Université Paris VI
Master 1 : Modèles stochastiques pour la finance

TD 5 - 9 : Contrôle stochastique à horizon fini

1. Chaîne de Markov inhomogène à valeurs réelles (1). On considère un processus stochastique défini par

$$X_0 = x_0 \in \mathbb{R}, \qquad X_{n+1} = X_n(1 + \frac{\alpha}{n+1} Y_n),$$

où $\alpha \in \mathbb{R}$ et les Y_n sont des vaiid e loi $\mathcal{N}(0,1)$ (i.e. de densité $\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}}$ sur $\mathbb{R}$).

a) Déterminer le noyau de cette chaîne de Markov inhomogène.

b) Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$ mesurable. Exprimer sous la forme d'intégrales $\mathbb{E}[f(X_{n+1})|\sigma(X_1, \ldots, X_n)]$ et $\mathbb{E}[f(X_{n+1})|\sigma(X_n)]$.

2. Chaîne de Markov inhomogène à valeurs réelles (2). On considère un processus stochastique défini par

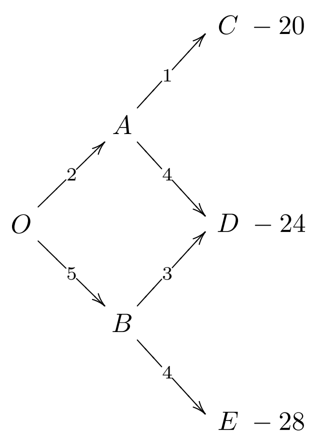
$$X_0 = x_0 \in \mathbb{R}^+, \qquad X_{n+1} = (X_n + \frac{1}{n+1} - v + Y_n)^+,$$

où $v \in \mathbb{R}$ et les Y_n sont des vaiid de loi exponentielle de paramètre 1 (i.e. de densité e^{-t} sur $\mathbb{R}^+$).

a) Déterminer le noyau de cette chaîne de Markov inhomogène.

b) Calculer $\mathbb{E}[X_{n+1}|\sigma(X_n)]$ et $\mathbb{E}[e^{X_{n+1}/2}|\sigma(X_n)]$.

3. Programmation dynamique : course au trésor avec aléa. Un navigateur part du port O, atteint ensuite un des deux ports A, B, puis atteint un des trois ports C, D, E. Il obtient un prix (indiqué en négatif sur la figure). Mettre le cap vers une certaine destination a un coût, indiqué sur la figure. Partant de chacune des trois villes O, A, B, il peut choisir un cap (vers A ou B en partant de O, vers C ou D en partant de A et vers D ou E en partant de B).



a) On suppose le cap choisi toujours atteint. Donner la stratégie optimale.

b) On suppose que choisir un cap lui donne 75% de chances d'arriver à la destination choisie, et 25% de chances d'arriver à l'autre destination atteignable (qui est B s'il est en O et a choisi d'aller vers A, A s'il est en O et a choisi d'aller vers B, D s'il est en A et a chois d'aller vers C, etc...). Déterminer la stratégie optimale.

c) On change le coup du passage $B \to D$, qui coûte maintenant 24. Reprendre les deux premières questions.

4. Programmation dynamique : plus court chemin de A à B, sans aléa. On considère des villes $A, B, \ldots, G$. Certaines sont reliables directement par la route, d'autres non. Les longueurs des trajets directs entre deux villes, quand ils existent, sont

$$\begin{gathered} AB = 15,\ AC = 5,\ AD = 3,\ AG = 14 \\ BE = 5,\ BF = 7,\ BG = 6 \\ CD = 11,\ CE = 3,\ CF = 2 \\ DG = 6,\ DE = 7,\ EG = 7. \end{gathered}$$

Déterminer le plus court chemin de A à B.

5. Un jeu favorable. Soit $0.5 < p < 1$. Un joueur fait N parties (numérotées de 0 à $N-1$) indépendantes où la probabilité de succès est p et la probabilité d'échec est $q = 1-p$. Sa fortune initiale de $x_0 > 0$ Euros. Pour tout $n \in \{0, \ldots, N-1\}$, à l'étape n, il met sur le tapis une fraction U_n de sa fortune (jamais plus que ce qu'il possède) : s'il gagne, il récupère ce qu'il a misé, plus autant d'argent. S'il perd, il perd sa mise. Déterminer la stratégie lui permettant d'optimiser le logarithme de sa fortune finale. Est-ce équivalent au fait d'optimiser sa fortune finale ?

6. Un jeu défavorable. Soit $0.25 \leq p < 0.5$. Un joueur fait N parties (numérotées de 0 à $N-1$) indépendantes où la probabilité de succès est p et la probabilité d'échec est $q = 1-p$. Sa fortune initiale de $x_0 > 0$ Euros. Pour tout $n \in \{0, \ldots, N-1\}$, à l'étape n, il met sur le tapis une fraction U_n de sa fortune (jamais plus que ce qu'il possède) : s'il gagne, il récupère ce qu'il a misé, plus autant d'argent. S'il perd, il perd sa mise. Déterminer la stratégie lui permettant d'optimiser le logarithme de sa fortune finale. Est-ce équivalent au fait d'optimiser sa fortune finale ?

7. Révision d'une machine. Une machine peut se trouver dans 5 états $E = \{0, \ldots, 4\}$. Son évolution spontanée, de jour en jour, est markovienne de matrice de transition

$$P = \begin{pmatrix} p_0 & p_0 & p_0 & p_0 & p_0 \\ 0 & p_1 & p_1 & p_1 & p_1 \\ 0 & 0 & p_2 & p_2 & p_2 \\ 0 & 0 & 0 & p_3 & p_3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & p_4 \end{pmatrix}$$

avec $p_i = \frac{1}{5-i}$ for chaque i. Le coût journalier d'utilisation de la machine est de $\alpha(i)$ si la machine est dans l'état i et la remise à l'état 0, qui peut se faire au début de chaque journée, coûte R.

Poser les équations définissant la stratégie optimale.

8. Horticulture. Un horticulteur cultive des plantes. Le nombre de pieds dont il dispose au début de l'année n est noté X_n. Durant l'année n, chaque pied donne naissance à un autre pied. A la fin de l'été, il choisit d'en garder une proportion $U_n \in [0, 1]$ des pieds nouveaux de l'année et vend les autres pieds nouveaux au prix unitaire de 1 Euro. Parmi les pieds qu'il choisit de garder, seule une proportion aléatoire $Y_n \in [0, 1]$ survit durant l'automne.

Les plantes ayant survécu à l'automne de l'année où elles sont nées ne meurent pas avant l'année N, où il choisit de toutes les vendre au prix unitaire de 1 Euro.

Les plantes ayant survécu à l'automne de l'année où elles sont nées ne meurent pas avant l'année N, où il choit de toutes les vendre au prix unitaire de 1 Euro.

On suppose que $X_0 = x_0 > 0$ et que les Y_n sont des vaiid de loi μ.

a) Exprimer X_{n+1} en fonction des données de l'année n.

b) Définir le modèle markovien contrôlé sous-jacent.

c) Donner la fonction J_N et écrire les équations de programmation dynamique reliant J_n et J_{n+1}.

d) Montrer qu'il existe des réels $\alpha_0, \ldots, \alpha_N$ tels que pour tout n, $J_n(x) = \alpha_n x$. Montrer que pour tout n, $\alpha_n > \alpha_{n+1}$ et $\alpha_n \geq 1 + N - n$. On posera $m = \mathbb{E}[Y_1]$.

e) On suppose $m < 1$. Montrer qu'il existe $K \in \{0, N-1\}$ tel que le contrôle optimal est donné par $u_n = 1$ pour $n < K$ et $u_n = 0$ pour $n \geq K$.

f) Comment interprète-t-on ce résultat ?

9. Arbitrage épargne/consomation. On dispose, au début de l'année n ($n \in \{0, \ldots, N\}$), d'un capital de X_n, dont on choisi de dépenser une proportion $U_n \in [0, 1]$. On épargne le reste $(1 - U_n)X_n$ du capital qui, par le biais d'un rendement aléatoire, se fructifie de façon à devenir $R_n(1 - U_n)X_n$ à la fin de l'année

n, avec $R_n \geq 0$ (mais pas forcément ≥ 1). On suppose les R_n vaiid de loi μ et on note $m = \mathbb{E}[R_1]$. A la N-ème année, on dépense ce qu'il nous reste.

On cherche à optimiser la somme dépensée.

a) Définir le modèle markovien contrôlé sous-jacent.

b) Donner la fonction J_N et écrire les équations de programmation dynamique reliant J_n et J_{n+1}.

c) Selon la valeur de m, calculer $J_{N-1}(x)$, puis J_n pour $n \leq N-1$ et donner la stratégie optimale.

d) Comment interprète-t-on ce résultat ?

10. Contrôle optimal classique. On considère on considère une marche aléatoire réelle (X_n) de valeur initiale $x_0 \in \mathbb{R}$ et de sauts $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots$ de valeur ± 1 avec probabilités $1/2$. On se donne $g > 0$, $N \geq 1$ et on cherche à minimiser, en moyenne, gX_N^2. On a la possibilité de ramener, à chaque étape, la marche au point où l'on veut, avec un contrôle U_n de coût U_n^2.

Autrement dit, on considère le système

$$X_{n+1} = X_n + U_n + \varepsilon_n,$$

avec $X_0 = x_0$, U_n mesurable par rapport à $\sigma(X_0, \ldots, X_n)$ pour tout n, et $(\varepsilon_n)_{n \geq 0}$ vaiid de loi $(\delta_1 + \delta_{-1})/2$ et on cherche à minimiser

$$\mathbb{E}\{\sum_{k=0}^{N-1} U_k^2 + gX_N^2\}.$$

a) Question préliminaire. Soit $a, b \in \mathbb{R}$, avec $a > -1$. Définissons la fonction $f(t) = at^2 + b$. Pour $x \in \mathbb{R}$, montrer que

$$\min_{u \in \mathbb{R}} \{u^2 + \frac{f(x+u+1) + f(x+u-1)}{2}\}$$

est atteint en $u^* = \frac{-ax}{1+a}$ et vaut $a + \frac{ax^2}{1+a} + b$.

b) Définir le modèle markovien contrôlé sous-jacent à notre problème.

c) Donner la fonction J_N et écrire les équations de programmation dynamique reliant J_n et J_{n+1}.

d) Calculer $J_{N-1}(x)$, puis J_n pour $n \leq N-1$ et donner la stratégie optimale.

11. Arbitrage épargne/consommation (2).

On considère donc le modèle markovien contrôlé suivant :

$$X_0 = x_0 > 0, \qquad X_{n+1} = X_n + Y_n X_n (1 - U_n),$$

où $U_n \in [0, 1]$. Les (Y_n) forment une suite de vaiid > 0 d'espérance finie θ. Le processus (X_n) représente l'évolution, au cours du temps, d'une certaine fortune, et $U_n X_n$ représente la somme dépensée à l'instant n.

On cherche à optimiser la somme dépensée : on désire donc maximiser

$$\mathbb{E}(\sum_{k=0}^{N-1} X_n U_n).$$

a) Définir le modèle markovien contrôlé sous-jacent.

b) Donner la fonction J_N et écrire les équations de programmation dynamique reliant J_n et J_{n+1}.

c) Montrer qu'il existe des réels $\rho_N, \ldots, \rho_0$ tels que pour tout $n = N, \ldots, 0$, pour tout $x \geq 0$,

$$J_n(x) = \rho_n x.$$

Donner la relation de récurrence satisfaite par les ρ_n ainsi que les valeurs des contrôles optimaux.

d) Montrer qu'il existe une unique $K \in \{0, \ldots, N\}$ tel que les contrôles optimaux sont donnés par pour tout $n < K$,

$$U_n = 0 \text{ si } n < K \text{ et } U_n = 1 \text{ si } n \geq K.$$

Interpréter.