) + \sum_{k=1}^{q} \pi^k (\ell_k(x) - d_k) \tag{8.78}$$

où les λ^j sont positifs ou nuls et les π^k de signe quelconque. Réénonçons alors les principaux résultats.

Si le programme convexe $(\mathscr{P})$ est normal, et si $\inf(\mathscr{P}) \neq \pm \infty$, alors son Lagrangien possède un maxinf $(\bar{\lambda}, \bar{\pi}) \in \mathbf{R}^p_+ \times \mathbf{R}^q$:

$$\inf_x \mathrm{L}(x, \bar{\lambda}, \bar{\pi}) = \beta = \alpha. \tag{8.79}$$

Un point $\bar{x} \in \mathbf{R}^n$ est solution optimale de $(\mathscr{P})$ si et seulement si :

$$\min_x \mathrm{L}(x, \bar{\lambda}, \bar{\pi}) = \mathrm{L}(\bar{x}, \bar{\lambda}, \bar{\pi}) = \max_{\substack{\lambda \geqslant 0 \\ \pi}} \mathrm{L}(\bar{x}, \lambda, \pi). \tag{8.80}$$

Si maintenant on fait varier c dans $\mathbf{R}^p$ et d dans $\mathbf{R}^q$, on note $V(c, d)$ la valeur du problème $(\mathscr{P})$ en fonction de c et d. La fonction V est alors convexe sur son domaine de finitude, et si en $(\bar{c}, \bar{d})$ le problème $(\mathscr{P})$ est normal, et admet un seul système $(\bar{\lambda}, \bar{\pi})$ de multiplicateurs de Lagrange, on a :

$$-\frac{\partial V}{\partial c_j}(\bar{c}, \bar{d}) = \bar{\lambda}^j \quad \text{pour} \quad j = 1, \ldots, p. \tag{8.81}$$

$$-\frac{\partial V}{\partial d_k}(\bar{c}, \bar{d}) = \bar{\pi}^k \quad \text{pour} \quad k = 1, \ldots, q. \tag{8.82}$$

CHAPITRE II

Jeux coopératifs

1. Jeux coopératifs avec paiements latéraux

Pour faire comprendre la notion de jeu coopératif avec paiements latéraux, partons d'un jeu à n personnes sous forme normale $(\Sigma_i, G_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$, où Σ_i est l'ensemble des stratégies du joueur i et $G_i : \prod_{i=1}^{n} \Sigma_i \to \mathbf{R}$ son gain. On admettra que la coopération entre joueurs ne rencontre aucun obstacle, matériel, sociologique, psychologique, ni de quelque ordre que ce soit : chaque joueur est informé de toutes les possibilités qui s'offrent à lui, et cherche à maximiser son gain. On admettra en outre que les gains sont évalués dans une unité commune à tous les joueurs, et que chacun a le droit de transférer une partie de son gain sur un partenaire.

Chaque joueur cherchera donc des partenaires dont l'action conjuguée lui permette de gagner plus que par lui-même. Il peut même acheter le concours de joueurs placés dans une position clé en leur promettant une partie du gain supplémentaire réalisé grâce à leur collaboration. On verra donc se former des coalitions, agissant de concert, et redistribuant les gains de leurs membres. Prenons un exemple simple : un milliardaire a trois neveux et lègue sa fortune à celui qu'ils désigneront à la majorité. Si l'on autorise la coopération et les paiements latéraux entre joueurs, il est probable qu'on verra deux des neveux s'entendre pour voter sur un même nom (coopération), l'héritier reversant ensuite la moitié de la fortune à son partenaire (paiement latéral).

Il nous faudra donc examiner toutes les coalitions susceptibles de se former, c'est-à-dire toutes les parties S de $N = \{1, \ldots, n\}$. Lorsqu'une coalition S se sera formée, elle encaissera tous les gains de ses membres, et les leur reversera suivant les conventions préalables. Il est donc naturel de caractériser la force d'une coalition par le gain total qu'elle peut s'assurer contre toute opposition. Supposons donc que tous les autres joueurs se soient ligués contre la coalition S; on est alors ramené à un jeu fini à deux joueurs entre S et N — S, leurs gains respectifs étant $\sum_{i \in S} G_i$ et $\sum_{i \in N-S} G_i$. On sait, d'après le chapitre précédent, que S peut s'assurer contre toute défense le gain :

$$v(S) = \max_{\sigma_i,\ i \in S}\ \min_{\sigma_i,\ i \notin S} \sum_{i=1}^{n} G_i(\sigma_1, \ldots, \sigma_n).$$

Il est clair que, si S et T sont disjoints, la coalition $S \cup T$ peut s'assurer au moins $v(S) + v(T)$, c'est-à-dire que :

$$v(S \cup T) \geqslant v(S) + v(T).$$

Par souci de cohérence, on pose $v(\varnothing) = 0$.

Nous définissons maintenant de façon générale un jeu coopératif avec paiements latéraux; la motivation ressort de ce qui précède.

DÉFINITION 1.1. *Un jeu à n personnes, coopératif, avec paiements latéraux, sous forme caractéristique, est un couple* (N, v), *où* $N = \{1, \ldots, n\}$ *est l'ensemble des joueurs, et* $v : \mathscr{P}(N) \to \mathbf{R}$, *fonction caractéristique du jeu, vérifie :*

$$S \cap T = \varnothing \Rightarrow v(S \cup T) \geqslant v(S) + v(T).$$

On sait fort peu de choses sur les jeux coopératifs à n personnes. Ce qu'on sait concerne surtout des procédures d'arbitrage qui, dans une certaine mesure, dispensent de jouer. C'est l'une de celles-ci que nous allons étudier, pour arriver à la notion de noyau [1] du jeu.

Remarquons d'abord que, quelles que soient les coalitions qui se forment, le total des gains individuels est toujours inférieur ou égal à $v(\mathrm{N})$. Il lui est égal si c'est la grande coalition, N, qui se forme, c'est-à-dire si tous les joueurs agissent à l'unisson. Il faut donc s'assurer le concours de chacun, et pour cela partager le butin total $v(\mathrm{N})$ de façon à intéresser tous les joueurs.

Supposons donc que les n joueurs se rassemblent sous la présidence d'un arbitre, qui leur propose à chacun une part de butin, u_i au joueur i. Pour obtenir l'accord de tous, il faut au moins que :

$$\forall i \in \mathrm{N}, \qquad u_i \geqslant v(\{i\}). \tag{1.1}$$

On ne saurait faire rentrer le joueur i dans une coalition en lui proposant moins qu'il ne gagnerait à lui tout seul.

$$\sum_{i=1}^{n} u_i = v(\mathrm{N}). \tag{1.2}$$

Les n joueurs agissant ensemble ne peuvent gagner plus de $v(\mathrm{N})$: si donc $v(\mathrm{N}) < \sum_{i=1}^{n} u_i$, cela revient à vendre la peau de l'ours avant de l'avoir tué. Mais ils peuvent gagner exactement $v(\mathrm{N})$: un partage tel que $\sum_{i=1}^{n} u_i < v(\mathrm{N})$ ne sera donc pas accepté, car cela revient à gaspiller la

[1] Certains auteurs parlent de « cœur » dans cette acception, les deux vocables n'étant que deux traductions également mauvaises du mot anglais *core*.

quantité $v(\mathrm{N}) - \sum_{i=1}^{n} u_i$. Le premier critère d'un arbitrage acceptable nous conduit donc à la définition suivante :

DÉFINITION 1.2. *Un vecteur* $u = (u_1, \ldots, u_n) \in \mathbf{R}^n$ *vérifiant* (1.1) *et* (1.2) *est appelé une imputation.*

Mais ce premier critère est encore insuffisant. Il faut en introduire un second :

DÉFINITION 1.3. *On dit qu'une imputation* $u \in \mathbf{R}^n$ *est bloquée par la coalition* S *s'il existe un vecteur* $u^{\mathrm{S}} \in \mathbf{R}^{\mathrm{S}}$ *tel que :*

$$\forall\, i \in \mathrm{S}, \qquad u_i^{\mathrm{S}} > u_i \tag{1.3}$$

$$\sum_{i \in \mathrm{S}} u_i^{\mathrm{S}} = v(\mathrm{S}). \tag{1.4}$$

On appelle noyau du jeu l'ensemble des imputations qui ne sont bloquées par aucune coalition.

On a immédiatement la caractérisation suivante :

PROPOSITION 1.4. *Une imputation u appartient au noyau du jeu si et seulement si :*

$$\forall\, \mathrm{S} \in \mathscr{P}(\mathrm{N}), \qquad \sum_{i \in \mathrm{S}} u_i \geqslant v(\mathrm{S}). \tag{1.5}$$

Démonstration. Nions (1.5) :

$$\exists\, \mathrm{S} \in \mathscr{P}(\mathrm{N}) : \qquad \sum_{i \in \mathrm{S}} u_i < v(\mathrm{S}). \tag{1.6}$$

De la définition 1.3 il résulte immédiatement que (1.6) signifie que l'imputation u est bloquée par la coalition S. D'où le résultat. ∎

Le noyau du jeu est l'ensemble des arbitrages acceptables. Si l'arbitre propose une imputation u qui n'est pas dans le noyau, c'est-à-dire qui est bloquée par une coalition S, les joueurs de S vont la refuser. En effet, ils peuvent faire scission, gagner un butin $v(\mathrm{S})$ quoi que fassent les autres, et le partager en donnant à chacun des partenaires $i \in \mathrm{S}$ une part u_i^{S} meilleure que ce que lui allouait l'arbitre (formules (1.3) et (1.4)). Si au contraire celui-ci propose une imputation u du noyau, il dissuade les scissions. Si, en effet, la coalition S se formait pour rejeter l'arbitrage, elle risquerait de voir la coalition N — S se former contre elle et limiter ses gains à $v(\mathrm{S})$. Dans ce cas, quelle que soit la façon v^{S} de partager ce butin, on aurait :

$$\sum_{i \in \mathrm{S}} v_i^{\mathrm{S}} = v(\mathrm{S}) \leqslant \sum_{i \in \mathrm{S}} u_i,$$

d'après la proposition 1.4. Ou bien donc $v_i^{\mathrm{S}} = u_i$ pour tout i de S, et ce serait le *statu quo ante* pour les membres de la coalition, ou bien il y aurait un i de S pour lequel $v_i^{\mathrm{S}} < u_i$, et la coalition léserait un de ses membres.

2. Non-vacuité du noyau

Le noyau est-il non vide ? La réponse à cette simple question est étonnamment compliquée, mais d'elle dépend tout l'intérêt de la notion. Commençons par donner quelques exemples.

Exemple 2.1. *Jeu de la pollution.* Chacun des n joueurs possède un jardin propre et une poubelle pleine. Le jeu consiste à vider sa poubelle dans le jardin de quelqu'un; si p poubelles ont été déversées dans le jardin du joueur i, le gain de celui-ci est $-p$.

On forme facilement la fonction caractéristique du jeu :

$$v(\mathrm{N}) = -n$$
$$v(\mathrm{S}) = p - n \quad \text{si} \quad 0 < p = \mathrm{Card}\,\mathrm{S} < n.$$

Soit u une imputation du noyau. Notons S_j la coalition groupant tous les joueurs sauf le j-ième. On a :

$$\sum_{i \neq j} u_i \geqslant v(S_j) = -1.$$

En sommant ces inégalités de $j = 1$ à n :

$$(n-1) \sum_{i=1}^{n} u_i \geqslant -n.$$

Mais $\sum_{i=1}^{n} u_i = -n$, et en reportant, on obtient $n(n-1) \leqslant n$, soit $n \leqslant 2$. Donc, le noyau du jeu est vide si $n > 2$.

Exemple 2.2. Considérons un jeu à trois joueurs dont la fonction caractéristique est :

$$\begin{aligned} &v(\{1, 2, 3\}) = 1. \\ &v(\{1, 2\}) = v(\{1, 3\}) = v(\{2, 3\}) = a, \quad 0 \leqslant a \leqslant 1. \\ &v(\{1\}) = v(\{2\}) = v(\{3\}) = 0. \end{aligned}$$

Si $a > \frac{2}{3}$, le noyau du jeu est vide, car de quelque façon que l'on partage 1, il y aura toujours deux joueurs qui auront moins de a à eux deux, et qui formeront donc une coalition bloquante. Si $a \leqslant \frac{2}{3}$, le noyau du jeu est non vide, et constitué de toutes les imputations qui donnent au moins a à toutes les paires de joueurs. ▮

Il semblerait donc que le noyau du jeu soit non vide à condition que les coalitions intermédiaires ne soient pas trop puissantes. Pour formaliser cette idée, on introduit la notion de jeu compensé [1] :

Définition 2.3. *Une famille de coalitions $\mathcal{B} \subset \mathcal{P}(N)$ est dite compensée s'il existe une famille $(\gamma_S)_{S \in \mathcal{B}}$ de coefficients positifs tels que :*

$$\forall i \in N \qquad \sum_{\substack{S \in \mathcal{B} \\ S \ni i}} \gamma_S = 1.$$

[1] Traduction du mot anglais *balanced*.

THÉORÈME 2.4. *Il est équivalent de dire :*

a) *le noyau du jeu est non vide,*

b) *pour toute famille compensée* $\mathscr{B} \subset \mathscr{P}(\mathrm{N})$, *pour toute famille* $(\gamma_{\mathrm{S}})_{\mathrm{S} \in \mathscr{B}}$ *de coefficients associée, on a :*

$$\sum_{\mathrm{S} \in \mathscr{B}} \gamma_{\mathrm{S}}\, v(\mathrm{S}) \leqslant v(\mathrm{N})$$

c) *si l'on a une famille compensée* $\mathscr{B} \subset \mathscr{P}(\mathrm{N})$ *et un vecteur* $u \in \mathbf{R}^n$ *tel que* $\forall\, \mathrm{S} \in \mathscr{B},\ \sum_{i \in \mathrm{S}} u_i \leqslant v(\mathrm{S})$, *alors :*

$$\sum_{i \in \mathrm{N}} u_i \leqslant v(\mathrm{N}).$$

Dans ces conditions, on dit que le jeu est compensé.

Démonstration. On procède par a) $\Rightarrow$ b) $\Rightarrow$ c) $\Rightarrow$ a).

a) $\Rightarrow$ b). Prenons une imputation $(u_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ appartenant au noyau. On a alors :

$$\sum_{i=1}^{n} u_i = v(\mathrm{N})$$

$$\sum_{i \in \mathrm{S}} u_i \geqslant v(\mathrm{S}) \qquad \forall\, \mathrm{S} \in \mathscr{P}(\mathrm{N}).$$

On écrit ces inégalités pour tout $\mathrm{S} \in \mathscr{B}$, on multiplie par γ_{S} et on ajoute :

$$\sum_{\mathrm{S} \in \mathscr{B}} \gamma_{\mathrm{S}}\, v(\mathrm{S}) \leqslant \sum_{\mathrm{S} \in \mathscr{B}} \sum_{\mathrm{S} \ni i} \gamma_{\mathrm{S}}\, u_i .$$

En réécrivant le second membre :

$$\sum_{\mathrm{S} \in \mathscr{B}} \gamma_{\mathrm{S}}\, v(\mathrm{S}) \leqslant \sum_{i=1}^{n} \Big(\sum_{\substack{\mathrm{S} \in \mathscr{B} \\ \mathrm{S} \ni i}} \gamma_{\mathrm{S}} \Big)\, u_i = \sum_{i=1}^{n} u_i .$$

Donc $\sum_{\mathrm{S} \in \mathscr{B}} \gamma_{\mathrm{S}}\, v(\mathrm{S}) \leqslant v(\mathrm{N})$.

b) $\Rightarrow$ c). On suppose donc que :

$$\sum_{i \in \mathrm{S}} u_i \leqslant v(\mathrm{S}) \qquad \forall\, \mathrm{S} \in \mathscr{B}.$$

En multipliant par $\gamma(S)$ et en ajoutant :

$$\sum_{S \in \mathscr{B}} \sum_{i \in S} \gamma_S u_i \leqslant \sum_{S \in \mathscr{B}} \gamma_S v(S).$$

Par hypothèse, le second membre est $\leqslant v(N)$. En réécrivant le premier membre :

$$\sum_{i=1}^{n} \Big(\sum_{\substack{S \in \mathscr{B} \\ S \ni i}} \gamma_S \Big) u_i \leqslant v(N)$$

$$\sum_{i=1}^{n} u_i \leqslant v(N).$$

c) $\Rightarrow$ a). Il s'agit de montrer que le noyau du jeu est non vide, c'est-à-dire qu'il existe $\bar{u} \in \mathbf{R}^n$ tel que :

$$\sum_{i \in S} \bar{u}_i \geqslant v(S) \qquad \forall\, S \in \mathscr{P}(N)$$

$$\sum_{i=1}^{n} \bar{u}_i = v(N).$$

En d'autres termes, il s'agit de montrer que le programme linéaire :

$$\begin{cases} \displaystyle\sum_{i \in S} u_i \geqslant v(S) \qquad \forall\, S \in \mathscr{P}(N) \\ \text{minimiser } \displaystyle\sum_{i=1}^{n} u_i \end{cases}$$

a une solution optimale $(\bar{u}_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ et que $\sum_{i=1}^{n} \bar{u}_i = v(N)$.

Examinons donc son dual. En notant γ_S, $S \in \mathscr{P}(N)$, les variables duales, il s'écrit :

$$\begin{cases} \gamma_S \geqslant 0 \qquad \forall\, S \in \mathscr{P}(N) \\ \displaystyle\sum_{S \ni i} \gamma_S = 1 \qquad i = 1, \ldots, n \\ \text{maximiser } \displaystyle\sum_{S \in \mathscr{P}(N)} \gamma_S v(S). \end{cases}$$

L'ensemble permis est clairement un compact non vide de $\mathbf{R}^{\mathscr{P}(N)}$. Ce problème admet donc une solution optimale $(\bar{\gamma}_S)_{S \in \mathscr{P}(N)}$. D'après le théorème fondamental de la programmation linéaire, le problème primal admet donc aussi une solution optimale $(\bar{u}_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$. Les deux solutions sont liées par les relations suivantes : notons $\mathscr{B}$ l'ensemble des contraintes non saturées dans le dual, c'est-à-dire :

$$\mathscr{B} = \{ S \in \mathscr{P}(N) \mid \bar{\gamma}_S > 0 \}.$$

Alors les contraintes correspondantes du primal sont saturées :

$$\sum_{i \in S} \bar{u}_i = v(S) \qquad \forall\, S \in \mathscr{B}.$$

Mais on remarque que $\mathscr{B}$ est une famille compensée, les $(\bar{\gamma}_S)_{S \in \mathscr{B}}$ étant des coefficients associés. D'après l'hypothèse c), on aura :

$$\sum_{i \in N} \bar{u}_i \leqslant v(N).$$

Comme l'inégalité inverse figure dans les contraintes, on a donc :

$$\sum_{i=1}^{n} \bar{u}_i = v(N). \quad \blacksquare$$

Les conditions b) et c) expriment à leur manière que les coalitions intermédiaires ne sont pas trop puissantes. On a donc là la caractérisation que l'on cherchait.

3. Jeux coopératifs sans paiements latéraux

Dorénavant, N désigne l'ensemble $\{1, \ldots, n\}$, et pour toute partie $S \subset N$ on notera :

$$\begin{aligned} \mathbf{R}^S &= \{ u \in \mathbf{R}^n \mid u_i = 0 \quad \forall\, i \notin S \} \\ \mathbf{R}^S_+ &= \{ u \in \mathbf{R}^S \mid u_i \geqslant 0 \quad \forall\, i \in S \} \\ \mathring{\mathbf{R}}^S_+ &= \{ u \in \mathbf{R}^S \mid u_i > 0 \quad \forall\, i \in S \} \end{aligned}$$

et :

$$u \mapsto u^S$$

la projection de $\mathbf{R}^n$ sur $\mathbf{R}^S$.

On peut donner d'un jeu coopératif à n personnes une définition très générale. On interprétera N comme l'ensemble des joueurs, et un vecteur $u \in \mathbf{R}^S$ comme la donnée du gain u_i pour tout i membre de la coalition S. Pour tout $S \subset N$, on se donne un ensemble $\tilde{v}(S) \subset \mathbf{R}^S$ que l'on interprète comme l'ensemble des gains que la coalition S peut garantir à ses membres, quoi que fasse la coalition $N - S$. On doit donc avoir $\tilde{v}(S) \supset \tilde{v}(S) - \mathbf{R}^S_+$: si la coalition peut assurer un certain gain u à ces membres, *a fortiori* peut-elle leur assurer tous les gains $v \leqslant u$.

DÉFINITION 3.1. *On appelle jeu coopératif à n personnes la donnée d'une multi-application* $\tilde{v}$ *de* $\mathscr{P}(N)$ *dans* $\mathbf{R}^n$, *à valeurs non vides, vérifiant :*

$$\forall S \subset N, \quad \tilde{v}(S) - \mathbf{R}^S_+ \subset \tilde{v}(S) \subset \mathbf{R}^S \tag{3.1}$$
$$S \cap T = \varnothing \Rightarrow \tilde{v}(S \cup T) \supset \tilde{v}(S) + \tilde{v}(T). \tag{3.2}$$

Cette définition recouvre le cas particulier où l'on admet les paiements latéraux. En effet, on a alors :

$$\tilde{v}(S) = \{u \in \mathbf{R}^S \mid \sum_{i \in S} u_i \leqslant v(S)\}$$

puisque toutes les compensations sont permises au sein de la coalition. Il suffit donc de connaître la fonction caractéristique v, au lieu de la multi-application $\tilde{v}$, d'où une simplification considérable. Dans le cas général, où l'on n'admet plus les paiements latéraux, l'ensemble $\tilde{v}(S)$ n'est plus un demi-espace, et doit donc être étudié directement. Nous ferons dorénavant l'hypothèse suivante :

(H) $\qquad \forall S \subset N, \quad \tilde{v}(S) = k(S) - \mathbf{R}^S_+,$

où $k(S)$ *est un convexe compact de* $\mathbf{R}^S$.

DÉFINITION 3.2. *On appelle optimum de Pareto tout* $u \in \tilde{v}(N)$ *tel que :*

$$\tilde{v}(N) \cap \{u + \mathbf{R}^n_+\} = \{u\}. \tag{3.3}$$

En d'autres termes, u est un élément maximal pour la relation d'ordre induite par le cône positif $\mathbf{R}_+^n$ sur $\tilde{v}(\mathrm{N})$. C'est là une notion bien connue en économie; elle décrit une situation où la collectivité ne peut améliorer simultanément le sort de tous ses membres : toute augmentation du gain d'un joueur entraînerait une diminution du gain d'un autre. On dispose de quantité d'optima de Pareto, comme le montre la proposition suivante :

PROPOSITION 3.3. *Hypothèse* (H). *Soient* $v \in \tilde{v}(\mathrm{N})$ *et* $\lambda \in \mathbf{R}_+^n$. *Le problème d'optimisation :*

$$\begin{cases} \text{maximiser } \langle \lambda, u \rangle \\ u \in \tilde{v}(\mathrm{N}) \cap \{v + \mathbf{R}_+^n\} \end{cases} \tag{3.4}$$

a des solutions qui sont toutes des optima de Pareto.

Démonstration. Comme $\lambda \in \mathbf{R}_+^n$, il revient au même de maximiser $\langle \lambda, u \rangle$ sur $k(\mathrm{N})$ et sur $k(\mathrm{N}) - \mathbf{R}_+^n$. Le problème (3.4) revient donc à :

$$\begin{cases} \text{maximiser } \langle \lambda, u \rangle \\ u \in k(\mathrm{N}) \cap \{v + \mathbf{R}_+^n\}. \end{cases}$$

Comme on maximise une fonction continue sur un compact, on obtient nécessairement des solutions. Soit $\bar{u}$ l'une d'elles : montrons que c'est un optimum de Pareto. Sinon, il existerait $w \in \tilde{v}(\mathrm{N})$ tel que $w_i \geqslant \bar{u}_i \ \forall i$, avec inégalité stricte pour un i au moins. On aurait donc :

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i w_i > \sum_{i=1}^{n} \lambda_i u_i$$

puisque $\lambda_i \geqslant 0$ pour tout i. Donc $\bar{u}$ ne saurait maximiser $\langle \lambda, u \rangle$. ∎

DÉFINITION 3.4. *Le noyau du jeu* $(\mathrm{N}, \tilde{v})$ *est l'ensemble des* $u \in \mathbf{R}^n$ *tels que :*

$$u \text{ est un optimum de Pareto} \tag{3.5}$$

$$\forall \mathrm{S} \subset \mathrm{N}, \quad u^{\mathrm{S}} \notin v(\mathrm{S}) - \mathring{\mathbf{R}}_+^{\mathrm{S}}. \tag{3.6}$$

La formule (3.6) exprime la condition habituelle de non-blocage : aucune coalition à elle seule ne peut assurer à chacun de ses membres mieux que u. Dans le cas des paiements latéraux, on retombe sur la définition 1.3. Dans le cas général, il est sans doute bon de faire un dessin, ne fût-ce que pour $n = 2$. Nous représentons $\tilde{v}$ (1, 2) en grisé.

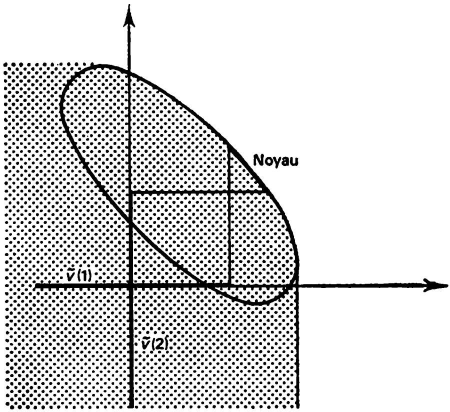


FIG. I

DÉFINITION 3.5. *Le jeu est dit compensé si :*

$$\sum_{S \in \mathscr{B}} \gamma_S \tilde{v}(S) \subset \tilde{v}(N) \tag{3.7}$$

pour toute famille compensée $\mathscr{B} \subset \mathscr{P}(N)$ *et toute famille* $(\gamma_S)_{S \in \mathscr{B}}$ *de coefficients associée.*

Nous avons maintenant étendu au cas général toutes les notions que nous avions introduites dans le cas des paiements latéraux. Nous allons montrer que, sous l'hypothèse (H), tout jeu compensé a un noyau non vide. La démonstration que nous présentons, due à J.-P. Aubin, particularise un résultat beaucoup plus général de Scarf, qui lève l'hypothèse de convexité (H).

LEMME 3.6. *Soit* $\Lambda = \{\lambda \in \mathbf{R}^n_+ \mid \sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 1\}$. *Pour tout* $S \subset N$, *on définit une fonction* $\varphi(S, .)$ *de* Λ *dans* $\mathbf{R}$ *par :*

$$\varphi(S, \lambda) = \max_{u \in \widetilde{v}(S)} \langle \lambda, u \rangle = \max_{u \in k(S)} \sum_{i \in S} \lambda_i u_i . \qquad (3.8)$$

Alors la fonction $\varphi(S, .)$ *est convexe continue, et :*

$$\widetilde{v}(S) = \{u \in \mathbf{R}^S \mid \varphi(S, \lambda) - \langle \lambda, u \rangle \geqslant 0 \quad \forall \lambda \in \Lambda\}. \qquad (3.9)$$

Démonstration. La fonction $\varphi(S, .)$ est définie en (3.8) comme une enveloppe supérieure de fonctions affines : elle est donc convexe. Pour montrer qu'elle est continue, on se sert de la continuité uniforme de l'application $(\lambda, u) \mapsto \langle \lambda, u \rangle$ sur le compact $\Lambda \times k(S)$: pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\eta > 0$ tel que :

$$|\lambda - \mu| \leqslant \eta \Rightarrow |\langle \lambda, u \rangle - \langle \mu, u \rangle| \leqslant \varepsilon \quad \forall u \in k(S).$$

Notons respectivement u_λ et u_μ des points où les fonctions $u \mapsto \langle \lambda, u \rangle$ et $u \mapsto \langle \mu, u \rangle$ atteignent leur maximum sur $k(S)$. Pour $|\lambda - \mu| \leqslant \eta$, on aura donc :

$$\begin{aligned} \varphi(S, \lambda) &= \langle \lambda, u_\lambda \rangle \leqslant \langle \mu, u_\lambda \rangle + \varepsilon \\ &\leqslant \max_{u \in k(S)} \langle \mu, u \rangle + \varepsilon = \varphi(S, \mu) + \varepsilon. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \varphi(S, \mu) &= \langle \mu, u_\mu \rangle \leqslant \langle \lambda, u_\mu \rangle + \varepsilon \\ &\leqslant \max_{u \in k(S)} \langle \lambda, u \rangle + \varepsilon = \varphi(S, \lambda) + \varepsilon. \end{aligned}$$

D'où la continuité de $\varphi(S, .)$:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0 : \quad |\lambda - \mu| \leqslant \eta \Rightarrow |\varphi(S, \lambda) - \varphi(S, \mu)| \leqslant \varepsilon.$$

Passons maintenant à la formule (3.9). Si $u \in \widetilde{v}(S)$, alors $\forall \lambda$, $\langle \lambda, u \rangle \leqslant \varphi(S, \lambda)$ par définition, d'où (3.9). Réciproquement, si $w \notin \widetilde{v}(S)$, d'après le théorème de Hahn-Banach, il existe une forme linéaire $\lambda \in \mathbf{R}^n$ et un nombre $\alpha > 0$ tels que :

$$\langle \lambda, w \rangle > \alpha \tag{3.10}$$

$$\forall u \in \tilde{v}(S), \qquad \langle \lambda, u \rangle < \alpha. \tag{3.11}$$

Mais u peut s'écrire $v - e$, avec $v \in k(S)$ et $e \in \mathbf{R}^n_+$. En reportant dans (3.11), on obtient :

$$\forall e \in \mathbf{R}^n_+, \qquad \langle \lambda, e \rangle > \max_{v \in k(S)} \langle \lambda, v \rangle - \alpha$$

ce qui prouve que $\lambda \in \mathbf{R}^n_+$. On a donc $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i = \beta > 0$, sans quoi $\lambda = 0$; en divisant (3.10) et (3.11) par β, et en posant $\lambda/\beta = \mu \in \Lambda$, on obtient :

$$\langle \mu, w \rangle > \max_{u \in \tilde{v}(S)} \langle \mu, u \rangle = \varphi(S, \mu)$$

et (3.9) est également vérifiée dans ce cas. ❚

Lemme 3.7. *Si le jeu est compensé, si les coefficients λ_i sont positifs de somme* 1, *le programme linéaire :*

$$\begin{cases} \text{minimiser } \sum_{i=1}^{n} \lambda_i u_i \\ \sum_{i \in S} \lambda_i u_i \geqslant \varphi(S, \lambda) \qquad \forall S \subset N \end{cases} \tag{3.12}$$

admet une solution $\bar{u}$ telle que :

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i \bar{u}_i = \varphi(N, \lambda). \tag{3.13}$$

Démonstration. On reprend le raisonnement du théorème 2.4. Le dual du programme linéaire (3.12) s'écrit :

$$\begin{cases} \text{maximiser } \sum_{S \subset N} \gamma_S \, \varphi(S, \lambda) \\ \gamma_S \geqslant 0 \qquad \forall S \subset N \\ \sum_{S \ni i} \lambda_i \gamma_S = \lambda_i . \end{cases} \tag{3.13}$$

Comme tous les λ_i ont été supposés > 0, la dernière contrainte s'écrit aussi $\sum_{S \ni i} \gamma_S = 1$. Le problème dual a une solution $(\bar{\gamma}_S)_{S \subset N}$ puisque le domaine permis est compact. Donc le primal (3.12) a une solution $\bar{u}$. Introduisons la famille compensée :

$$\mathscr{B} = \{S \subset N \mid \gamma_S > 0\}.$$

On a $\sum_{i \in S} \lambda_i \bar{u}_i = \varphi(S, \lambda)$ pour tout $S \in \mathscr{B}$. En multipliant chacune de ces égalités par $\bar{\gamma}_S$, $S \in \mathscr{B}$ et en les ajoutant membre à membre, on obtient :

$$\sum_{S \in \mathscr{B}} \bar{\gamma}_S \sum_{i \in S} \lambda_i \bar{u}_i = \sum_{S \in \mathscr{B}} \bar{\gamma}_S \varphi(S, \lambda)$$

$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{\substack{S \in \mathscr{B} \\ S \ni i}} \bar{\gamma}_S \lambda_i \bar{u}_i = \sum_{S \in \mathscr{B}} \bar{\gamma}_S \varphi(S, \lambda)$$

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i \bar{u}_i = \sum_{S \in \mathscr{B}} \bar{\gamma}_S \varphi(S, \lambda).$$

Le deuxième membre s'écrit aussi :

$$\begin{aligned}\sum_{S \in \mathscr{B}} \bar{\gamma}_S \varphi(S, \lambda) &= \sum_{S \in \mathscr{B}} \bar{\gamma}_S \max_{u^S \in \tilde{v}(S)} \langle u^S, \lambda \rangle \\ &= \max \{ \langle \sum_{S \in \mathscr{B}} \bar{\gamma}_S u^S, \lambda \rangle \mid u^S \in \tilde{v}(S) \quad \forall S \in \mathscr{B} \} \\ &= \max \{ \langle u, \lambda \rangle \mid u \in \sum_{S \in \mathscr{B}} \bar{\gamma}_S \tilde{v}(S) \}.\end{aligned}$$

Comme le jeu est compensé, on obtient facilement :

$$\sum_{S \in \mathscr{B}} \bar{\gamma}_S \varphi(S, \lambda) \leqslant \max_{u \in \tilde{v}(N)} \langle u, \lambda \rangle = \varphi(N, \lambda).$$

Comme les valeurs optimales du primal et du dual sont les mêmes, on obtient finalement :

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i \bar{u}_i = \sum_{S \in \mathscr{B}} \bar{\gamma}_S \varphi(S, \lambda) \leqslant \varphi(N, \lambda).$$

Comme l'inégalité inverse figure dans les contraintes, on a l'égalité. ∎

Soit a le vecteur de $\mathbf{R}^n$ défini par :

$$a_i = \max\{u_i \mid u \in \widetilde{v}(\{i\})\}.$$

Pour tout $\varepsilon > 0$, on pose :

$$\Lambda_\varepsilon = \{\lambda \in \Lambda \mid \lambda_i \geqslant \varepsilon \quad \forall i \in \mathrm{I}\}.$$

LEMME 3.8. *Si le jeu est compensé, pour tout* $\varepsilon > 0$, *il existe* $v_\varepsilon \in a + \mathbf{R}^n_+$ *et* $\mu_\varepsilon \in \Lambda_\varepsilon$ *tels que :*

$$\forall \lambda \in \Lambda_\varepsilon, \qquad \varphi(\mathrm{N}, \lambda) - \langle \lambda, v_\varepsilon \rangle \geqslant 0 \tag{3.14}$$

$$\forall \mathrm{S} \subset \mathrm{N}, \qquad \langle \mu_\varepsilon^{\mathrm{S}}, v_\varepsilon^{\mathrm{S}} \rangle \geqslant \varphi(\mathrm{S}, \mu_\varepsilon). \tag{3.15}$$

Démonstration. On définit deux multi-applications Γ de Λ_ε dans $\mathbf{R}^n$ et G de $\mathbf{R}^n$ dans Λ_ε par :

$$v \in \Gamma(\lambda) \Leftrightarrow \begin{cases} v \text{ minimise } \langle \lambda, u \rangle \text{ sous les contraintes} \\ \qquad \langle \lambda^{\mathrm{S}}, u^{\mathrm{S}} \rangle \geqslant \varphi(\mathrm{S}, \lambda) \quad \forall \mathrm{S} \subset \mathrm{N}. \end{cases}$$

$$\mu \in \mathrm{G}(u) \Leftrightarrow \mu \quad \text{minimise} \quad \varphi(\mathrm{N}, \lambda) - \langle u, \lambda \rangle \quad \text{sur} \quad \Lambda_\varepsilon.$$

Grâce aux lemmes précédents, on voit que ces multi-applications sont à valeurs convexes fermées non vides. La fonction $\varphi(\mathrm{S}, .)$ est continue sur Λ_ε : on en déduit aisément que les graphes de G et de Γ sont fermés.

Si $v \in \Gamma(\lambda)$, on a $\lambda_i v_i \geqslant \varphi(\{i\}, \lambda) = \lambda_i a_i$ pour tout $i \in \mathrm{N}$, donc $v_i \geqslant a_i$ puisque $\lambda_i \geqslant \varepsilon > 0$. Donc :

$$\Gamma(\lambda) \subset a + \mathbf{R}^n_+. \tag{3.16}$$

Prenons maintenant $b \in \mathbf{R}^n$ tel que :

$$\forall i \in \mathrm{N}, \quad \forall \mathrm{S} \subset \mathrm{N}, \qquad b_i \geqslant \max\{u_i \mid u \in k(\mathrm{S})\}.$$

Ces maxima existent puisque les $k(\mathrm{S})$ sont compacts. D'après l'hypothèse (H) on aura aussi :

$$\forall i \in \mathrm{N}, \quad \forall \mathrm{S} \subset \mathrm{N}, \qquad b_i \geqslant \max\{u_i \mid u \in \widetilde{v}(\mathrm{S})\}$$

d'où l'on déduit que :

$$\forall\, S \subset N, \quad \langle \lambda, b \rangle \geqslant \sum_{i \in S} \lambda_i \max\{u_i \mid u \in \widetilde{v}(S)\}$$
$$\geqslant \max_{u \in \widetilde{v}(S)} \langle \lambda, u \rangle = \varphi(S, \lambda).$$

Ainsi, pour tout $\lambda \in \Lambda_\varepsilon$, le point b vérifie les contraintes du programme linéaire qui définit $\Gamma(\lambda)$. On a donc :

$$\forall\, \lambda \in \Lambda_\varepsilon, \quad \forall\, v \in \Gamma(\lambda), \quad \langle \lambda, v \rangle \leqslant \langle \lambda, b \rangle. \qquad (3.17)$$

En retranchant $\langle \lambda, a \rangle$ des deux membres :

$$\forall\, \lambda \in \Lambda_\varepsilon, \quad \forall\, v \in \Gamma(\lambda), \quad \sum_{i=1}^{n} \lambda_i(v_i - a_i) \leqslant \sum_{i=1}^{n} \lambda_i(b_i - a_i).$$

D'après (3.16), $b_i \geqslant v_i \geqslant a_i$. Comme $1 \geqslant \lambda_i \geqslant \varepsilon$, l'inégalité précédente nous donne :

$$\forall\, v \in \Gamma(\lambda), \quad \varepsilon \sum_{i=1}^{n} (v_i - a_i) \leqslant \sum_{i=1}^{n} (b_i - a_i)$$

ou encore :

$$\forall\, v \in \Gamma(\lambda), \quad a_i \leqslant v_i \leqslant a_i + \frac{1}{\varepsilon} \sum_{i=1}^{n} (b_i - a_i).$$

Nous avons donc montré que $\Gamma(\lambda)$ reste dans un compact fixe C quand λ varie dans Λ_ε :

$$C = \{u \in \mathbf{R}^n \mid a_i \leqslant u_i \leqslant a_i + \frac{1}{\varepsilon} \sum_{i=1}^{n} (b_i - a_i)\}.$$

La multi-application $(\lambda, u) \mapsto G(u) \times \Gamma(\lambda)$ envoie donc le compact $\Lambda_\varepsilon \times C$ dans lui-même. Comme elle est de graphe fermé, à valeurs convexes compactes non vides, on peut lui appliquer le théorème de Kakutani : elle admet donc un point fixe $(\mu_\varepsilon, v_\varepsilon)$:

$$\mu_\varepsilon \in \Lambda_\varepsilon, \quad v_\varepsilon \in C, \quad \mu_\varepsilon \in G(v_\varepsilon), \quad v_\varepsilon \in \Gamma(\mu_\varepsilon).$$

Comme $v_\varepsilon \in \Gamma(\mu_\varepsilon)$, on a la formule (3.15) par définition. En outre, d'après le lemme 3.7 :

$$\langle \mu_\varepsilon, v_\varepsilon \rangle = \varphi(N, \mu_\varepsilon). \tag{3.18}$$

Comme $v_\varepsilon \in \Gamma(\mu_\varepsilon)$, on a par définition :

$$\forall \lambda \in \Lambda_\varepsilon, \quad \varphi(N, \lambda) - \langle \lambda, v_\varepsilon \rangle \geqslant \varphi(N, \mu_\varepsilon) - \langle \mu_\varepsilon, v_\varepsilon \rangle.$$

Mais le second membre est nul d'après (3.18), d'où la formule (3.14). ∎

Il ne reste plus qu'à revenir à l'interprétation géométrique et à faire tendre ε vers zéro. Enonçons donc et démontrons le résultat final :

Théorème de Scarf-Aubin. *Tout jeu compensé vérifiant l'hypothèse* (H) *a un noyau non vide.*

Démonstration. Partons du lemme 3.8. La formule (3.15) implique la condition géométrique :

$$\forall S \subset N, \qquad v_\varepsilon^S \notin ri\,\tilde{v}(S) \tag{3.19}$$

où $ri\,\tilde{v}(S)$ désigne l'intérieur de $\tilde{v}(S)$ dans l'espace $\mathbf{R}^S$. Si, en effet, v_ε^S était intérieur à $\tilde{v}(S)$ relativement à $\mathbf{R}^S$, on pourrait choisir $t > 0$ assez petit pour que $v_\varepsilon^S + t\mu_\varepsilon^S \in \tilde{v}(S)$, et on aurait :

$$\langle \mu_\varepsilon^S, v_\varepsilon^S \rangle < \langle \mu_\varepsilon^S, v_\varepsilon^S + t\mu_\varepsilon^S \rangle \leqslant \varphi(S, \mu_\varepsilon^S).$$

Faisons maintenant tendre ε vers zéro. La famille des v_ε, $\varepsilon > 0$, est bornée dans $\mathbf{R}^n$; en effet, écrivons la formule (3.14) pour $\nu = (1/n, \ldots, 1/n)$:

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} v_{\varepsilon, i} \leqslant \varphi(N, \nu)$$

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} (v_{\varepsilon, i} - a_i) \leqslant \varphi(N, \nu) - \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} a_i.$$

Soit enfin, en tenant compte de $v_\varepsilon \in a + \mathbf{R}^n_+$:

$$\forall i \in \mathrm{N}, \qquad 0 \leqslant v_{\varepsilon, i} - a_i \leqslant n\varphi(\mathrm{N}, \nu) - \sum_{i=1}^{n} a_i .$$

La famille des v_ε, $\varepsilon > 0$, reste donc dans un compact fixe de $\mathbf{R}^n$. Elle y admet donc un point d'adhérence $\bar{v}$. Comme $\varphi(\mathrm{N}, .)$ est continue sur Λ, on peut passer à la limite dans (3.14), ce qui donne :

$$\forall \lambda \in \Lambda, \qquad \varphi(\mathrm{N}, \lambda) - \langle \lambda, \bar{v} \rangle \geqslant 0.$$

D'après le lemme 3.6, ceci signifie que :

$$\bar{v} \in \widetilde{v}(\mathrm{N}). \tag{3.20}$$

Pour tout $\mathrm{S} \subset \mathrm{N}$, $\bar{v}^{\mathrm{S}}$ est adhérent aux $v^{\mathrm{S}}_\varepsilon$, $\varepsilon > 0$. En passant à la limite dans l'espace $\mathbf{R}^{\mathrm{S}}$, la formule (3.19) devient :

$$\forall \mathrm{S} \subset \mathrm{N}, \qquad \bar{v}^{\mathrm{S}} \notin ri\, \widetilde{v}(\mathrm{S}).$$

A fortiori, puisque $\widetilde{v}(\mathrm{S}) - \mathring{\mathrm{R}}^{\mathrm{S}}_+$ est un ouvert contenu dans $\widetilde{v}(\mathrm{S})$, donc dans $ri\, \widetilde{v}(\mathrm{S})$:

$$\forall \mathrm{S} \subset \mathrm{N}, \qquad \bar{v}^{\mathrm{S}} \notin \widetilde{v}(\mathrm{S}) - \mathring{\mathrm{R}}^{\mathrm{S}}_+ . \tag{3.21}$$

D'après la proposition 3.3, il existera dans $\widetilde{v}(\mathrm{N})$ un optimum de Pareto $\bar{u} \in \bar{v} + \mathbf{R}^n_+$. De (3.21) on déduit aussitôt :

$$\forall \mathrm{S} \subset \mathrm{N}, \qquad \bar{u}^{\mathrm{S}} \notin \widetilde{v}(\mathrm{S}) - \mathring{\mathbf{R}}^{\mathrm{S}}_+ \tag{3.22}$$

ce qui prouve enfin que $\bar{u}$ appartient au noyau du jeu, qui est donc non vide. ∎

4. Application aux économies de propriété privée

Nous nous plaçons dans un univers économique comportant ℓ biens et n agents. La notion de bien économique recouvre des êtres, physiques (aliments) ou non (travail), localisés et datés (disponibles à tel endroit, à telle date), qui font l'objet de transactions entre les agents économiques. La quantité de chaque bien, toujours positive ou nulle, est mesurée par un nombre réel, si bien qu'un vecteur $x \in \mathbf{R}^\ell_+$, de composantes $x^k \geqslant 0$, $1 \leqslant k \leqslant \ell$, désignera une quantité x^k de chaque bien k.

Les biens sont rares, c'est-à-dire que les ressources naturelles en bien k sont limitées : on désignera par $\Omega \in \mathbf{R}^\ell_+$ les quantités totales de chaque bien présentes dans l'économie antérieurement à tout processus de production. Ce sont les ressources initiales de l'économie, peut-être très grandes, mais néanmoins finies. Nous nous plaçons en régime de propriété privée, c'est-à-dire que ces ressources initiales sont entièrement réparties entre les agents. L'agent i se trouve donc propriétaire des biens $\omega_i \in \mathbf{R}^\ell_+$, ses *ressources initiales*, de façon que :

$$\sum_{i=1}^{n} \omega_i = \Omega. \tag{4.1}$$

Ces agents économiques ont d'abord un comportement de producteurs. Le savoir-faire de l'agent i est résumé par une partie $Y_i \subset \mathbf{R}^\ell$, son *ensemble de production.* Pour tout $y \in \mathbf{R}^\ell$, nous noterons $y_+ \in \mathbf{R}^\ell_+$ le vecteur de composantes $y^k_+ = \max\{y^k, 0\}$ et $y_- \in \mathbf{R}^\ell_+$ le vecteur de composantes $y^k_- = -\min\{y^k, 0\}$, de telle sorte que $y = y_+ - y_-$. Dire que $y \in Y_i$ signifie alors que l'entreprise i est en mesure de produire les biens y_+ en consommant les biens y_- : on dit souvent que y_+ est l'output et y_- l'input. Ainsi, par exemple, dire que $0 \in Y_i$ signifie que l'inactivité est possible, et dire que $-\mathbf{R}^\ell_+ \subset Y_i$ signifie que l'agent i peut détruire une quantité quelconque de biens. S'il se forme une coalition $S \subset N$, il est clair que son ensemble de production sera $Y_S = \sum_{i \in S} Y_i$. Ainsi, par exemple, l'économie dans son ensemble a $Y_N = \sum_{i=1}^{n} Y_i$ comme savoir-faire et Ω comme ressources, si bien que l'ensemble des biens finaux possibles est :

$$\mathbf{R}_+^\ell \cap \{\Omega + \sum_{i=1}^{n} Y_i\}. \tag{4.2}$$

Les agents économiques ont aussi un comportement de consommateurs, c'est-à-dire qu'ils désirent la possession des biens. On suppose que les désirs de l'agent i peuvent être résumés par une fonction $u_i : \mathbf{R}_+^\ell \to \mathbf{R}$, sa *fonction d'utilité*, définie par :

$u_i(x) \leqslant u_i(y) \Leftrightarrow$ l'agent i préfère les biens y aux biens x.

Si $u_i(x) = u_i(y)$, on dit que l'agent i est indifférent entre x et y. La relation $u_i(x) \leqslant u_i(y)$ est un préordre total sur $\mathbf{R}_+^\ell$, appelé relation de préférence de l'agent i. Elle ne change pas si on multiplie la fonction d'utilité u_i par une constante positive, si on lui ajoute une constante quelconque, ou si on la compose par une fonction croissante $\varphi : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$. Chaque agent cherche, parmi les possibilités qui lui sont offertes, un plus grand élément pour sa relation de préférence — ce qui revient à maximiser sa fonction d'utilité.

L'économie que nous avons dépeinte va être le théâtre de transactions, portant sur les ressources initiales (nécessaires à la production) comme sur les biens finaux (destinés à la consommation). Il faut se représenter une vaste Bourse, où producteurs et consommateurs négocient simultanément tous les biens livrables en tous lieux, à toutes dates. Un marché n'est conclu entre un groupe d'agents que si chacun d'eux y trouve son avantage : on peut donc se demander s'il existe des situations stables, où aucun échange ne peut plus avoir lieu.

DÉFINITION 4.1. *Soit* $S \subset N$ *une coalition. On appelle* S-*allocation toute famille* $(x_i)_{i \in S}$ *telle que :*

$$\forall i \in S, \quad x_i \in \mathbf{R}_+^\ell \quad \textit{et} \quad \sum_{i \in S} x_i \in \sum_{i \in S} \omega_i + \sum_{i \in S} Y_i.$$

En d'autres termes, une S-allocation est une redistribution des richesses au sein de la coalition S, au terme d'un processus de production où tout est mis en commun, ressources initiales et savoir-faire. Dire que $(x_i)_{i \in S}$ est une S-allocation signifie que l'agent i peut obtenir les biens x_i par des transactions menées au sein de S. On dira allocation au lieu de N-allocation.

DÉFINITION 4.2. *On appelle optimum de Pareto une allocation* $(x_i)_{i \in N}$ *telle que, pour toute autre allocation* $(y_i)_{i \in N}$, *on ait* $u_i(y_i) < u_i(x_i)$ *pour un* $i \in N$ *au moins.*

C'est la même notion que celle que nous avions donnée sous ce nom au paragraphe précédent : elle désigne une situation où la collectivité ne peut plus améliorer le sort d'un de ses membres sans en léser un autre.

DÉFINITION 4.3. *Une allocation* $(x_i)_{i \in N}$ *est dite bloquée par une coalition* S *s'il existe une* S-*allocation* $(y_i)_{i \in S}$ *telle que :*

$$\forall i \in S, \quad u_i(y_i) > u_i(x_i).$$

Le noyau de l'économie est l'ensemble des optima de Pareto qui ne sont bloqués par aucune coalition.

Dire que la coalition S bloque l'allocation $(x_i)_{i \in N}$ signifie qu'entre les membres de S est possible une transaction plus avantageuse pour eux que x_i. Le noyau de l'économie est l'ensemble des situations stables, au sens où il n'y a plus de transaction avantageuse. Il s'agit de savoir si ce noyau est non vide : c'est ce que nous allons montrer, en nous ramenant aux résultats précédents. Il est naturel d'associer à cette économie d'échanges un jeu coopératif $(N, \widetilde{v})$, appelé *jeu de marché*, que l'on construit de la façon suivante :

$$\forall S \subset N, \quad r(S) = \{u_i(x_i) \mid \text{S-allocation } (x_i)_{i \in S}\} \subset \mathbf{R}^S \qquad (4.3)$$

$$\forall S \subset N, \quad \widetilde{v}(S) = r(S) - \mathbf{R}^S_+ . \qquad (4.4)$$

Proposition 4.3. *Un vecteur* $\bar{u} \in \mathbf{R}^n$ *appartient au noyau du jeu de marché si et seulement s'il existe une allocation* $(\bar{x}_i)_{i \in \mathrm{N}}$ *appartenant au noyau de l'économie et telle que :*

$$\forall\, i \in \mathrm{N}, \quad \bar{u}_i = u_i(\bar{x}_i).$$

Démonstration. Dire que $\bar{u}$ appartient au noyau du jeu de marché signifie que :

$$\{\bar{u}\} = \tilde{v}(\mathrm{N}) \cap \{\bar{u} + \mathbf{R}^n_+\} \tag{4.5}$$

$$\forall\, \mathrm{S} \subset \mathrm{N}, \quad \bar{u} \notin \tilde{v}(\mathrm{S}) - \mathring{\mathbf{R}}^{\mathrm{S}}_+. \tag{4.6}$$

Mais, d'après (4.4), $\bar{u} + \mathbf{R}^n_+$ contient un point $\bar{v} \in r(\mathrm{S})$. Donc $\bar{u} = \bar{v}$, et (4.5) équivaut à :

$$\{\bar{u}\} = r(\mathrm{N}) \cap \{\bar{u} + \mathbf{R}^n_+\}. \tag{4.7}$$

De même, (4.6) se met sous la forme :

$$\forall\, \mathrm{S} \subset \mathrm{N}, \quad \bar{u} \notin r(\mathrm{S}) - \mathbf{R}^{\mathrm{S}}_+ - \mathring{\mathbf{R}}^{\mathrm{S}}_+. \tag{4.8}$$

Et comme $\mathbf{R}^{\mathrm{S}}_+ + \mathring{\mathbf{R}}^{\mathrm{S}}_+ = \mathring{\mathbf{R}}^{\mathrm{S}}_+$, on obtient :

$$\forall\, \mathrm{S} \subset \mathrm{N}, \quad \bar{u} \notin r(\mathrm{S}) - \mathring{\mathbf{R}}^{\mathrm{S}}_+. \tag{4.9}$$

Donc (4.5) et (4.6) équivalent à (4.7) et (4.9), qui signifient précisément, d'après (4.3), que $\bar{u}$ se met sous la forme $u_i(\bar{x}_i)$ où $\bar{x}_i$ appartient au noyau de l'économie. ∎

Nous introduisons maintenant deux hypothèses qui assureront la non-vacuité du noyau de l'économie :

E1 : *Les fonctions d'utilité* u_i, $i \in \mathrm{N}$, *sont concaves et continues.*

L'hypothèse de concavité est traditionnelle en économie; pour mieux l'interpréter, supposons les u_i différentiables. Alors $\dfrac{\partial u_i}{\partial x^k}(x^1, \ldots, x^k, \ldots, x^\ell)$ est une fonction décroissante de x^k. Mais ce n'est autre que le surcroît d'utilité par unité supplémentaire de bien k, évalué au point $(x^1, \ldots, x^\ell)$. Si $\dfrac{\partial u_i}{\partial x^k} > 0$, c'est-à-dire si le bien k est désiré, cela exprime qu'une même quantité de ce bien apporte un surcroît d'utilité qui va en diminuant au fur et à mesure que le consommateur s'enrichit. Si $\dfrac{\partial u_i}{\partial x^k} < 0$, c'est-à-dire si le bien k n'est pas désiré, cela exprime qu'une même quantité de ce bien apporte un surcroît de désagrément qui va en croissant avec la quantité qu'on en a déjà. Il s'agit donc d'une saturation du consommateur.

E2 : *Les ensembles de productions* Y_i, $i \in N$, *sont convexes fermés, contiennent l'origine, et* $Y_N \cap \mathbf{R}^\ell_+ = \{0\}$.

Dire que $Y_N \cap \mathbf{R}^\ell_+$ est réduit à 0 exprime que l'on ne peut pas produire quelque chose à partir de rien. Introduisons la fonction :

$$\varphi_i^k(y) = \sup\{x^k \mid x \in (y + Y_i) \cap \mathbf{R}^\ell_+\}.$$

C'est la plus grande quantité de bien k que l'agent i puisse produire à l'aide du lot $y \in \mathbf{R}^\ell_+$. On a, pour α et β positifs de somme 1 :

$$\begin{aligned}
\varphi_i^k(\alpha y + \beta z) &= \sup\{x^k \mid x \in (\alpha y + \beta z + Y_i) \cap \mathbf{R}^\ell_+\} \\
&\geqslant \sup\{x^k \mid x \in \alpha(y + Y_i) \cap \mathbf{R}^\ell_+ \\
&\qquad\qquad + \beta(z + Y_i) \cap \mathbf{R}^\ell_+\} \\
&= \alpha \sup\{x^k \mid x \in (y + Y_i) \cap \mathbf{R}^\ell_+\} \\
&\qquad\qquad + \beta \sup\{x^k \mid x \in (z + Y_i) \cap \mathbf{R}^\ell_+\} \\
&= \alpha\varphi_i^k(y) + \beta\varphi_i^k(z).
\end{aligned}$$

Ce qui prouve que les fonctions φ_i^k sont concaves. Comme ci-dessus, on interprète cela en disant que le rendement $\dfrac{\partial \varphi_i^k}{\partial x^p}$ est une fonction décroissante de x^p pour tout p : il y a un effet de saturation à la production.

LEMME 4.4. *Sous l'hypothèse* E2, *l'ensemble des* S-*allocations est compact convexe pour tout* $S \subset N$.

Démonstration. Soit $(x_{i,p})_{i \in S}$, $p \in \mathbf{N}$, une suite de S-allocations. Notons $e_p = \sum_{i \in S} x_{i,p}$. On peut écrire :

$$e_p = \sum_{i \in S} \omega_i + y_p, \quad \text{ou} \quad y_p \in Y_S. \tag{4.10}$$

La suite e_p est dans $\mathbf{R}_+^\ell$. Si elle n'était pas bornée, on pourrait extraire une sous-suite, notée toujours e_p, telle que $\|e_p\| \to \infty$ et $e_p/\|e_p\| \to \bar{e} \in \mathbf{R}_+^\ell$. Donc $\|y_p\| \to \infty$ et $y_p/\|y_p\| \to \bar{e} \in \mathbf{R}_+^\ell$. Comme y_p et 0 sont dans Y_S et que celui-ci est convexe, $y_p/\|y_p\| \in Y_S$. Comme Y_S est fermé, on obtient $Y_N \cap \mathbf{R}_+^\ell \supset Y_S \cap \mathbf{R}_+^\ell \ni \bar{e} \neq 0$, en contradiction avec E2.

Les suites e_p et y_p sont donc bornées. On en déduit que les suites $x_{i,p}$ de $\mathbf{R}_+^\ell$ sont également bornées. On a donc des points d'accumulation $\bar{x}_i \in \mathbf{R}_+^\ell$ et $\bar{y} \in Y_S$. L'égalité (4.10) passe à la limite :

$$\sum_{i \in S} \bar{x}_i = \sum_{i \in S} \omega_i + \bar{y}, \quad \text{où} \quad \bar{y} \in Y_S$$

et $(\bar{x}_i)_{i \in S}$ est bien une S-allocation. ∎

THÉORÈME 4.5. *Hypothèses* E1 *et* E2. *Le noyau de l'économie est non vide.*

Démonstration. Il suffit de montrer que le noyau du jeu de marché est non vide, et pour cela d'appliquer le théorème de Scarf-Aubin. D'après la formule (4.3) et le lemme précédent, $r(S)$ est compact comme image continue d'un compact; malheureusement il n'est pas convexe en général. Cependant, prenons v et w appartenant à $r(S)$, α et β des scalaires positifs de somme 1. On a $v_i = u_i(x_i)$ et $w_i = u_i(y_i)$ pour des allocations x_i et y_i, $i \in N$, et donc :

$$\begin{aligned} \alpha v_i + \beta w_i &= \alpha u_i(x_i) + \beta u_i(y_i) \\ &\leqslant u_i(\alpha x_i + \beta y_i). \end{aligned}$$

Mais $\alpha x_i + \beta y_i$, $i \in \mathrm{N}$, est aussi une allocation. Donc :

$$\alpha v + \beta w \in r(\mathrm{S}) - \mathbf{R}_+^{\mathrm{S}}$$
$$\mathrm{co}\,(r(\mathrm{S})) \subset r(\mathrm{S}) - \mathbf{R}_+^{\mathrm{S}}$$
$$\widetilde{v}(\mathrm{S}) = \mathrm{co}\,(r(\mathrm{S})) - \mathbf{R}_+^{\mathrm{S}}.$$

Il suffit de poser $k(\mathrm{S}) = \mathrm{co}\,(r(\mathrm{S}))$, compact convexe, et l'hypothèse (H) est satisfaite. Il ne reste plus qu'à montrer que le jeu de marché est compensé. Prenons donc une famille compensée de coalitions $\mathscr{B} \subset \mathrm{N}$, de coefficients $(\gamma_{\mathrm{S}})_{\mathrm{S}\in\mathscr{B}}$, prenons $u^{\mathrm{S}} \in \widetilde{v}(\mathrm{S})$, et montrons que

$$\sum_{\mathrm{S}\in\mathscr{B}} \gamma_{\mathrm{S}}\, u^{\mathrm{S}} \in \widetilde{v}(\mathrm{N}).$$

Comme $u^{\mathrm{S}} \in \widetilde{v}(\mathrm{S})$, il existe une S-allocation x^{S} avec $u_i^{\mathrm{S}} \leqslant u_i(x_i^{\mathrm{S}})$ pour tout $i \in \mathrm{S}$. Nous posons alors, pour tout $i \in \mathrm{N}$:

$$z_i = \sum_{\substack{\mathrm{S}\in\mathscr{B}\\ \mathrm{S}\ni i}} \gamma_{\mathrm{S}}\, x_i^{\mathrm{S}} \in \mathbf{R}_+^{\ell}.$$

La famille $(z_i)_{i\in\mathrm{N}}$ constitue une allocation. En effet :

$$\begin{aligned}
\sum_{i\in\mathrm{N}} z_i &= \sum_{i\in\mathrm{N}} \sum_{\substack{\mathrm{S}\in\mathscr{B}\\ \mathrm{S}\in i}} \gamma_{\mathrm{S}}\, x_i^{\mathrm{S}} = \sum_{\mathrm{S}\in\mathscr{B}} \gamma_{\mathrm{S}} \sum_{i\in\mathrm{S}} x_i^{\mathrm{S}} \\
&\in \sum_{\mathrm{S}\in\mathscr{B}} \gamma_{\mathrm{S}} \Big(\sum_{i\in\mathrm{S}} \omega_i + \sum_{i\in\mathrm{S}} \mathrm{Y}_i \Big) \\
&= \sum_{i\in\mathrm{N}} \Big(\sum_{\substack{\mathrm{S}\in\mathscr{B}\\ \mathrm{S}\ni i}} \gamma_{\mathrm{S}} \Big) (\omega_i + \mathrm{Y}_i) \\
&= \sum_{i\in\mathrm{N}} \omega_i + \sum_{i\in\mathrm{N}} \mathrm{Y}_i .
\end{aligned}$$

Comme les γ_{S}, pour $\mathrm{S} \in \mathscr{B}$ et $\mathrm{S} \ni i$, sont positifs de somme 1, la concavité de la fonction u_i nous permet d'écrire que :

$$u_i(z_i) \geqslant \sum_{\substack{\mathrm{S}\in\mathscr{B}\\ \mathrm{S}\ni i}} \gamma_{\mathrm{S}}\, u_i(x_i^{\mathrm{S}}) \geqslant \sum_{\substack{\mathrm{S}\in\mathscr{B}\\ \mathrm{S}\ni i}} \gamma_{\mathrm{S}}\, u_i^{\mathrm{S}},$$

ce qui signifie précisément que $\sum_{\mathrm{S}\in\mathscr{B}} \gamma_{\mathrm{S}}\, u^{\mathrm{S}} \in v(\mathrm{N})$. ∎

5. Equilibres de marché

On notera $\mathscr{E}$ l'économie définie par (ω_i, u_i, Y_i), $i \in N$, et on supposera qu'elle vérifie les hypothèses E1 et E2. Son noyau est alors un compact non vide de $(\mathbf{R}_+^\ell)^n$ que l'on désignera par $\mathscr{C}$. Il peut contenir un grand nombre d'allocations très diverses. Le problème se pose de savoir s'il n'y en a pas qui soient plus significatives que les autres, en d'autres termes, de rétrécir le noyau. Une façon commode de procéder est d'augmenter les possibilités de blocage.

Définition 5.1. *Soient* $s \in [0, 1]^N$ *une fonction et* $S = \{ i \in N \mid s_i \neq 0 \}$ *son support. On appelle s-allocation toute famille* $(x_i)_{i \in S}$ *de* $\mathbf{R}_+^\ell$ *telle que :*

$$\sum_{i \in S} s_i x_i \in \sum_{i \in S} s_i \omega_i + \sum_{i \in S} s_i Y_i. \tag{5.1}$$

On dira que la fonction s bloque l'allocation $(z_i)_{i \in N}$ *s'il existe une s-allocation* $(x_i)_{i \in N}$ *telle que :*

$$\forall i \in S, \qquad u_i(x_i) > u_i(z_i). \tag{5.2}$$

On notera $\mathscr{W}$ l'ensemble des allocations qui ne sont bloquées par aucune fonction $s \in [0, 1]^N$.

Si $s \in \{0, 1\}^N$, c'est-à-dire si s est la fonction caractéristique d'une coalition $S \subset N$, on retrouve les notions habituelles de S-allocation et de coalition bloquante comme cas particuliers de la définition 5.1. Ainsi, les allocations qui ne sont bloquées par aucune fonction $s \in [0, 1]^N$ ne sont certainement bloquées par aucune coalition $S \subset N$: on a donc $\mathscr{W} \subset \mathscr{C}$.

a) *Interprétation économique.* Pour chaque $i \in N$, les ressources ω_i et le savoir-faire Y_i sont partagés entre un grand nombre d'individus identiques, et s n'est autre qu'une coalition regroupant une proportion s_i de tous les individus de type i. Plus précisément, désignons par $\mathscr{E}_q$ une économie groupant qn agents, q agents pour chaque type i, $i \in \mathrm{N}$. Les agents de type i ont ω_i/q comme ressources initiales, Y_i/q comme ensemble de production, $x \mapsto u_i(qx)$ comme fonction d'utilité. Soit S_q une coalition, comportant p_i individus de chaque type i; on posera $\mathrm{S} = \{i \in \mathrm{N} \mid p_i \neq 0\}$. Dire que $x_{i,m}$, $i \in \mathrm{S}$, $1 \leqslant m \leqslant p_i$, est une S_q-allocation signifie que :

$$\sum_{i \in \mathrm{S}} \sum_{m=1}^{p_i} x_{i,m} \in \sum_{i \in \mathrm{S}} p_i \omega_i/q + \sum_{i \in \mathrm{S}} p_i \mathrm{Y}_i/q. \tag{5.3}$$

Définissons une famille $(x_i)_{i \in \mathrm{S}}$ de $\mathbf{R}^{\ell}_{+}$, et $s \in [0, 1]^{\mathrm{N}}$ par :

$$\forall\, i \in \mathrm{S} \qquad \frac{x_i}{q} = \frac{1}{p_i} \sum_{m=1}^{p_i} x_{i,m} \tag{5.4}$$

$$\forall\, i \in \mathrm{S} \qquad s_i = p_i/q. \tag{5.5}$$

En comparant (5.3) et (5.4), on constate que $x_{i,m}$ est une S_q-allocation de $\mathscr{E}_q$ si et seulement si x_i est une s-allocation de $\mathscr{E}$. On voit que S_q alloue en moyenne x_i/q à chacun de ses membres de type i; en particulier, il y a correspondance biunivoque entre les s-allocations de $\mathscr{E}$, soit $(x_i)_{i \in \mathrm{S}}$, et les S_q-allocations de $\mathscr{E}_q$ qui traitent également tous les agents de même type, soit $x_{i,m} = x_i/q$, $i \in \mathrm{S}$, $1 \leqslant i \leqslant p_i$. L'utilité d'un agent de type i est alors $u_i(qx_i/q) = u_i(x_i)$. La relation (5.2) exprime donc indifféremment que la s-allocation x_i bloque l'allocation z_i dans $\mathscr{E}$ ou que la S_q-allocation x_i/q bloque l'allocation z_i/q dans $\mathscr{E}_q$.

Lemme 5.2. *Si une allocation $z_{i,m}$, $i \in \mathrm{N}$, $1 \leqslant m \leqslant q$, est dans le noyau de $\mathscr{E}_q$, son image par (5.4), $(z_i)_{i \in \mathrm{N}}$, est une allocation de $\mathscr{E}$ qui n'est bloquée par aucune fonction :*

$$s \in \{0, 1/q, \ldots, (q-1)/q, 1\}^{\mathrm{N}}.$$

Démonstration. Supposons que $(z_i)_{i \in N}$ soit bloquée dans $\mathscr{E}$ par une fonction s à valeurs rationnelles, de la forme $s_i = p_i/q$. Soient S le support de s, et $(x_i)_{i \in S}$ la s-allocation bloquante. Par définition :

$$\forall\, i \in S, \quad u_i(x_i) > u_i(z_i)$$
$$\forall\, i \in S, \quad u_i(qx_i/q) > u_i(qz_i/q).$$

En faisant usage de (5.4) :

$$\forall\, i \in S, \quad u_i(qx_i/q) > u_i(q \sum_{m=1}^{q} z_{i,m}/q).$$

Comme la fonction u_i est concave :

$$\forall\, i \in S, \quad u_i(qx_i/q) > \sum_{m=1}^{q} \frac{1}{q} u_i(qz_{i,m}).$$

On en déduit que :

$$\forall\, i \in S, \ \exists\, m(i) \ : \ u_i(qx_i/q) > u_i(qz_{i,m(i)}). \qquad (5.6)$$

Notons S_q la coalition de $\mathscr{E}_q$ qui, pour chaque type $i \in S$, a l'unique membre $m(i)$. La formule (5.6) exprime précisément que la S_q-allocation x_i/q bloque dans $\mathscr{E}_q$ l'allocation $z_{i,m}$, qui ne saurait donc être dans le noyau. D'où le résultat. ∎

b) *Non-vacuité de* $\mathscr{W}$. Pour $q \in \mathbf{N}$, notons $\mathscr{W}_q$ l'ensemble des allocations de $\mathscr{E}$ qui ne sont bloquées par aucune fonction $s_i = p_i/q$. C'est un compact non vide d'après le lemme 5.2, et la famille $(\mathscr{W}_q)_{q \in \mathbf{N}}$ est filtrante décroissante. On a donc $\bigcap_{q \in \mathbf{N}} \mathscr{W}_q \neq \varnothing$.

PROPOSITION 5.3. $\mathscr{W} \neq \varnothing$.

Démonstration. Il suffit de montrer que :

$$\mathscr{W} = \bigcap_{q \in \mathbf{N}} \mathscr{W}_q.$$

Il est clair que $\mathscr{W} \subset \bigcap_{q \in \mathbf{N}} \mathscr{W}_q$. Réciproquement, prenons une allocation $(z_i)_{i \in \mathrm{N}}$ de $\bigcap_{q \in \mathbf{N}} \mathscr{W}_q$, et supposons qu'elle soit bloquée par une fonction $s \in [0, 1]^{\mathrm{N}}$. Soient S son support et $(x_i)_{i \in \mathrm{S}}$ une s-allocation bloquante. D'après (5.1), on peut écrire :

$$\sum_{i \in \mathrm{S}} s_i x_i = \sum_{i \in \mathrm{S}} s_i \omega_i + \sum_{i \in \mathrm{S}} s_i y_i, \qquad \text{où} \qquad y_i \in \mathrm{Y}_i \qquad \forall\, i \in \mathrm{S}.$$

Choisissons $\sigma \in [0, 1]^{\mathrm{S}}$, à valeurs rationnelles, destiné à tendre vers s, et posons :

$$\forall\, i \in \mathrm{S} \quad \xi_i = \frac{s_i}{\sigma_i} x_i + \left(1 - \frac{s_i}{\sigma_i}\right)(\omega_i + y_i).$$

Alors $(\xi_i)_{i \in \mathrm{S}}$ est une σ-allocation, et pour tout $i \in \mathrm{S}$, $\xi_i \to x_i$ quand $\sigma \to s$. Comme les fonctions d'utilité u_i sont continues (hypothèse E1), d'après (5.2) on aura pour σ assez voisin de s :

$$\forall\, i \in \mathrm{S}, \qquad u_i(\xi_i) > u_i(z_i).$$

Donc la fonction σ bloque l'allocation $(z_i)_{i \in \mathrm{N}}$. En écrivant $\sigma_i = p_i/q$, on obtient que cette allocation n'appartient pas à $\mathscr{W}_q$, en contradiction avec l'hypothèse. ∎

c) *Caractérisation de* $\mathscr{W}$. A toute allocation $(x_i)_{i \in \mathrm{N}}$ de $\mathscr{E}$, nous associons l'ensemble $\mathrm{X} \subset \mathbf{R}_+^{\ell}$ défini par :

$$\mathrm{X} = \bigcup_{s \in [0, 1]^{\mathrm{N}}} \Big\{ \sum_{i \in \mathrm{N}} s_i(z_i - \omega_i - y_i) \,\Big|\, \forall\, i \in \mathrm{N},$$
$$y_i \in \mathrm{Y}_i \text{ et } u_i(z_i) > u_i(x_i) \Big\}.$$

Lemme 5.4. $(x_i)_{i \in \mathrm{N}} \in \mathscr{W} \Leftrightarrow 0 \notin \mathrm{X}$.

Démonstration. Il suffit de montrer que $0 \in \mathrm{X}$ si et seulement si $(x_i)_{i \in \mathrm{N}} \notin \mathscr{W}$. Dire que $0 \in \mathrm{X}$ signifie que l'on peut trouver une fonction s de support S, deux familles $(y_i)_{i\in S}$ et $(z_i)_{i\in S}$ telles que (en tenant compte du fait que $s_i = 0$ hors de S) :

$$\sum_{i\in S} s_i z_i = \sum_{i\in S} s_i \omega_i + \sum_{i\in S} s_i y_i$$

$$u_i(z_i) > u_i(x_i).$$

La première relation exprime que $(z_i)_{i\in S}$ est une s-allocation, la deuxième qu'elle bloque $(x_i)_{i\in N}$. ∎

Lemme 5.5. X *est un convexe de* $\mathbf{R}^\ell_+$.

Démonstration. Soient α et α' deux scalaires positifs de somme 1, ξ et ξ' deux points de X. On a :

$$\xi = \sum_{i\in S} s_i(z_i - \omega_i - y_i) \quad \text{avec} \quad y_i \in Y_i \quad \text{et} \quad u_i(z_i) > u_i(x_i)$$

$$\xi' = \sum_{i\in S'} s'_i(z'_i - \omega_i - y'_i) \quad \text{avec} \quad y'_i \in Y_i \quad \text{et} \quad u_i(z'_i) > u_i(x_i).$$

Pour $i \in S \cap S'$, nous posons $\sigma_i = (\alpha s_i + \alpha' s'_i) \in]0, 1[$. Par convexité des ensembles Y_i et des fonctions $-u_i$, on a :

$$\frac{\alpha s_i}{\sigma_i} z_i + \frac{\alpha' s'_i}{\sigma_i} z'_i = \zeta_i \quad \text{avec} \quad u_i(\zeta_i) > u_i(x_i)$$

$$\frac{\alpha s_i}{\sigma_i} y_i + \frac{\alpha' s'_i}{\sigma_i} y'_i = \eta_i \quad \text{avec} \quad \eta_i \in Y_i,$$

ce qui permet d'écrire :

$$\alpha s_i(z_i - \omega_i - y_i) + \alpha' s'_i(z'_i - \omega_i - y'_i) = \sigma_i(\zeta_i - \omega_i - \eta_i).$$

Pour $i \notin S \cap S'$, posons :

$$\sigma_i = \alpha s_i \quad \text{si} \quad i \in S, \qquad \sigma_i = \alpha' s'_i \quad \text{si} \quad i \in S'.$$

$$\zeta_i = z_i \quad \text{si} \quad i \in S, \qquad \zeta_i = z'_i \quad \text{si} \quad i \in S'.$$

$$\eta_i = y_i \quad \text{si} \quad i \in S, \qquad \eta_i = y'_i \quad \text{si} \quad i \in S'.$$

En ajoutant, on obtient :

$$\begin{aligned}\alpha\xi + \alpha'\xi' = \sum_{S\cap S'} [\alpha s_i(z_i - \omega_i - y_i) + \alpha' s'_i(z'_i - \omega'_i - y'_i)] \\ + \sum_{S - S\cap S'} \alpha s_i(z_i - \omega_i - y_i) \\ + \sum_{S' - S\cap S'} \alpha' s'_i(z'_i - \omega'_i - y'_i) \\ = \sum_{S\cup S'} \sigma_i(\zeta_i - \omega_i - \eta_i) \in X. \ \blacksquare\end{aligned}$$

Il est à noter que l'ensemble X n'est pas fermé. Comme on est en dimension finie, on peut cependant séparer, au sens large, 0 du convexe X, sous la seule condition que celui-ci soit non vide. Cela revient à dire que pour tout $i \in N$, il existe un z_i tel que $u_i(x_i) < u_i(z_i)$, en d'autres termes, qu'aucun consommateur n'est saturé. Il existe donc $p \in \mathbf{R}^\ell$ non nul tel que, pour tout $s \in [0, 1]^N$:

$$\langle p, \sum_{i\in N} s_i(z_i - \omega_i - y_i) \rangle \geqslant 0 \quad \text{où} \quad y_i \in Y_i \quad \text{et} \quad u_i(z_i) > u_i(x_i). \tag{5.6 bis}$$

En prenant $s = (0, \ldots, s_i = 1, \ldots, 0)$, cette relation devient :

$$\forall i \in N, \quad \langle p, z_i \rangle \geqslant \langle p, \omega_i \rangle + \langle p, y_i \rangle.$$

On a donc montré que, pour tout agent $i \in N$, pour toute consommation $z_i \in \mathbf{R}^\ell_+$ strictement préférée à x_i, $(u_i(z_i) > u_i(x_i))$, on doit avoir :

$$\langle p, z_i \rangle \geqslant \langle p, \omega_i \rangle + \max_{y_i \in Y_i} \langle p, y_i \rangle. \tag{5.7}$$

Nous allons faire sur l'économie $\mathscr{E}$ quelques hypothèses supplémentaires, qui nous permettront d'affiner la notion que nous venons d'élaborer. Il s'agit de :

E3 : *Pour tout* $i \in \mathrm{N}$, $\omega_i^k > 0$ *pour* $1 \leqslant k \leqslant \ell$, *et* u_i *n'a pas de maximum sur* $\mathbf{R}_+^\ell$. *En outre,* $\mathrm{Y_N} = \sum_{i \in \mathrm{N}} \mathrm{Y}_i \supset -\mathbf{R}_+^\ell$.

En d'autres termes, les agents sont tous au départ pourvus de tous les biens, et aucun d'eux ne peut être saturé. En outre, l'économie dans son ensemble peut détruire librement les biens dont personne ne veut.

Proposition 5.6. *Soit* $\mathscr{E}$ *une économie vérifiant* E1, E2 et E3. *Alors* $\mathscr{W}$ *est l'ensemble des allocations* $(x_i)_{i \in \mathrm{N}}$ *telles qu'il existe* $p \in \mathbf{R}_+^\ell$, $p \neq 0$, *vérifiant :*

$$\forall i \in \mathrm{N}, \quad \langle p, x_i \rangle = \langle p, \omega_i \rangle + \max_{y_i \in \mathrm{Y}_i} \langle p, y_i \rangle \underset{\mathrm{def}}{=} b_i \tag{5.8}$$

$$\forall i \in \mathrm{N}, \quad \forall \xi_i \in \mathbf{R}_+^\ell, \quad \langle p, \xi_i \rangle \leqslant b_i \Rightarrow u_i(\xi_i) \leqslant u_i(x_i). \tag{5.9}$$

Démonstration. Nous avons vu que toute allocation de W vérifie la condition (5.6 *bis*), exprimée plus commodément en (5.7), avec $p \in \mathbf{R}_+^\ell$ puisque $\mathrm{Y_N} \supset -\mathbf{R}_+^\ell$. En faisant tendre z_i vers x_i, ce qui est possible puisque u_i n'a pas de maximum local [1], on obtient par continuité de u_i (E1) :

$$\forall i \in \mathrm{N}, \quad \langle p, x_i \rangle \geqslant \langle p, \omega_i \rangle + \max_{y_i \in \mathrm{Y}_i} \langle p, y_i \rangle = b_i. \tag{5.10}$$

Mais $(x_i)_{i \in \mathrm{N}}$ est une allocation; en particulier :

$$\langle p, \sum_{i \in \mathrm{N}} x_i \rangle \leqslant \max_{y_i \in \mathrm{Y}_i} \langle p, \omega_i + y_i \rangle. \tag{5.11}$$

Mais (5.11) n'est possible que si, dans (5.10), on a l'égalité pour tout $i \in \mathrm{N}$: d'où (5.8). Reste à montrer (5.9). Remarquons d'abord que $b_i \geqslant \langle p, \omega_i \rangle > 0$

[1] Comme elle est concave, ce maximum local serait un maximum global, contrairement à (E3).

puisque les coordonnées de ω sont positives et les coordonnées de $p \geqslant 0$ non toutes nulles. Si $\xi_i \in \mathbf{R}_+^\ell$ vérifie $\langle p, \xi_i \rangle \leqslant b_i$, on peut l'approcher par une suite $\xi_{i,n} \in \mathbf{R}_+^\ell$ telle que :

$$\langle p, \xi_{i,n} \rangle < b_i .$$

D'après (5.7), on ne saurait avoir $u_i(\xi_{i,n}) > u_i(x_i)$. On a donc :

$$u_i(\xi_{i,n}) \leqslant u_i(x_i).$$

En passant à la limite, par continuité de u_i (E1) :

$$u_i(\xi_i) \leqslant u_i(x_i).$$

Ce qui établit (5.9). Réciproquement, soit $(x_i)_{i \in \mathrm{N}}$ une allocation vérifiant (5.8) et (5.9); supposons qu'il existe une s-allocation $(z_i)_{i \in \mathrm{S}}$ qui la bloque. On a alors :

$$\forall\, i \in \mathrm{S}, \qquad u_i(z_i) > u_i(x_i)$$

et donc, d'après (5.9) :

$$\langle p, z_i \rangle > b_i = \max_{y_i \in \mathrm{Y}_i} \langle p, \omega_i + y_i \rangle.$$

En multipliant par s_i et en ajoutant :

$$\langle p, \sum_{i \in \mathrm{S}} s_i(z_i - \omega_i - y_i) \rangle > 0 \qquad \forall\, y_i \in \mathrm{Y}_i$$

en contradiction avec le fait que $(z_i)_{i \in \mathrm{S}}$ est une s-allocation, c'est-à-dire que l'on peut choisir les y_i dans Y_i, $i \in \mathrm{S}$, de façon à annuler le terme de gauche. ∎

Nous avons introduit une notion très importante en économie :

Définition 5.7. *Tout système* $[(x_i)_{i \in \mathrm{N}}, p]$, *où* $(x_i)_{i \in \mathrm{N}}$ *est une allocation et* $p \in \mathbf{R}_+^\ell$, *vérifiant* (5.8) *et* (5.9), *est appelé un équilibre de l'économie* $\mathscr{E}$.

Cette notion a été élaborée par L. Walras vers 1870, et le problème de l'existence d'équilibres pour une économie donnée a été un stimulant constant de la recherche en économie mathématique. Il est clair que p est un système de prix, la condition $p \in \mathbf{R}^{\ell}_{+}$ exprimant simplement qu'il n'y a pas de bien dont la possession soit coûteuse — ce qui est normal, puisqu'on peut s'en débarrasser pour rien $(Y_N \supset -\mathbf{R}^{\ell}_{+})$. Quand le système de prix p prévaut sur le marché, producteurs et consommateurs réagissent chacun à leur manière :

Les producteurs maximisent leur profit. Dire que $y \in Y_i$ signifie que l'agent i peut produire y_+ à partir de y_-. Son profit est le revenu de l'output moins le coût de l'input, à savoir $\langle p, y_+ \rangle - \langle p, y_- \rangle = \langle p, y \rangle$. Notons $\pi_i(p)$ l'ensemble des points de Y_i où la fonction $y \mapsto \langle p, y \rangle$ atteint son maximum. L'agent i choisira donc un processus de production $y_i \in \pi_i(p)$. Il est à noter que si $\pi_i(p)$ est réduit à un point (si on suppose par exemple Y_i strictement convexe), le comportement du producteur i est parfaitement déterminé par la seule donnée des prix $p \in \mathbf{R}^{\ell}_{+}$.

Les consommateurs choisissent ce qu'ils préfèrent parmi ce qu'ils peuvent se payer. La fortune de l'agent i résulte de la vente de ses ressources initiales $(\langle p, \omega_i \rangle)$ et de son profit comme producteur $(\max\limits_{y_i \in Y_i} \langle p, y_i \rangle)$: ce n'est autre que b_i. Il peut donc s'offrir tous les biens $\xi \in \mathbf{R}^{\ell}_{+}$ tels que $\langle p, \xi \rangle \leqslant b_i$, qui constituent son ensemble de budget. Notons $\gamma_i(p)$ l'ensemble des points de l'ensemble de budget où la fonction u_i atteint son maximum. L'agent i choisira donc une consommation $x_i \in \gamma_i(p)$. Il est à noter que si $\gamma_i(p)$ est réduit à un point (si on suppose par exemple u_i strictement concave), le comportement du consommateur i est parfaitement déterminé par la seule donnée des prix $p \in \mathbf{R}^{\ell}_{+}$.

Chaque agent économique a donc un comportement parfaitement égoïste et aveugle. Une fois que, indépendamment les uns des autres, les producteurs ont fait leurs choix $y_i \in \pi_i(p)$ et les consommateurs leur choix $x_i \in \gamma_i(p)$, on arrive à une demande globale de biens, somme de la consommation et des inputs de la production :

$$\sum_{i \in N} x_i + (\sum_{i \in N} y_{i-})$$

et à une offre globale de biens, due à la mise sur le marché des ressources initiales et des outputs de la production :

$$\sum_{i \in N} \omega_i + (\sum_{i \in N} y_{i+}) \, .$$

Il est clair que, pour des prix $p \in \mathbf{R}_+^\ell$ quelconques, l'offre et la demande n'ont aucune raison de se raccorder. Cela n'a lieu que si :

$$\sum_{i \in N} x_i = \sum_{i \in N} \omega_i + (\sum_{i \in N} y_{i+}) - (\sum_{i \in N} y_{i-})$$
$$\sum_{i \in N} x_i = \sum_{i \in N} \omega_i + \sum_{i \in N} y_i \, . \tag{5.12}$$

La substantifique moelle du concept d'équilibre réside en ceci, que si $p \in \mathbf{R}_+^\ell$ sont des prix d'équilibre, il est possible à la fois d'attribuer à chaque individu le comportement que nous avons analysé, et d'égaler l'offre et la demande sur le marché. En d'autres termes, (5.12) est possible avec $x_i \in \gamma_i(p)$ et $y_i \in \pi_i(p)$, pour tout $i \in N$ si et seulement si $[(x_i)_{i \in N}, p]$ est un équilibre. En effet, la définition 5.7 impose que $(x_i)_{i \in N}$ soit une allocation, c'est-à-dire que :

$$\sum_{i \in N} x_i = \sum_{i \in N} \omega_i + \sum_{i \in N} y_i, \quad \text{où} \quad y_i \in Y_i, \quad \forall i \in N.$$

Mais ceci, joint à (5.8), nécessite que pour tout $i \in N$, y_i maximise $\langle p, y \rangle$ sur Y_i, c'est-à-dire que $y_i \in \pi_i(p)$. La condition (5.9) exprime que pour tout $i \in N$, $x_i \in \gamma_i(p)$. D'où le résultat. On remarquera que (5.8) exprime que chaque consommateur, dans sa recherche du bonheur, est amené à dépenser toute sa fortune.

Le mécanisme est particulièrement frappant si l'on fait l'hypothèse d'unicité : $\pi_i(p)$ et $\gamma_i(p)$ réduits à un point $\forall i \in N$. Dans ces conditions, la fixation de $p \in \mathbf{R}^\ell_+$, prix d'équilibre, détermine entièrement le comportement des producteurs et des consommateurs, chacun poursuivant exclusivement son intérêt propre; mais l'agrégation de ces comportements individuels égoïstes aboutit à un équilibre global entre l'offre et la demande, sans que personne s'en soit soucié. En d'autres termes, on voit la multitude des intérêts particuliers se fondre dans l'intérêt général, par la seule vertu des prix $p \in \mathbf{R}^\ell_+$. Adam Smith s'exprime ainsi : « Every individual endeavours to employ his capital so that its produce may be of greatest value. He generally neither intends to promote the public interest, nor knows how much he is promoting it. He intends only his own security, only his own gain. And he is in this led by an invisible hand to promote an end which was no part of his intention. By pursuing his own interest he frequently promotes that of society more effectually than when he really intends to promote it » (*The wealth of nations*, 1776).

On a donc là une idée aussi vieille que l'économie elle-même, et qui n'a rien perdu de son actualité. Ses premiers tenants se fiaient aux mécanismes du marché pour déterminer naturellement les prix d'équilibre $p \in \mathbf{R}^\ell_+$, et en tiraient argument pour qu'on entrave le moins possible son libre fonctionnement. Mais on peut aussi bien concevoir un planificateur qui calcule les prix d'équilibre $p \in \mathbf{R}^\ell_+$ et les impose au marché : on se rapproche des procédés de décentralisation évoqués au chapitre précédent.

d) *Illustration graphique.* Un procédé classique, dû à Edgeworth (1881), permet d'illustrer les considérations précédentes dans le cas $n = k = 2$, sans production. Il s'agit donc de deux consommateurs échangeant deux biens.

Les fonctions d'utilité sont u_1 et u_2, les ressources initiales sont $\omega_1 = (a, 0)$ et $\omega_2 = (0, b)$, de telle sorte que chacun des biens est au départ entièrement concentré dans les mains d'un des agents.

Une allocation est alors un couple (x_1, x_2) de $\mathbf{R}^2_+$ tel que :

$$\begin{cases} x_1^1 + x_2^1 = a \\ x_1^2 + x_2^2 = b. \end{cases} \tag{5.13}$$

Considérons dans $\mathbf{R}^2$ les points $O = (0, 0)$, $A = (a, 0)$, $C = (a, b)$, $B = (0, b)$, et le rectangle OACB. Un point quelconque (x^1, x^2) de ce rectangle définit une allocation (x_1, x_2) par $x_1^1 = x^1$, $x_1^2 = x^2$, $x_2^1 = a - x^1$, $x_2^2 = b - x^2$, et réciproquement. Il revient au même de dire qu'un même point de OACB sera repéré dans les axes $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB})$ pour le joueur 1, dans les axes $(\overrightarrow{CB}, \overrightarrow{CA})$ pour le joueur 2. Avec cette convention, on trace les courbes d'indifférence du joueur 1 ($u_1 =$ constante) et du joueur 2 ($u_2 =$ constante).

Pour le joueur 1 : $O = (0, 0)$, $A = (a, 0)$, $C = (a, b)$, $B = (0, b)$, concavité des courbes d'indifférence tournée vers le haut.

Pour le joueur 2 : $O = (a, b)$, $A = (0, b)$, $C = (0, 0)$, $B = (a, 0)$, concavité des courbes d'indifférence tournée vers le bas.

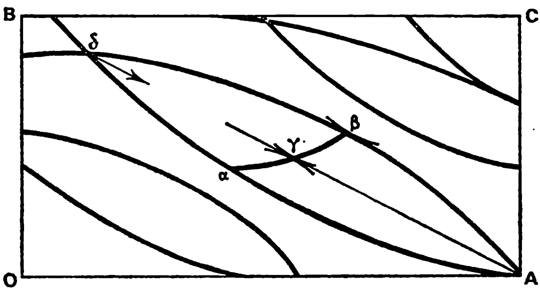


FIG. II

Ce diagramme, appelé « boîte d'Edgeworth », permet de représenter par un même point A les ressources initiales des deux joueurs. Il est clair que l'agent 1 n'acceptera que les points qu'il préfère à $(a, 0)$, c'est-à-dire les points situés au-dessus de sa courbe d'indifférence passant par A. De même, l'agent 2 n'acceptera que les points situés au-dessous de sa courbe d'indifférence passant par A. La région $A\alpha\delta\beta A$ comprise entre ces deux courbes est donc l'ensemble des allocations qui ne sont bloquées ni par le joueur 1 ni par le joueur 2.

En chaque point de cette région passent deux courbes d'indifférence. Si elles sont sécantes, comme en δ, un déplacement dans le sens de la flèche permet d'améliorer les utilités des deux joueurs, c'est-à-dire que l'allocation correspondante est bloquée par la coalition $\{1, 2\}$. Le noyau correspond donc à l'ensemble des points de la région $A\alpha\delta\beta A$ où les courbes d'indifférence sont tangentes : cela donne un segment de courbe $\alpha\gamma\beta$, appelé par Edgeworth courbe de contrat : elle schématise les issues possibles des trocs entre les deux joueurs.

La courbe de contrat est caractérisée par le fait qu'en chacun de ses points les deux courbes d'indifférence ont une tangente commune. Cette tangente commune n'a aucune raison de passer par A; cela a cependant lieu en un point tel que γ. Soient p_1 et p_2 les coefficients directeurs de la droite $A\gamma$, qui sont les mêmes pour le joueur 1 et le joueur 2. Je dis que (γ, p) correspond à un équilibre. En effet, les points situés en dessous de la droite $A\gamma$ représentent tous les biens que le joueur 1 peut se payer en vendant la quantité a de bien 1 au prix p_1, et le fait que γ soit un point de tangence exprime qu'il maximise u_1 sur ce domaine. De même, les points situés au-dessus de la droite $A\gamma$ représentent tous les biens que le joueur 2 peut se payer en vendant la quantité b de bien 2 au prix p_2, et le fait que γ soit un point de tangence exprime qu'il maximise u_2 sur ce domaine. Ainsi donc, γ représente une allocation (x_1, x_2) où chacun des joueurs a choisi ce qu'il préfère parmi ce qu'il peut se payer, c'est-à-dire une allocation d'équilibre correspondant aux prix (p_1, p_2).

La boîte d'Edgeworth permet de se convaincre aisément que les hypothèses de concavité des fonctions d'utilité sont nécessaires à la non-vacuité du noyau : ce sont elles qui permettent d'affirmer que les courbes d'indifférence ont des points de tangence. Elle permet aussi de voir pourquoi les allocations d'équilibre sont contenues dans le noyau. Enfin, nous avons montré comment, au fur et à mesure que l'on augmente le nombre de joueurs, c'est-à-dire qu'on se rapproche des conditions de la concurrence parfaite, le noyau se rétrécit et tend à ne plus contenir que les allocations d'équilibre.

6. Autres types de solutions

Jusqu'à présent, nous nous sommes attachés à la notion de « noyau », estimant qu'elle permet, dans une certaine mesure, de « résoudre » le jeu. Mais bien d'autres types de « solutions » ont été introduits à propos des jeux coopératifs à n personnes. Nous allons en présenter deux, dans le cadre plus restreint des jeux à paiements latéraux.

A) Nucléole

Il nous faut d'abord exposer quelques préliminaires techniques. Pour $p \in \mathbf{N}$, on définit sur $\mathbf{R}^p$ deux relations binaires, notées $\prec$ et $\precsim$, par :

$$x \prec y \Leftrightarrow [\exists j \in \{1, \ldots, p\} : (x_i = y_i \text{ pour } i < j) \text{ et } x_j < y_j] \tag{6.1}$$

$$x \precsim y \Leftrightarrow [x \prec y \text{ ou } x = y]. \tag{6.2}$$

LEMME 6.1. *La relation* $\lesssim$ *est une relation d'ordre total appelée ordre lexicographique.*

LEMME 6.2. *Tout compact non vide* $K \subset \mathbf{R}^p$ *possède un minimum lexicographique unique.*

Démonstration. Le premier lemme est trivial. Quant au second, il s'agit de montrer qu'il existe un $\bar{x} \in K$ unique tel que :

$$\forall y \in K, \quad y \gtrsim \bar{x}. \tag{6.3}$$

Pour cela définissons successivement :

$$K_1 = \{x \in K \mid x_1 = \min_{y \in K} y_1\}$$
$$K_i = \{x \in K_{i-1} \mid x_i = \min_{y \in K_{i-1}} y_i\} \quad \text{pour} \quad 2 \leqslant i \leqslant p.$$

Les K_i, $1 \leqslant i \leqslant p$, sont des compacts non vides emboîtés. Il est clair que leur intersection est réduite à un point $\bar{x}$ qui vérifie (6.3). Il est unique puisque l'ordre est total. ∎

On définit également, composante par composante, une application $\theta : \mathbf{R}^p \to \mathbf{R}^p$ dite de classement :

$$\theta_1(x) = \max\{x_i \mid 1 \leqslant i \leqslant p\} = x_{i_1}$$
$$\theta_2(x) = \max\{x_i \mid 1 \leqslant i \leqslant p,\ i \neq i_1\} = x_{i_2}$$
$$\theta_j(x) = \max\{x_i \mid 1 \leqslant i \leqslant p,\ i \neq i_1, i \neq i_2, \ldots, i \neq i_{j-1}\} = x_{i_j}. \tag{6.4}$$

En d'autres termes, les composantes de $\theta(x)$ sont les composantes de x, classées de la plus grande à la plus petite.

LEMME 6.3. *L'application de classement* θ *est continue.*

Démonstration. Il suffit d'écrire θ sous la forme (en notant $|S|$ le cardinal d'une partie $S \subset \{1, \ldots, p\}$) :

$$\theta_j(x) = \min_{|S| = j-1} \max_{i \notin S} x_i. \tag{6.5}$$

Les projections $x \mapsto x_i$ sont continues, et l'enveloppe supérieure (resp. inférieure) d'une famille finie de fonctions continues est continue. D'où le résultat. ∎

LEMME 6.4. *Si* $x \neq y$ *et* $\theta(x) = \theta(y)$, *alors :*

$$\theta\left(\frac{x+y}{2}\right) \prec \theta(x).$$

Démonstration. Examinons d'abord la première coordonnée :

$$\begin{aligned}
\theta_1\left(\frac{x+y}{2}\right) &= \max_{1 \leqslant i \leqslant p} \left\{\frac{1}{2}(x_i + y_i)\right\} \\
&\leqslant \frac{1}{2} \max_{1 \leqslant i \leqslant p} x_i + \frac{1}{2} \max_{1 \leqslant i \leqslant p} y_i \\
&= \frac{1}{2}\,\theta_1(x) + \frac{1}{2}\,\theta_1(y) = \theta_1(x).
\end{aligned}$$

Si l'inégalité stricte a lieu, $\theta\left(\frac{x+y}{2}\right) \prec \theta(x)$. Si on a l'égalité, cela signifie qu'il existe une coordonnée i_1 telle que $x_{i_1} = y_{i_1} = \theta_1(x) = \theta_1(y) = \theta_1\left(\frac{x+y}{2}\right)$. Supposons que pour $k \leqslant j-1$:

$$x_{i_k} = y_{i_k} = \theta_k(x) = \theta_k(y) = \theta_k\left(\frac{x+y}{2}\right). \tag{6.6}$$

Alors :

$$\begin{aligned}
\theta_j\left(\frac{x+y}{2}\right) &= \max\left\{\frac{1}{2}(x_i + y_i) \,|\, i \neq i_1, \ldots, i_{j-1}\right\} \\
&\leqslant \frac{1}{2} \max\{x_i \,|\, i \neq i_1, \ldots, i_{j-1}\} \\
&\qquad + \frac{1}{2} \max\{y_i \,|\, i \neq i_1, \ldots, i_{j-1}\} \\
&= \frac{1}{2}\,\theta_j(x) + \frac{1}{2}\,\theta_j(y).
\end{aligned}$$

Si l'inégalité stricte a lieu, $\theta\left(\frac{x+y}{2}\right) \prec \theta(x)$. Si on a l'égalité, la formule (6.6) est établie pour $k = j$.

En fin de compte, ou bien $\theta\left(\frac{x+y}{2}\right) \prec \theta(x)$, ou bien $x_{i_k} = y_{i_k}$ pour $1 \leqslant k \leqslant p$. Mais cette dernière éventualité est exclue puisque $x \neq y$. D'où le résultat. ▮

Considérons maintenant un jeu coopératif avec paiements latéraux, $\mathrm{N} = \{1, \ldots, n\}$ l'ensemble de ses joueurs, $v : \mathscr{P}(\mathrm{N}) \to \mathbf{R}$ sa fonction caractéristique. Pour toute imputation $(u_i)_{i\in\mathrm{N}}$ (cf. déf. 1.2) et toute coalition $\mathrm{S} \subset \mathrm{N}$, on notera :

$$u(\mathrm{S}) = \sum_{i\in\mathrm{S}} u_i. \tag{6.7}$$

Dans R^{2^n}, on notera abusivement :

v le vecteur de composantes $v(\mathrm{S})$, $\quad \mathrm{S} \subset \mathrm{N}$. (6.8)

u le vecteur de composantes $u(\mathrm{S})$, $\quad \mathrm{S} \subset \mathrm{N}$. (6.9)

On prendra dorénavant $p = 2^n$ dans les lemmes et définitions précédents. On peut alors introduire :

DÉFINITION 6.5. *On appelle nucléole du jeu* (N, v) *une imputation* $(\bar{u}_i)_{i\in\mathrm{N}}$ *telle que, pour toute imputation* $(u_i)_{i\in\mathrm{N}}$, *on ait :*

$$\theta(v - \bar{u}) \precsim \theta(v - u). \tag{6.10}$$

En général, (6.10) se ramène à $\theta_1(v - \bar{u}) < \theta_1(v - u)$. Mais $\theta_1(v - u)$ est la plus grande composante de $v - u$. Une coalition $\mathrm{S} \subset \mathrm{N}$ s'estimera lésée par l'imputation u si $v(\mathrm{S}) - u(\mathrm{S}) > 0$, et s'estimera bénéficiaire si :

$$v(\mathrm{S}) - u(\mathrm{S}) < 0.$$

Ainsi, $v(\mathrm{S}) - u(\mathrm{S})$ mesure le mécontentement de la coalition S devant l'imputation u. L'imputation $\bar{u}$ minimise donc le mécontentement maximum; en d'autres termes, le nucléole minimise la plainte la plus criante.

La notion de nucléole est due à Schmeidler (1966). Son intérêt principal est que l'on peut très facilement montrer l'existence et l'unicité du nucléole pour un jeu quelconque. En outre, si le noyau est non vide, il contient le nucléole. Ainsi, le nucléole fournit une imputation intéressante si le noyau est vide, et permet de choisir simplement une imputation du noyau si celui-ci est non vide.

PROPOSITION 6.6. *Tout jeu possède un nucléole unique.*

Démonstration. Dire que $(u_i)_{i \in N}$ est une imputation signifie que :

$$u_i \geqslant v(i) \qquad \forall\, i \in N \tag{6.11}$$

$$\sum_{i \in N} u_i = v(N). \tag{6.12}$$

L'ensemble des $(u_i)_{i \in N}$ vérifiant (6.11) et (6.12) est un compact convexe de $\mathbf{R}^n$. On en déduit que l'ensemble des $(u(S))_{S \subset N}$, où u est une imputation, est un compact convexe de $\mathbf{R}^{2^n}$, noté K. On en déduit que $\theta(K)$ est un compact de $\mathbf{R}^{2^n}$ (lemme 6.3) et possède donc un minimum lexicographique unique (lemme 6.2), noté $\bar{\theta}$. Il ne reste plus qu'à montrer que $\bar{\theta}$ est l'image d'une imputation unique, qui sera le nucléole.

Comme $\bar{\theta} \in \theta(K)$, il existe $u \in K$ tel que $\bar{\theta} = \theta(u)$. S'il existait dans K un autre w d'image θ, on aurait :

$$\theta(u) = \theta(w) = \bar{\theta}$$

et donc (lemme 6.4) :

$$\theta\left(\frac{u+w}{2}\right) \prec \bar{\theta}.$$

Mais K est convexe, donc :

$$\frac{u+w}{2} \in \mathrm{K} \quad \text{et} \quad \theta\left(\frac{u+w}{2}\right) \in \theta(\mathrm{K}),$$

en contradiction avec le fait que $\bar{\theta}$ est le minimum lexicographique de $\theta(\mathrm{K})$. D'où le résultat. ∎

PROPOSITION 6.7. *Si le noyau du jeu* (N, v) *est non vide, il contient le nucléole.*

Démonstration. Dire que le noyau est non vide signifie qu'il existe une imputation $(u_i)_{i \in \mathrm{N}}$ telle que :

$$\forall \mathrm{S} \subset \mathrm{N} \qquad u(\mathrm{S}) \geqslant v(\mathrm{S}). \tag{6.13}$$

Toutes les composantes de $(v - u)$ dans $\mathbf{R}^{2^n}$ sont négatives ou nulles, et donc :

$$\theta(v - u) \precsim 0.$$

D'après la définition du nucléole $\bar{u}$ et la transitivité de l'ordre lexicographique :

$$\theta(v - \bar{u}) \precsim 0.$$

En d'autres termes, $\bar{u}$ vérifie également (6.13), et appartient donc au noyau. ∎

PROPOSITION 6.8. *Soit* $\bar{u}$ *le nucléole du jeu* (N, v). *Pour tout couple de joueurs,* $k \neq j$, *on note :*

$$s_{kj} = \max\{v(\mathrm{S}) - \bar{u}(\mathrm{S}) \mid \mathrm{S} \subset \mathrm{N},\ \mathrm{S} \ni k,\ \mathrm{S} \not\ni j\}. \tag{6.14}$$

Alors :

$$s_{kj} > s_{jk} \Rightarrow \bar{u}(j) = v(j). \tag{6.15}$$

Une première interprétation consiste à prendre s_{kj} comme le mécontentement maximum que le joueur k peut mobiliser contre le joueur j. Dire que $s_{kj} > s_{jk}$ signifie alors que le joueur k a un avantage sur le joueur j, et dire que $\bar{u}(j) = v(j)$ signifie qu'il le pousse à bout, c'est-à-dire qu'il réduit le joueur j à sa portion congrue inaliénable. La proposition 6.8 exprimerait que, dans le nucléole, tous les avantages sont menés à terme. Mais on peut aussi l'interpréter comme une propriété de symétrie du nucléole : on a $s_{kj} = s_{jk}$, à moins que $\bar{u}(j) = v(j)$ ou $\bar{u}(k) = v(k)$, c'est-à-dire que l'on ne bute contre les parts inaliénables des individus.

Démonstration. Supposons donc qu'il existe un couple de joueurs, $k \neq j$, tel que :

$$s_{kj} > s_{jk} \tag{6.16}$$

$$\bar{u}(j) > v(j). \tag{6.17}$$

Choisissons $\delta > 0$ assez petit pour que :

$$s_{kj} - \delta > s_{jk} + \delta \tag{6.18}$$

$$\bar{u}(j) - \delta > v(j) \tag{6.19}$$

et définissons u_i, $i \in \mathrm{N}$, par :

$$\begin{aligned} u_i &= \bar{u}_i \quad \text{pour} \quad i \neq k, j \\ u_k &= \bar{u}_k + \delta \\ u_j &= \bar{u}_j - \delta. \end{aligned} \tag{6.20}$$

Il est clair, grâce à (6.19) en particulier, que $(u_i)_{i \in \mathrm{N}}$ constitue une imputation. On aura, pour $\mathrm{S} \subset \mathrm{N}$:

$$v(\mathrm{S}) - u(\mathrm{S}) = v(\mathrm{S}) - \bar{u}(\mathrm{S}) \quad \text{si} \quad (\mathrm{S} \not\ni k \text{ et } \mathrm{S} \not\ni j) \tag{6.21}$$

$$v(\mathrm{S}) - u(\mathrm{S}) = v(\mathrm{S}) - \bar{u}(\mathrm{S}) \quad \text{si} \quad (\mathrm{S} \ni k \text{ et } \mathrm{S} \ni j) \tag{6.22}$$

$$v(\mathrm{S}) - u(\mathrm{S}) < v(\mathrm{S}) - \bar{u}(\mathrm{S}) \quad \text{si} \quad (\mathrm{S} \ni k \text{ et } \mathrm{S} \not\ni j) \tag{6.23}$$

$$v(\mathrm{S}) - u(\mathrm{S}) > v(\mathrm{S}) - \bar{u}(\mathrm{S}) \quad \text{si} \quad (\mathrm{S} \not\ni k \text{ et } \mathrm{S} \ni j). \tag{6.24}$$

Dans $\mathbf{R}^{2^n}$, on obtient $v - u$ à partir de $v - \bar{u}$ en conservant les composantes de type (6.21) et (6.22) et en modifiant les composantes de type (6.23) et (6.24). Par hypothèse $s_{kj} > s_{jk}$; en revenant à (6.14), ceci exprime que la plus grande des composantes de $v - \bar{u}$ que l'on modifiera sera certainement de type (6.23). Elle sera donc diminuée, d'où :

$$\theta(v - u) \prec \theta(v - \bar{u})$$

en contradiction avec le fait que $\bar{u}$ est le nucléole. ∎

Pour illustrer ces considérations sur un exemple très simple, reprenons le jeu à trois personnes de l'exemple 2.2. Le noyau est vide ou non suivant que $a > \frac{2}{3}$ ou $a \leqslant \frac{2}{3}$. Mais le nucléole est toujours constitué de l'imputation $(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3})$; on vérifie bien la symétrie.

B) Solutions de von Neumann-Morgenstern

Reprenons l'analyse du blocage. Cette fois, nous ne nous contenterons plus de savoir que la coalition S peut bloquer l'imputation u : nous lui demanderons de préciser sa pensée et de dire quelle nouvelle imputation elle propose à la place de u. On est ainsi amené à constituer un catalogue d'imputations bloquantes, et à chercher à le rendre le plus petit possible. Précisons cette idée; on considère un jeu coopératif (N, v) avec paiements latéraux.

Définition 6.9. *On dit qu'une imputation w bloque une imputation u s'il existe une coalition* $S \subset N$, *telle que :*

$$u_i < w_i \qquad \forall\, i \in S. \tag{6.25}$$

$$\sum_{i \in S} w_i \leqslant v(S). \tag{6.26}$$

Définition 6.10. *On appelle solution de von Neumann-Morgenstern toute famille* M *d'imputations telle que :*

toute imputation du jeu soit bloquée par un élément de M (6.27)

de deux imputations de M, *aucune ne bloque l'autre.* (6.28)

Depuis l'ouvrage de von Neumann et Morgenstern (1944), la question de savoir si tout jeu possède une solution $M \neq \varnothing$ était restée en suspens. Lucas (1968) y a récemment répondu par la négative, en construisant un contre-exemple à 10 joueurs. La difficulté réside dans le fait que la relation de blocage entre imputations n'est ni antisymétrique ni transitive.

La seule remarque d'ordre général que l'on puisse faire est que, si le noyau C et une solution M sont tous deux non vides, alors $C \subset M$. Pour le reste, contentons-nous de reprendre le jeu à trois personnes de l'exemple 2.2 et de représenter graphiquement ses solutions suivant les valeurs du paramètre *a*. Pour cela, traçons un triangle

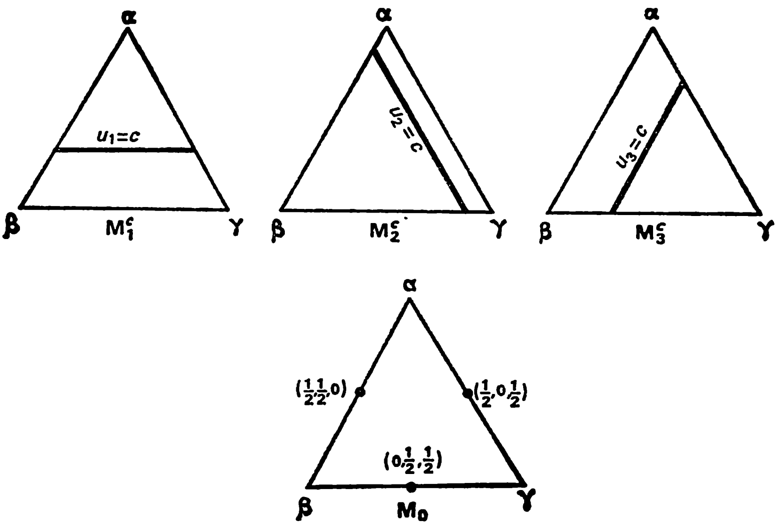


Fig. III

équilatéral $\alpha\beta\gamma$: on identifiera l'imputation u au point δ de coordonnées planes :

$$\delta^1 = u_1\alpha^1 + u_2\beta^1 + u_3\gamma^1$$
$$\delta^2 = u_1\alpha^2 + u_2\beta^2 + u_3\gamma^2.$$

Ainsi, l'imputation (1, 0, 0) est représentée par α, (0, 1, 0) par β, et (0, 0, 1) par γ.

Pour $a = 1$, on peut proposer une solution symétrique M_0 composée des trois imputations $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0)$, $(\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2})$, $(0, \frac{1}{2}, \frac{1}{2})$. Mais il y a une infinité d'autres solutions; ainsi, pour tout $c \in [0, \frac{1}{2}[$, l'ensemble :

$$M_1^c = \{(c, x, 1 - c - x) \mid 0 \leqslant x \leqslant 1 - c\}$$

constitue une solution. De même, M_2^c et M_3^c (fig. III).

Pour les autres valeurs du paramètre a, nous ne nous intéresserons qu'à la solution symétrique M_0. Pour $\frac{2}{3} < a < 1$, elle se compose de trois segments de médiatrices :

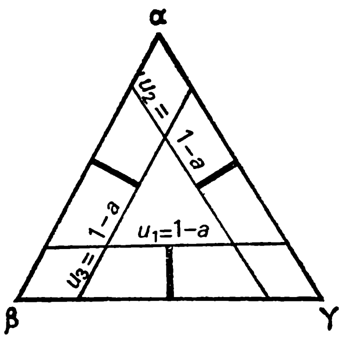


Fig. IV

Pour $\frac{1}{2} < a < \frac{2}{3}$, le noyau est non vide et vient grossir la solution :

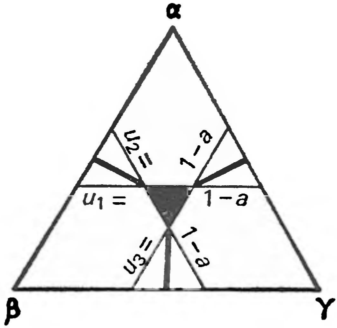


FIG. V

Pour $0 < a \leqslant \frac{1}{2}$, le noyau absorbe entièrement la solution :

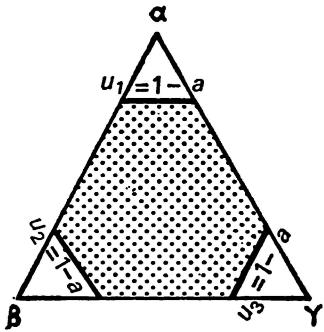


FIG. VI

Enfin, pour $a = 0$, le noyau et la solution symétrique coïncident avec l'ensemble de toutes les imputations.

APPENDICE

1. Ensembles convexes

Tous les espaces vectoriels considérés ici seront réels. Si alors u et v sont deux points d'un espace vectoriel V, on appelle segment d'extrémités u et v, et on note $[u, v]$, l'ensemble :

$$[u, v] = \{\lambda u + (1 - \lambda) v \mid 0 \leqslant \lambda \leqslant 1\}.$$

Un ensemble $A \subset V$ est dit *convexe* si et seulement si, pour tout couple (u, v) de points de A, le segment $[u, v]$ est inclus dans A. L'espace V tout entier est convexe, ainsi que ses variétés affines, et par convention la partie vide est convexe.

Toute intersection de convexes est convexe, mais une réunion d'ensembles convexes n'est pas convexe en général. Si A est une partie quelconque de V, l'intersection de tous les convexes contenant A est elle-même convexe, et c'est même le plus petit convexe contenant A. On l'appelle l'*enveloppe convexe* de A, et on la note co A. On vérifie aisément que :

$$\operatorname{co} A = \{\sum_{i=1}^{n} \lambda_i u_i \mid n \in \mathrm{N}, \sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 1, \lambda_i \geqslant 0, u_i \in A, 1 \leqslant i \leqslant n\}.$$

Soit H un hyperplan affine d'équation $\ell(u) = \alpha$, où ℓ est une forme linéaire non nulle sur V et $\alpha \in \mathbf{R}$. On appelle *demi-espaces ouverts* (resp. *fermés*) limités par H les deux ensembles :

$$\{u \in V \mid \ell(u) < \alpha\} \quad \text{et} \quad \{u \in V \mid \ell(u) > \alpha\}$$
$$\text{resp.} \{u \in V \mid \ell(u) \leqslant \alpha\} \quad \text{et} \quad \{u \in V \mid \ell(u) \geqslant \alpha\}.$$

Ce sont deux convexes, dont la définition est indépendante du choix de ℓ et de α donnant l'équation de H.

2. Séparation des convexes

On appelle espace vectoriel topologique, en abrégé e.v.t., un espace vectoriel V muni d'une topologie rendant continues les applications :

$$(u, v) \mapsto u + v \quad \text{de } V \times V \text{ dans } V$$
$$(\lambda, u) \mapsto \lambda u \quad \text{de } \mathbf{R} \times V \text{ dans } V.$$

Les voisinages d'un point quelconque se déduisent alors des voisinages de l'origine par translation. Un e.v.t. est dit localement convexe, en abrégé e.l.c., si l'origine admet un système fondamental de voisinages convexes. C'est le cas des espaces normés : il suffit de prendre le système de voisinages constitué par les boules de centre O. Un produit quelconque d'espaces normés est toujours localement convexe, mais seul un produit fini d'espaces normés est normé. Tous les e.v.t. usuels de l'analyse sont localement convexes.

Soient alors V un e.v.t. et H un hyperplan affine d'équation $\ell(u) = \alpha$, où ℓ est une forme linéaire non nulle sur V et $\alpha \in$ R. On montre que l'ensemble H est topologiquement fermé si et seulement si la fonction ℓ est continue. Dans ces conditions, les demi-espaces ouverts (resp. fermés) déterminés par H seront topologiquement ouverts (resp. fermés).

Dans un e.v.t. V, l'adhérence d'un ensemble convexe est convexe, et l'intérieur d'un ensemble convexe est convexe (éventuellement vide). Si A est une partie quelconque de V, l'intersection de tous les convexes fermés contenant A est le plus petit convexe fermé contenant A. C'est aussi l'adhérence de l'enveloppe convexe de A (et non l'enveloppe convexe de l'adhérence !). On l'appelle *l'enveloppe convexe fermée* de A et on la note $\overline{\text{co}}$A.

On dit qu'un hyperplan affine H *sépare* (resp. *sépare strictement*) deux ensembles A et B si chacun des demi-espaces fermés (resp. ouverts) limités par H contient l'un d'eux. Analytiquement, si $\ell(u) = \alpha$ est l'équation de H, cela s'écrira :

(séparation)

$$\forall u \in A, \quad \ell(u) \leqslant \alpha \quad \text{et} \quad \forall v \in B, \quad \ell(v) \geqslant \alpha$$

(séparation stricte)

$$\forall u \in A, \quad \ell(u) < \alpha \quad \text{et} \quad \forall v \in B, \quad \ell(v) > \alpha.$$

Enonçons à présent le théorème de Hahn-Banach sous sa forme géométrique, et ses conséquences quant à la séparation des ensembles convexes. C'est bien entendu dans le cadre des e.l.c. qu'on a les résultats les plus précis.

THÉORÈME DE HAHN-BANACH. *Soient* V *un e.v.t. réel,* A *un ouvert convexe non vide et* M *un sous-espace affine non vide ne rencontrant pas* A. *Alors il existe un hyperplan affine fermé contenant* M *et ne rencontrant pas* A.

COROLLAIRE 1. *Soient* V *un e.v.t. réel,* A *un ouvert convexe non vide,* B *un ensemble convexe non vide ne rencontrant pas* A. *Il existe un hyperplan affine fermé* H *séparant* A *et* B.

COROLLAIRE 2. *Soit* V *un e.l.c. réel, soient* C *et* B *deux ensembles convexes disjoints non vides, l'un compact et l'autre fermé. Il existe un hyperplan affine fermé* H *séparant strictement* C *et* B.

3. FONCTIONS CONVEXES

Soit C un ensemble convexe et f une application de C dans $\mathbf{R}$. La fonction f est dite *convexe* si, pour tout couple (α, β) de scalaires positifs de somme 1, et tout couple (x, y) de points distincts de C, on a :

$$f(\alpha x + \beta y) \leqslant \alpha f(x) + \beta f(y).$$

Elle est dite *strictement convexe* si :

$$f(\alpha x + \beta y) < \alpha f(x) + \beta f(y).$$

Une fonction strictement convexe ne peut atteindre son minimum en deux points distincts. Si en effet $f(x) = f(y) = m$, avec $x \neq y$, on aura $\dfrac{x+y}{2} = z \in \mathrm{C}$ et $f(z) < m$, donc m ne saurait être le minimum.

Une fonction convexe définie sur $\mathbf{R}^n$ tout entier est nécessairement continue. Il n'en est pas de même si elle n'est définie que sur une partie de $\mathbf{R}^n$, ou si on est en dimension infinie. On dira que f est *semi-continue inférieurement*, en abrégé *s.c.i.*, si :

$$x \to \bar{x} \Rightarrow f(\bar{x}) \leqslant \liminf f(x).$$

Il peut être utile de caractériser une fonction par son épigraphe :

$$\operatorname{epi} f = \{ (x, \lambda) \mid x \in \mathrm{C} \quad \text{et} \quad \lambda \geqslant f(x) \} \subset \mathrm{V} \times \mathbf{R}.$$

Ainsi, f est convexe si et seulement si epi f est convexe, et f est s.c.i. si et seulement si epi f est fermé.

COMMENTAIRES BIBLIOGRAPHIQUES

Depuis l'ouvrage resté classique de von NEUMANN et MORGENSTERN (*Theory of games and economic behavior*, Princeton University Press, 1944, 3e éd. en 1953) ont paru de nombreux traités de théorie des jeux. Signalons parmi eux, l'ouvrage de S. KARLIN (*Mathematical methods and theory in games, programming, and economics*, Addison-Wesley, 1959) et le livre récent de G. OWEN (*Game theory*, Saunders, 1968). Une série d'ouvrages publiés par Princeton University Press, sous le nom collectif « Contributions to game theory » (*Annals of Mathematic Studies*, nos 24, 28, 39, 40) et « Advances in game theory » (*Annals of Mathematic Studies*, no 52) rendent compte de la recherche en ce domaine jusqu'aux années soixante. Le relais a été pris par les publications du Centre de Recherches en théorie des jeux et en économie mathématique de l'Université hébraïque de Jérusalem, lancées en 1963.

Au chapitre Ier, par le biais des jeux finis à information complète, nous avons abordé un tout autre domaine de la théorie des jeux, relevant principalement de la théorie des graphes. Nous n'avons fait qu'effleurer cette question, laissant à un autre ouvrage de la même collection le soin d'en faire une étude plus poussée. Le lecteur intéressé peut se référer aux travaux de C. BERGE.

La théorie des jeux finis sous forme normale est entièrement due à J. von NEUMANN, dans une série de publications inaugurée en 1928 (Zur Theorie der Gesellschaftspiele, *Math. Ann.*, *100*, pp. 295-320). Par certains de ses travaux E. BOREL fait figure de précurseur, particulièrement dans le domaine des stratégies mixtes (*Traité du calcul des probabilités et de ses applications*, Gauthier-Villars, 1938). Depuis l'énoncé original par von Neumann du théorème du minimax, nombre d'auteurs se sont attachés à en perfectionner la démonstration et à en affaiblir les hypothèses. La démonstration que nous donnons au paragraphe 5, reposant sur le théorème de Hahn-Banach, est due à J.-P. Aubin, et permet de retrouver tous les théorèmes infsup de la littérature.

Elle permet aussi de retrouver les théorèmes de dualité en programmation convexe; pour plus de détails et des exemples, on pourra se porter à l'ouvrage récent de I. EKELAND et R. TEMAM (*Analyse convexe et problèmes variationnels*, Dunod-Gauthier-Villars, 1974).

Une autre voie consiste à s'appuyer sur un théorème de point fixe plutôt que sur le théorème de Hahn-Banach. C'est dans ce but que KAKUTANI démontra en 1941 sa fameuse généralisation du théorème de Brouwer (A generalization of Brouwer's fixed-point theorem, *Duke Mathematical Journal*, *8*, pp. 457-458). Cette méthode ne permet pas d'obtenir des théorèmes infsup aussi fins que ceux du paragraphe 5, mais par contre elle permet de traiter le cas des jeux à $n > 2$ personnes; c'est ainsi qu'au paragraphe 3 on démontre le théorème de NASH plus simplement que son auteur (*Equilibrium points in n-person games*, Proceedings of the National Academy of Sciences U.S.A., 1950, *36*, pp. 48-49).

Le chapitre II, consacré aux jeux coopératifs, contient beaucoup plus de développements récents. En exhibant dans son article de 1968 (A game with no solution, *Bull. A.M.S.*, *74*, pp. 237-239) un jeu sans solution au sens de von Neumann-Morgenstern, W. LUCAS fermait une voie de recherches qui avait obnubilé les esprits pendant longtemps. Cette réponse négative à une des plus importantes questions léguées par von Neumann était pressentie depuis longtemps, et les chercheurs ne l'avaient pas attendue pour s'intéresser à d'autres concepts de solutions, particulièrement au noyau. La caractérisation des jeux à noyau non vide comme jeux compensés est due à L. SHAPLEY (On balanced sets and cores, *Naval Research Logistics Quarterly*, 1967, *14*, pp. 453-460). L'extension de ce résultat au cas des jeux sans paiements latéraux a fait l'objet d'un important travail de H. SCARF (The core of an *n*-person game, *Econometrica*, 1967, *35*, pp. 50-69). Nous en présentons ici une forme, simplifiée par des hypothèses de convexité, due à J.-P. AUBIN.

Le formalisme des paragraphes 4 et 5 remonte à G. DEBREU qui, dans sa thèse (*Theory of value*, Wiley, 1959), posait les fondements de l'économie mathématique. Il y démontrait d'ailleurs le théorème d'existence d'équilibres de Walras, que nous retrouvons au paragraphe 5 comme conséquence du théorème de Scarf-Aubin. La procédure que nous avons employée, consistant à rétrécir le noyau en multipliant les agents économiques de type donné, remonte à un article de 1963 de DEBREU et SCARF (A limit theorem on the core of an economy, *International Economic Review*, *4*, pp. 235-246).

Pour terminer, signalons qu'il est un domaine particulièrement important que nous n'avons même pas abordé : il s'agit des jeux différentiels. Hélas, il est aussi particulièrement compliqué et obscur, si bien que la théorie actuelle ne dépasse guère le niveau d'un catalogue d'exemples. Tout au plus peut-on distinguer deux écoles : l'une américaine, marquée par les ouvrages de R. ISAACS (*Differential Games*, Wiley, 1965) et d'A. FRIEDMAN (*Differential Games*, Wiley, 1971), l'autre russe, autour de L. S. PONTRYAGIN (*Jeux différentiels linéaires*, Actes du Congrès international des Mathématiciens, Dunod-Gauthier-Villars, 1970).

INDEX DES TERMES ET NOTATIONS

TABLE DES MATIÈRES

1974. — Imprimerie des Presses Universitaires de France. — Vendôme (France)
ÉDIT. N° 33 332 IMPRIMÉ EN FRANCE IMP. N° 24 239