Université Paris VI
Master 1 : Modèles stochastiques pour la finance

TD 22-23-24 : Processus d'Itô, modèle de Black-Scholes et utilisation de Girsanov

1. Calcul d'espérances. Soit B un mouvement Brownien. On définit les processus $Y_t = \int_0^t e^s dB_s$ et $Z_t = \int_0^t Y_s dB_s$. Après avoir montré que tout est bien défini, calculer $\mathbb{E}(Y_t)$, $\mathbb{E}(Y_t^2)$, $\mathbb{E}(Z_t)$, $\mathbb{E}(Z_t^2)$.

2. Mouvement brownien et martingales.

Montrer, tout d'abord de la façon la plus directe puis en utilisant la formule d'Itô, que les processus suivants sont des $\mathcal{F}$-martingales : a. $(B_t)_{t\geq 0}$; b. $(V_t := B_t^2 - t)_{t\geq 0}$; c. $\left(E_t := e^{\sigma B_t - \frac{\sigma^2 t}{2}}\right)_{t\geq 0}$.

3. Applications directes de la formule d'Itô. Soit B un mouvement Brownien. Montrer que le processus $U_t := 2 + t^2 + \sin(B_t)$ est un processus d'Itô et donner une martingale M telle que $U - M$ est un processus dont les trajectoires sont de classe C^1.

4. Une définition alternative du calcul stochastique à intégrande déterministe. Si $f : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}$ est une fonction en escalier à support compact, de la forme

$$f = \sum_{i=1}^{p} \lambda_i \mathbb{1}_{]t_{i-1},t_i]}$$

où $0 = t_0 < t_1 < \ldots < t_p$, on pose

$$I(f) = \sum_{i=1}^{p} \lambda_i (B_{t_i} - B_{t_{i-1}}).$$

1. Montrer que l'application $f \longmapsto I(f)$ s'étend de manière unique en une application isométrique (donc préservant le produit scalaire) de $\mathbb{L}^2(\mathbb{R}_+, \mathcal{B}(\mathbb{R}_+), dt)$ dans $\mathbb{L}^2(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. On note ce prolongement, pour $f \in \mathbb{L}^2(\mathbb{R}_+, \mathcal{B}(\mathbb{R}_+), dt)$,

$$I(f) = \int_0^\infty f(s) dB_s.$$

2. Montrer que pour tout $f \in \mathbb{L}^2(\mathbb{R}_+, \mathcal{B}(\mathbb{R}_+), dt)$, $\int_0^\infty f(s)dB_s$ appartient à l'adhérence H, pour la norme $\mathbb{L}^2$, de $\mathrm{Vect}(B_t\,;\, t \geq 0)$.

3. Montrer que toute famille d'éléments de H forme un vecteur gaussien.

4. Donner la loi de $\int_0^\infty f(s)dB_s$ pour tout $f \in \mathbb{L}^2(\mathbb{R}_+, \mathcal{B}(\mathbb{R}_+), dt)$.

5. Intégrale stochastique dans le cas particulier où l'intégrande est déterministe, processus d'Ornstein-Uhlenbeck. Soit B un mouvement Brownien.

1. Soit f continue par morceaux sur $\mathbb{R}^+$, non aléatoire. On définit $M_t = \int_0^t f(s)dB_s$.

a) Montrer que M est une martingale et donner son espérance et sa variance.

b) En considérant, pour $\lambda \in \mathbb{R}$, le processus $X_t^\lambda = \exp(i\lambda M_t)$, montrer que M_t est une variable aléatoire gaussienne centrée de variance $\int_0^t f(s)^2 ds$.

2. En déduire que pour tout $n \geq 1$, pour toute famille $f_1, \ldots, f_n$ de fonctions continues par morceaux sur $\mathbb{R}^+$ non aléatoires, pour tout $t \geq 0$, le vecteur $(\int_0^t f_i(s)ds)_{i=1,\ \ldots,n}$ est gaussien centré de covariance

$$\mathbb{E}[\int_0^t f_i(s)ds \times \int_0^t f_j(s)ds] = \int_0^t f_i(s)f_j(s)ds.$$

3. Montrer la formule d'intégration par parties suivante : si $h : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}$ est de classe C^1,

$$\int_0^t h(s)dB_s = h(t)B_t - \int_0^t h'(s)B_s ds.$$

4. Montrer que, pour f continue par morceaux sur $\mathbb{R}^+$ non aléatoire, le processus $(\int_0^t f(s)dB_s)_{t\geq 0}$ est gaussien à accroissements indépendants.

5. Application 1 : montrer que le processus

$$X_t := \int_0^{\sqrt{t}} \sqrt{2s}dB_s$$

est un mouvement Brownien (on commencera par considérer le processus $(Y_t := X_{t^2})$).

6. Application 2 : On définit, pour $t \geq 0$,

$$V_t := e^{-t}B_{\frac{1}{2}} + \int_{\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}+t} e^{-(t-s)}dB_s,$$

appelé *processus d'Ornstein-Uhlenbeck stationnaire*. Montrer que pour tout s, t, $\mathbb{E}[V_sV_t] = \frac{1}{2}\exp(-(t-s))$.

6. Etude d'une martingale. Soit B un mouvement Brownien. On définit, pour $t \in [0, 1[$,

$$M_t = \frac{1}{\sqrt{1-t}} \exp\left(-\frac{B_t^2}{2(1-t)}\right).$$

1. Montrer que M est une martingale.
2. Calculer la limite presque sûre de M_t quand t tend vers 1^-.
3. Calculer $\mathbb{E}[M_t]$.
4. Montrer, par un raisonnement par l'absurde, que $\mathbb{E}[\sup_{0\leq t<1} M_t] = +\infty$.

7. Moments et loi conditionnelle dans le modèle de Black Scholes.

Soit B un Mouvement Brownien Standard. On considère le modèle de Black Scholes : $S_t = x\, e^{\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)t + \sigma B_t}$ où B est un mouvement brownien standard.

a. Calculer $\mathbb{E}[S_t^\alpha]$ pour $\alpha \geq 2$.

b. Calculer la loi de S_t sachant S_r et de S_r sachant S_t pour $0 \leq r < t$.

8. Produit de processus d'Itô. Application aux EDS. 1. Soient Z_t, Y_t deux processus d'Itô par rapport au même mouvement Brownien W

$$Z_t = Z_0 + \int_0^t K_s ds + \int_0^t H_s dW_s, \quad Y_t = Y_0 + \int_0^t L_s ds + \int_0^t G_s dW_s.$$

a. Montrer que $U_t := Z_t + Y_t$ est un processus d'Itô, exprimer U_t^2 en utilisant la formule d'Itô.

b. En déduire que

$$Z_t Y_t = Z_0 Y_0 + \int_0^t Z_s dY_s + \int_0^t Y_s dZ_s + \int_0^t H_s G_s ds,$$

autrement dit,

$$d(Z_t Y_t) = Z_t dY_t + Y_t dZ_t + H_t G_t dt.$$

2. Montrer que $S_t := x_0 \exp((\mu - \sigma^2/2)t + \sigma W_t)$ est une solution issue de x_0 de l'équation (à inconnue le processus (X_t), une telle équation s'appelle une *équation différentielle stochastique*)

$$dX_t = X_t(\mu dt + \sigma dW_t).$$

3. Montrer, en considérant une autre solution (X_t) et en appliquant 1 pour montrer que X_t/S_t est constant, que S_t est la seule solution issue de x_0.

9. EDS vérifiée par le pont Brownien. Soit B un mouvement Brownien. On définit, pour $t \in [0, 1[$,

$$Z_t = (1-t) \int_0^t \frac{dB_s}{1-s}.$$

1. Calculer l'espérance de Z_t et la covariance du processus (i.e. les $\mathrm{Cov}(Z_t, Z_s)$).
2. Montrer que, dans $\mathbb{L}^2$,

$$\lim_{t \to 1} Z_t = 0.$$

3. Montrer, en appliquant la formule d'Itô, que

$$Z_t = B_t - (1-t) \int_0^t \frac{B_s ds}{(1-s)^2}.$$

4. Montrer que Z est satisfait

$$dZ_t = \frac{-Z_t}{1-t} dt + dB_t.$$

10. Une application de la formule de Girsanov : la formule d'Onsager-Machlup. Soit $(B_t)_{t \in [0,1]}$ un mouvement Brownien sur un espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ et h une fonction de classe C^2 sur $[0, 1]$, à valeurs dans $\mathbb{R}$, telle que $h(0) = 0$.

On muni l'espace $C^0([0, 1], \mathbb{R})$ de la norme

$$\|f\|_\infty = \max\{|f(t)| \,;\, t \in [0, 1]\}.$$

1. On définit le processus

$$Z_t = \exp\left(- \int_0^t h'(s) dB_s - \frac{1}{2} \int_0^t (h'(s))^2 ds \right).$$

Pourquoi Z est-il bien défini ? Exprimer Z sous la forme d'un processus d'Itô et donner $\mathbb{E}[Z_1]$.

2. Montrer que la mesure Q de densité Z_1 par rapport à P est une mesure de probabilité. Donner un processus $(W_t)_{t\in[0,1]}$ qui est un mouvement Brownien sous Q.

3. On note $\mathbb{E}_P$ l'espérance sous P et $\mathbb{E}_Q$ l'espérance sous Q. Soit $\varepsilon > 0$. Montrer que

$$P\{\|B-h\|_\infty \leq \varepsilon\} = \mathbb{E}_P[Z_1 \mathbb{1}_{\|B\|_\infty \leq \varepsilon}].$$

4. Montrer que pour tout t,

$$-\int_0^t h'(s)dB_s = -h'(t)B_t + \int_0^t h''(s)B_s ds.$$

5. En déduire (plus difficile) que, lorsque $\varepsilon \to 0$,

$$\frac{P\{\|B-h\|_\infty \leq \varepsilon\}}{P\{\|B\|_\infty \leq \varepsilon\}} \to \exp\left(-\frac{1}{2}\int_0^1 h'(s)^2 ds\right).$$

11. Black et Scholes, application de Itô et Girsanov au pricing (I). On considère le marché financier de taux instantané sans risque $r \geq 0$ et comprenant un actif risqué S défini par

$$S_t = se^{(a-\frac{\sigma^2}{2})t+\sigma W_t}$$

où $s, \sigma > 0$ et W_t est un mouvement Brownien.

I. On considère un portefeuille pour lequel on note ϕ_t la quantité d'actif S détenue en t.

a. Ecrire la dynamique de la richesse Y associée sous la condition d'autofinancement.
b. Ecrire la dynamique de la richesse actualisée $\tilde{Y} = (Y_t e^{-rt})_{t\leq T}$ en fonction de $d\tilde{S}_t$, pour $\tilde{S}_t = S_t e^{-rt}$.
c. Trouver $\mathbb{Q} \sim \mathbb{P}$ tel que le processus des prix actualisés $(\tilde{S}_t)_{t\leq T}$ soit une $\mathbb{Q}$-martingale. Quelles propriétés a alors le processus $\tilde{W}$ défini par

$$\tilde{W}_t = W_t + \frac{a-r}{\sigma}t.$$

d. En déduire qu'il n'y a pas d'arbitrage.
e. Exprimer $\tilde{S}$ en fonction de $\tilde{W}$, et donner la dynamique de $\tilde{S}$ en fonction de $\tilde{W}$.

II. f. On considère un actif payant $G = g(S_T)$ au temps T, avec g fonction continue. On admettra qu'il existe une fonction $f(t,x)$ de classe C^2 sur $[0,T]\times\mathbb{R}$ telle que $f(T,x) = e^{-rT}g(e^{rT}x)$ et qui soit solution de l'EDP

$$\partial_t f + x^2\frac{\sigma^2}{2}\partial_{x,x}f = 0.$$

Montrer qu'il existe une stratégie de couverture pour G et la décrire à partir de f (Black et Scholes).
g. Exprimer, en fonction de g et des variables introduites dans ce problème, le prix, en tout $t \in [0,T]$, de l'option payant G en T.

12. Application de Itô et Girsanov au pricing (II). a. Soient $\gamma, K > 0$ et $\mu \in \mathbb{R}$ et $N \sim \mathcal{N}(0,1)$. Montrer que

$$\mathbb{E}\left[\left[e^{\mu+\gamma N} - K\right]^+\right] \quad = \quad e^{-\frac{\gamma^2}{2}+\mu}\Phi(d) - K\Phi(d-\gamma)$$

où $\Phi(d) = \mathbb{P}[N \leq d]$ et $d = (\gamma^2 + \mu - \ln(K))/\gamma$.
b. Calculer le prix, en 0, de l'option de payoff $G = [S_T - K]^+$ dans le modèle de l'exercice précédent.

13. Application de Itô et Girsanov au pricing (III) : option asiatique. On considère le marché financier sur un espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ de taux instantané sans risque $r \geq 0$ et comprenant un actif risqué S tel que $S_0 > 0$ est déterministe et

$$dS_t = S_t(\mu dt + \sigma dW_t),$$

où W est un mouvement Brownien, $\mu \in \mathbb{R}$ et $\sigma > 0$.

Une option asiatique sur la moyenne géométrique continue est définie par le payoff à la maturité $T > 0$

$$G := (\overline{S}_T - K)^+, \qquad \text{où} \qquad \overline{S}_T = \exp\left(\frac{1}{T}\int_0^T \log(S_t)dt\right).$$

1. Montrer que
$$S_t = S_0 e^{(\mu-\sigma^2/2)t+\sigma W_t}.$$

2. On définit $\tilde{S}_t = e^{-rt}S_t$ et on fixe un horizon $T > 0$. Donner une mesure de probabilité $\mathbb{Q}$ équivalente à $\mathbb{P}$ sous laquelle $(\tilde{S}_t)_{t\in[0,T]}$ est une martingale. Donner un processus W' qui est un mouvement Brownien sous cette nouvelle mesure et exprimer $\tilde{S}$ en fonction de W'.

3. Montrer que $\int_0^T W'_t dt = \int_0^T (T-t)dW'_t$.

4. Exprimer $\tilde{\overline{S}}_T := e^{-rT}\overline{S}_T$ en fonction de $\tilde{S}$.

5. Montrer qu'une limite, pour la norme L^2, de variables aléatoires gaussiennes centrées est gaussienne. En déduire que si $f : [0,T] \to \mathbb{R}$ est continue et non aléatoire, alors $\int_0^T f(t)dW'_t$ est une v.a. gaussienne. Donner son espérance et sa variance.

6. En déduire la loi, sous $\mathbb{Q}$, de $\tilde{\overline{S}}_T$. Remarquons que l'exercice précédent permet alors de calculer $\mathbb{E}[e^{-rT}G]$, i.e. le prix, à l'instant 0, de l'option.