Stratégies exécutables II

Ivar Ekeland

CEREMADE

28 Mars 2024

C'est le modèle macroéconomique en usage, descendant du modèle de Ramsey (1928)

$$\max_{c(\cdot)} \int_0^\infty e^{-rt} u\left(c\left(t\right)\right) dt,$$

$$\frac{dk}{dt} = f\left(k\right) - c \quad k\left(0\right) = k_0$$

$$k\left(t\right) \geq 0, \quad c\left(t\right) \geq 0$$

On prend classiquement

$$u\left(c\right) = \frac{1}{\alpha} c^{\alpha}, \quad \alpha < 1, \quad u\left(c\right) = \ln c$$

$$f\left(k\right) = \frac{1}{\beta} k^{\beta}, \quad 0 < \beta < 1$$

C'est un modèle unitaire : un seul bien, un seul consommateur,un seul décideur, pas de monnaie. La société est représentée par un consommateur fictif qui vit éternellement et cherche à maximiser son utilité escomptée, qui à son tour représente le bien-être social. Pour ce faire il doit répartir la production entre consommation et investissement

Theorem

Il y a une unique stratégie optimale $c(t) = \sigma(k(t))$ *qui converge vers un état stationnaire*

$$k(t) \longrightarrow k_\infty, \;\; c(t) \longrightarrow c_\infty = f(k_\infty) \;\; \textit{when } t \longmapsto \infty$$

La limite k_∞ *est indépendante de* k_0 *et de* u*. Elle est caractérisée par*

$$f'(k_\infty) = \delta$$

Equité intergénérationnelle

La génération actuelle a-t-elle le droit de disposer à son gré de la planète? Ma position, celle de Rachid Sumaila, et celle de l'immense majorité des êtres humains est que non: elle ne peut que l'utiliser pour son usage, sans pour autant compromettre celui des générations futures, ou même, selon certains, des autres êtres vivants. Celle veut dire que le critère doit être modifiè pour prendre en compte le bien-être des générations futures.

La population croît au taux n. Tous les individus sont identiques, avec $u(c)$ comme utilité et r comme taux de préférence pour le présent. Le *bien-être social* est calculé en évaluant l'utilité de chacun à la naissance et en escomptant au taux $\rho > r + n$ celui des générations futures.
Un flot de consommation $c(t)$ crée un bien-être

$$\int_0^\infty u(c_t)\, e^{-rt} dt \quad \text{pour la présente génération}$$

$$\int_s^\infty u(c_t)\, e^{-r(t-s)} ds \quad \text{pour ceux né.e.s entre } s \text{ and } s + ds$$

$$\left[\int_0^\infty u(c_t)\, e^{-rt} dt + \int_0^\infty e^{ns} e^{-\rho s} ds \int_s^\infty u(c_t)\, e^{-r(t-s)} dt\right]$$

On obtient finalement le critère de bien-être (à un coefficient près)

$$\int_0^\infty u(c_t) \left[e^{-(\rho-n)t} + (n + r - \rho - 1)\, e^{-rt}\right] dt$$

Le critère proposé est

$$I(c; k_0) = \int_0^\infty R(t)u(c(t))\,dt$$

où le flot de consommation $c(\cdot)$ doit vérifier les conditions suivantes

$$\frac{dk}{dt} = f(k) - c \quad k(0) = k_0$$
$$k(t) \geq 0, \quad c(t) \geq 0$$

Si $R(t)$ n'est pas une exponentielle, on sait que les solutions optimales ne sont pas exécutables. Il faut donc proposer autre chose

- Une stratégie markovienne $c = \sigma(k)$ est annoncée et est connaissance commune

- Une stratégie markovienne $c = \sigma(k)$ est annoncée et est connaissance commune
- Le décideur au temps t hérite de ces prédecesseurs d'un capital $k(t)$

- Une stratégie markovienne $c = \sigma(k)$ est annoncée et est connaissance commune
- Le décideur au temps t hérite de ces prédecesseurs d'un capital $k(t)$
- Il pense que ses successeurs vont appliquer la stratégie σ

- Une stratégie markovienne $c = \sigma(k)$ est annoncée et est connaissance commune
- Le décideur au temps t hérite de ces prédecesseurs d'un capital $k(t)$
- Il pense que ses successeurs vont appliquer la stratégie σ
- Il doit décider de sa consommation $c(t)$ aujourd'hui, c'est-à-dire sur $[t,\ t+\varepsilon]$,oú $\varepsilon > 0$ est petit

Stratégies exécutables

Le problème du décideur

- Une stratégie markovienne $c = \sigma(k)$ est annoncée et est connaissance commune
- Le décideur au temps t hérite de ces prédecesseurs d'un capital $k(t)$
- Il pense que ses successeurs vont appliquer la stratégie σ
- Il doit décider de sa consommation $c(t)$ aujourd'hui, c'est-à-dire sur $[t, \ t + \varepsilon]$,oú $\varepsilon > 0$ est petit
- Pour ce faire, il doit résoudre un probléme d'optimisation instantané

- Une stratégie markovienne $c = \sigma(k)$ est annoncée et est connaissance commune
- Le décideur au temps t hérite de ces prédecesseurs d'un capital $k(t)$
- Il pense que ses successeurs vont appliquer la stratégie σ
- Il doit décider de sa consommation $c(t)$ aujourd'hui, c'est-à-dire sur $[t, \ t+\varepsilon]$,oú $\varepsilon > 0$ est petit
- Pour ce faire, il doit résoudre un probléme d'optimisation instantané
- σ est une *stratégie exécutable* si $c(t) = \sigma(k(t))$

Stratégies exécutables

Le problème du décideur

- Une stratégie markovienne $c = \sigma(k)$ est annoncée et est connaissance commune
- Le décideur au temps t hérite de ces prédecesseurs d'un capital $k(t)$
- Il pense que ses successeurs vont appliquer la stratégie σ
- Il doit décider de sa consommation $c(t)$ aujourd'hui, c'est-à-dire sur $[t, \ t+\varepsilon]$,oú $\varepsilon > 0$ est petit
- Pour ce faire, il doit résoudre un probléme d'optimisation instantané
- σ est une *stratégie exécutable* si $c(t) = \sigma(k(t))$
- On notera que c'est une exigence minimale: si σ n'est pas une stratégie exécutable, elle ne sera pas appliquée, à moins que l'on ne dispose d 'un moyen de coercition mis en place en $t = 0$.

- Une stratégie markovienne $c = \sigma(k)$ est annoncée et est connaissance commune
- Le décideur au temps t hérite de ces prédecesseurs d'un capital $k(t)$
- Il pense que ses successeurs vont appliquer la stratégie σ
- Il doit décider de sa consommation $c(t)$ aujourd'hui, c'est-à-dire sur $[t,\ t+\varepsilon]$,oú $\varepsilon > 0$ est petit
- Pour ce faire, il doit résoudre un probléme d'optimisation instantané
- σ est une *stratégie exécutable* si $c(t) = \sigma(k(t))$
- On notera que c'est une exigence minimale: si σ n'est pas une stratégie exécutable, elle ne sera pas appliquée, à moins que l'on ne dispose d 'un moyen de coercition mis en place en $t = 0$.
- Ce qui est surprenant, c'est qu'une condition aussi faible suffise à caractériser des stratégies

Pour toute stratégie σ on notera $K(\sigma; t, k_0)$ le flot associé à l 'equation différentielle

$$\frac{dk}{dt} = f(k) - \sigma(k)$$

On se limitera dorénavant aux stratégies dites *convergentes*:

$$\exists k_\infty : \forall k_0, \quad \lim_{t \to \infty} K(\sigma; t, k_0) = k_\infty$$

A tout $k_0 > 0$ on associe le nombre:

$$V(k_0) = \int_0^\infty R(t)\, u(\sigma(K(\sigma; t, k_0)))\, dt$$

On définit ainsi une fonction V sur $(0, \infty)$,dite *fonction valeur*, qui se réduit à la fonction de Bellman dans le cas où $R(t) = e^{rt}$

Stratégies exécutables

Définition

Le décideur se trouve en un point k_0. Il consomme c aujourd'hui, c'est-à-dire sur $[t,\ t+\varepsilon]$. L'état résultant en $t+\varepsilon$ est $f(k_0)-c$. A partir de là on applique la stratégie σ.
Le bilan de l'opération est: $\varepsilon\left(u\left(c\right)+V'(k_0)(f\left(k_0\right)-c)\right)$

Definition

La stratégie σ est exécutable si:

$$\forall k_0, \quad \sigma\left(k\right)=\arg\max_c\left\{u\left(c\right)+V'(k_0)(f\left(k_0\right)-c)\right\}$$

Si on connaît la fonction V, on en déduit la stratégie σ :

$$u'\left(\sigma\left(k\right)\right)=V'\left(k\right)$$

Theorem

Soit $V : (0, \infty) \to \mathbb{R}$ *une fonction* C^2 *telle que la stratégie correspondante* σ *converge vers un certain* k_∞. *Alors* σ *est une stratégie exécutable et* V *est sa fonction valeur si et seulement si* V *vérifie l'équation*

$$\max_c \left\{ u(c) + V'(k)(f(k) - c) \right\} = -\int_0^\infty R'(t)\, u(\sigma(k_t))\, dt \tag{1}$$

avec la condition aux limites

$$V(k_\infty) = u(f(k_\infty)) \int_0^\infty R(t)\, dt \tag{2}$$

Caractérisation

Une deuxième équation

On considère une stratégie σ convergeant vers un état k_∞

Lemma

Soit $h(t)$ *une fonction à décroissance exponentielle. On a::*

$$I(k) = \int_0^\infty h(t)\, u(\sigma(K(\sigma; t, k_0)))\, dt$$

si et seulement si on a:

$$h(0)\, u(\sigma(k)) + I'(k)(f(k) - \sigma(k)) + \int_0^\infty h'(s)\, u(\sigma(K(\sigma; s, k_0)))\, ds = 0$$

$$I(k_\infty) = u(f(k_\infty)) \int_0^\infty h(t)\, dt$$

Il suffit de dériver par rapport à t et en $t = 0$ la première expression

Réécritures 1

$$\max_c \left\{ u(c) + V'(k)(f(k) - c) \right\} = -\int_0^\infty R'(t)\, u(\sigma(k_t))\, dt$$

On peut la réécrire sous deux formes différentes. La premiére

$$\max_c \left\{ u(c) + V'(k)(f(k) - c) \right\} = W(k)$$

avec

$$w(k) = -\int_0^\infty R'(t)\, u(\sigma(k_t))\, dt$$

qui est le pendant de celle que nous avions obtenue dans le cas discret.

Réécritures 2

$$\max_c \left\{ u\left(c\right) + V'\left(k\right)\left(f\left(k\right) - c\right) \right\} = -\int_0^\infty R'\left(t\right) u\left(\sigma\left(k_t\right)\right) dt$$

On peut la réécrire sous deux formes différentes. La seconde

$$\max_c \left\{ u\left(c\right) + v'\left(k\right)\left(f\left(k\right) - c\right) \right\} = \rho\left(k\right) v\left(k\right)$$

avec $\rho\left(k\right) = -\left(\int_0^\infty R'\left(t\right) u\left(\sigma\left(k_t\right)\right) dt\right) \left(\int_0^\infty R\left(t\right) u\left(\sigma\left(k_t\right)\right) dt\right)^{-1}$, qui dans le cas $R\left(t\right) = e^{rt}$ se réduit à HJB

$$\max_c \left\{ u\left(c\right) + V'\left(k\right)\left(f\left(k\right) - c\right) \right\} = rV\left(k\right)$$

Le cas biexponentiel

$$\max \int_0^\infty \left[(1-\lambda) e^{-\rho t} + \lambda e^{-\delta t} \right] u(c(t))\, dt$$

On suppose $\rho > \delta$. On cherche des stratégies *convergentes*

$$\frac{dk}{dt} = f(k) - \sigma(k) \Longrightarrow \quad \exists k_\infty : \forall\ k(0),\ k(t) \longrightarrow k_\infty$$

Pour simplifier les calculs, on prendra $u(c) = \ln c$. Alors:

$$V(k) = \int_0^\infty \left(\lambda e^{-\delta t} + (1-\lambda) e^{-\rho t} \right) \ln(\sigma(k(t)))\, dt$$

Conditions nécessaires

L 'équation (1) devient:

$$\max_c \left\{ \ln c + V'(k)(f(k) - c) \right\} = -\int_0^\infty \left(\lambda e^{-\delta t} + (1-\lambda) e^{-\rho t} \right) \ln(c_t)\, dt$$

avec $c = \sigma(k)$. En calculant le maximum au premier membre et en utilisant $u'(c) = \frac{1}{c} = V'(k)$ on trouve

$$\left(f - \frac{1}{V'} \right) V' - \ln V' = -\int_0^\infty \left(\lambda e^{-\delta t} + (1-\lambda) e^{-\rho t} \right) \ln(\sigma(k_t))\, dt$$

On introduit la fonction auxiliaire

$$W(k) = \int_0^\infty \left(\lambda e^{-\delta t} - (1-\lambda) e^{-\rho t} \right) \ln(\sigma(k_t))\, dt$$

Alors, d'après le Lemme, on a une equation supplementaire pour W

$$(2\lambda - 1)\ln(\sigma(k)) + W'(k)(f(k) - \sigma(k)) + \int^\infty \Big(-\lambda \delta e^{-\delta t} + (1-\lambda)\rho e^{-\rho}$$

Conditions suffisantes

Posons $a = (\delta + \rho)/2$ and $b = (\delta - \rho)/2$

Theorem

Si le système

$$\left(f - \frac{1}{v'}\right) v' - \ln v' = av + bw$$

$$\left(f - \frac{1}{v'}\right) w' - (2\lambda - 1) \ln v' = bv + cw$$

a une solution C^2 au voisinage de k_∞ avec

$$v'(k_\infty) = \frac{1}{f(k_\infty)}$$

$$av'(k_\infty) + bw'(k_\infty) = \frac{f'(k_\infty)}{f(k_\infty)}$$

alors $\sigma(k) := 1/v'(k)$ est une stratégie exécutable convergeant vers k_∞

Un théorème d'existence

Dèfinissons $\underline{k} \leq \overline{k}$ by:

$$f'\left(\underline{k}\right) = \lambda\delta + (1-\lambda)\,\rho, \quad f'\left(\bar{k}\right) = \frac{1}{\frac{\lambda}{\delta} + \frac{1-\lambda}{\rho}}$$

Theorem

Pour tout $k_\infty \in \left[\underline{k}\ ,\ \bar{k}\right]$,on a une stratégie executable convergeant vers k_∞

$$\frac{dk}{dt} = f(k) - \sigma(k) \Longrightarrow \quad k(t) \longrightarrow k_\infty \quad \forall k(0)$$

- Il y a des *points stationnaires*, comme dans le cas exponentiel, mais
- Il y en a *trop* ! Le problème du choix rationnel n'est pas complètement résolu encore

Discussion

Soit k_1 et k_2 deux points stationnaires pour deux strategies executables

1. σ_1 convergeant vers k_1
2. σ_2 convergeant vers k_2

Les gains correspondants en partant de k_2 sont:

$$
\begin{aligned}
v_1 &= \left(\frac{\lambda}{\delta} + \frac{(1-\lambda)}{\rho}\right) \ln f\left(k_1\right) + v'\left(k_1\right)\left(k_2 - k_1\right) \\
v_2 &= \left(\frac{\lambda}{\delta} + \frac{(1-\lambda)}{\rho}\right) \ln f\left(k_2\right) \\
v_2 - v_1 &= \left[\left(\frac{\lambda}{\delta} + \frac{(1-\lambda)}{\rho}\right) f'\left(k_1\right) - 1\right] \frac{\left(k_2 - k_1\right)}{f\left(k_1\right)}
\end{aligned}
$$

Si $\lambda < 1$ la strategie σ_2 est preferable si $k_2 > k_1$ ce qui est toujours possible sauf si $k_2 = \overline{k}$

Conclusion

$$\int_0^\infty \left[\lambda \exp\left(-\delta t\right) + \left(1-\lambda\right)\exp\left(-\rho t\right)\right] u\left(c\left(t\right)\right) dt,$$
$$\frac{dk}{dt} = f\left(k\left(t\right)\right) - c\left(t\right) \text{ and } k\left(0\right) = k_0$$

avec $\rho > \delta$ et $\lambda < 1$ Il y a une infinite de strategies executables, chacune convergeant vers un $k \in [\underline{k}, \ \bar{k}]$

- Si $k < \overline{k}$, les générations futures finiront par trouver $\overline{k}$ plus avantageuses

Conclusion

$$\int_0^\infty \left[\lambda \exp\left(-\delta t\right) + \left(1-\lambda\right)\exp\left(-\rho t\right)\right] u\left(c\left(t\right)\right) dt,$$

$$\frac{dk}{dt} = f\left(k\left(t\right)\right) - c\left(t\right) \text{ and } k\left(0\right) = k_0$$

avec $\rho > \delta$ et $\lambda < 1$ Il y a une infinite de strategies executables, chacune convergeant vers un $k \in [\underline{k},\ \bar{k}]$

- Si $k < \overline{k}$, les générations futures finiront par trouver $\overline{k}$ plus avantageuses
- Toute la stratégie se défait alors par la fin: elle n'est plus credible

Conclusion

$$\int_0^{\infty} \left[\lambda \exp\left(-\delta t\right) + \left(1-\lambda\right) \exp\left(-\rho t\right)\right] u\left(c\left(t\right)\right) dt,$$

$$\frac{dk}{dt} = f\left(k\left(t\right)\right) - c\left(t\right) \text{ and } k\left(0\right) = k_0$$

avec $\rho > \delta$ et $\lambda < 1$ Il y a une infinite de strategies executables, chacune convergeant vers un $k \in [\underline{k}, \ \bar{k}]$

- Si $k < \overline{k}$, les générations futures finiront par trouver $\overline{k}$ plus avantageuses
- Toute la stratégie se défait alors par la fin: elle n'est plus credible
- *Le seul choix rationnel* est $k = \underline{k}$

Some references

- **For intergenerational equity**:
  Sumaila, U.R., Walters, C., 2005,. "*Intergenerational discounting: a new intuitive approach*", Ecological Economics 52, 135-142.
- **For the general theory in the deterministic case:**
  Ekeland and Lazrak "*Being serious about non-commitment*"

http://arxiv.org/abs/math/0604264
Ekeland and Lazrak, "*Equilibrium policies when preferences are time-inconsistent*"
http://arxiv.org/abs/0808.3790

- **For the quasi-exponential case:**

Ekeland, Lectures at the *PIMS Summer School on Risk*, 2008:
http://www.pims.math.ca/files/Lecture%205%20-%20Time%20Inconstency.pdf

- **For the stochastic case:**

Ekeland and Pirvu "*Investment and consumption without commitment*"
http://arxiv.org/abs/0708.0588 - to appear "Economics and Financial Mathematics"