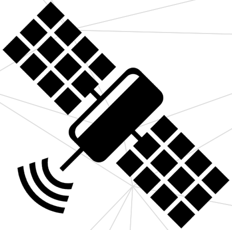


Maxime Chupin

chupin@ceremade.dauphine.fr

CEREMADE, Université Paris-Dauphine, PSL

11 février 2025 — Poitiers

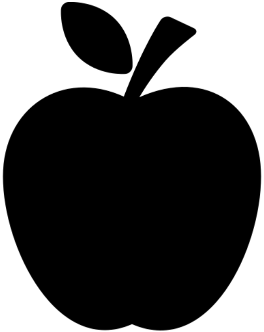
De la pomme de Newton aux courants de gravité

un ticket gratuit vers les étoiles ?

« Interplanetary transfers with low consumption using the properties of the restricted three body problem »

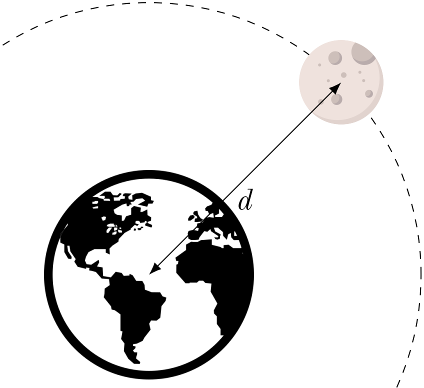
De la pomme à la Lune

La chute… de la pomme



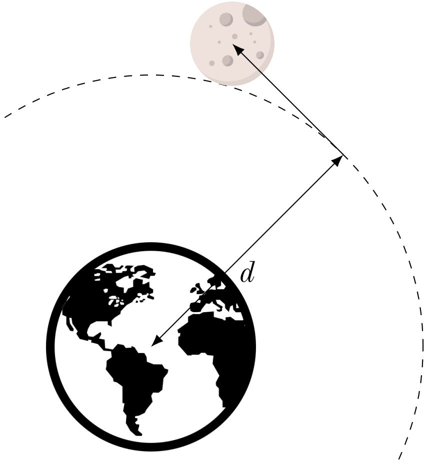
En une seconde, la pomme chute de cinq mètres
(faites l'expérience !)

La chute… de la Lune



- Période de la rotation de la Lune : $T \simeq 27.371$ jours
- Périmètre de la trajectoire : $C \simeq 2\pi \times 384\,000\,\mathrm{km}$
- Vitesse : $V \simeq 1\,\mathrm{km/s}$

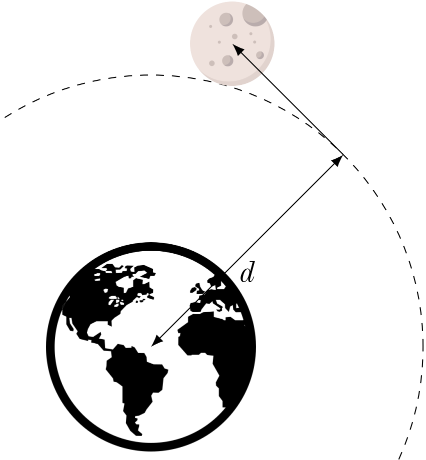
La chute... de la Lune



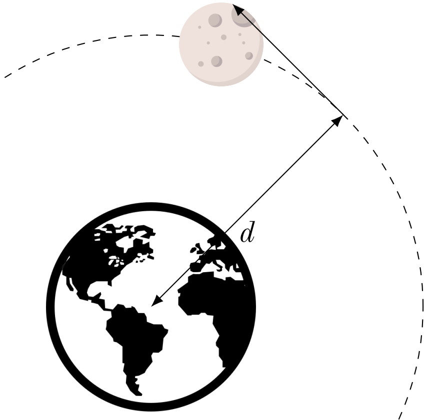
Si la Lune n'était pas attirée par la Terre : trajectoire rectiligne

La chute… de la Lune

En fait elle tombe un peu !

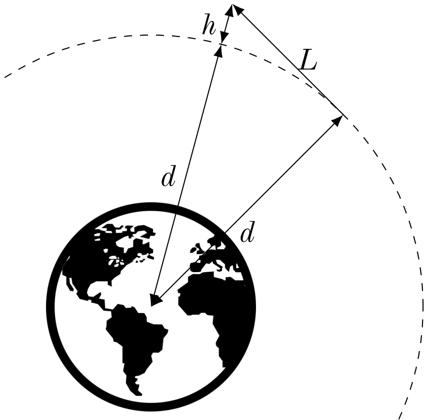


La chute… de la Lune



En fait elle tombe un peu !

La chute… de la Lune



En fait elle tombe un peu !
Théorème de Pythagore

$$d^2 + L^2 = (d+h)^2$$

ce qui *au premier ordre* donne :

$$h \simeq L^2/2d$$

Pour 1 seconde, $L = 1\,\text{km}$, et donc
$h \simeq 1.35\,\text{mm}$

De la pomme à la Lune

- En 1 seconde la pomme tombe de 5 m à 6380 km du centre de la Terre
- En 1 seconde la Lune tombe de 1.35 mm à 380 000 km du centre de la Terre

$$\frac{d_{\text{Lune}}}{d_{\text{Pomme}}} = \frac{380000}{6380} \simeq 60 \qquad \frac{h_{\text{Lune}}}{h_{\text{Pomme}}} = \frac{0.00135}{5} \simeq \frac{1}{60 \times 60}$$

La Lune est 60 fois plus loin que la pomme, et elle est 60×60 fois moins attirée !

La gravitation est inversement proportionnelle au carré de la distance.

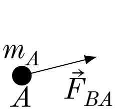
Principe fondamental de la dynamique

> *« Les changements qui arrivent dans le mouvement sont proportionnels à la force motrice ; et se font dans la ligne droite dans laquelle cette force a été imprimée. »*
>
> Isaac Newton

qui se résume en

$$\sum_i \vec{F}_i = m\vec{a}$$

Force gravitationnelle



$$m_A\vec{a}_A = \vec{F}_{BA} = -Gm_Am_B\frac{\overrightarrow{BA}}{\left\|\overrightarrow{BA}\right\|^3}$$

Équation différentielle !

Le problème des N-corps I

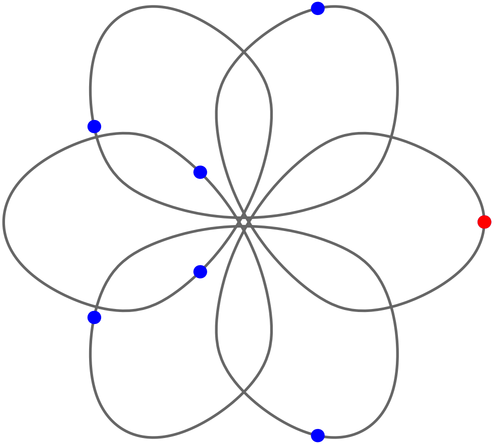
Problème de mécanique céleste : déterminer les trajectoires d'un ensemble de N corps s'attirant mutuellement :

Équation différentielle d'évolution

$$\forall j \in \{1, \dots, N\}, \quad m_j \ddot{q}_j(t) = \sum_{i=1, i\neq j}^{N} m_i m_j \left(\frac{q_j(t) - q_i(t)}{\|q_j(t) - q_i(t)\|^3} \right)$$

Le problème des N-corps II

Cas particulier, N corps de même masse : chorégraphies (images J.-M. Sarlat et C. Simó)



Le problème des N-corps III

Évolution d'un satellite de masse négligeable dans le système solaire sous l'influence de N corps

Équation différentielle d'évolution

$$\ddot{q}(t) = \sum_{i=1}^{N} \mu_i \left(\frac{q(t) - q_i(t)}{\|q(t) - q_i(t)\|^3} \right),$$

- q position du satellite (donc dans $\mathbf{R}^3$)
- q_i est la position du i-ème corps (donc dans $\mathbf{R}^3$)
- $\mu_i = Gm_i$, G est la constante gravitationnelle
- m_i la masse du i-ème corps

Besoin de simplification

- Équations trop compliquées (trouver des trajectoires intéressantes, etc.)
- Besoin de simplification
- Tous les astres n'attirent pas avec la même force le satellite, possibilité de négliger certaines influences

Le modèle des deux corps

Les équations

Modèle :

- satellite de masse négligeable
- influence d'un corps (ex : Terre)
- on connaît toutes les trajectoires libres

$$\ddot{q}(t) = -\mu_0 \frac{q(t)}{\|q(t)\|^3}$$

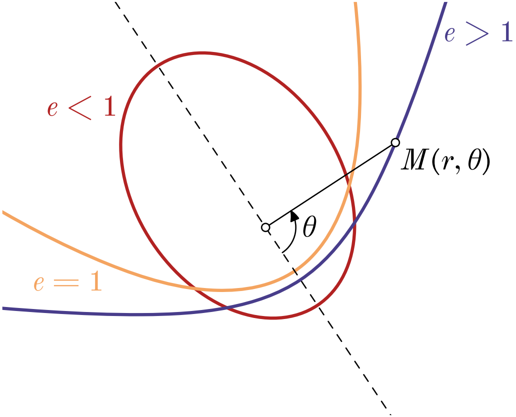
Solutions

En coordonnées polaire (r, θ) :

$$r(\theta) = \frac{p}{1 + e\cos\theta}$$

coniques

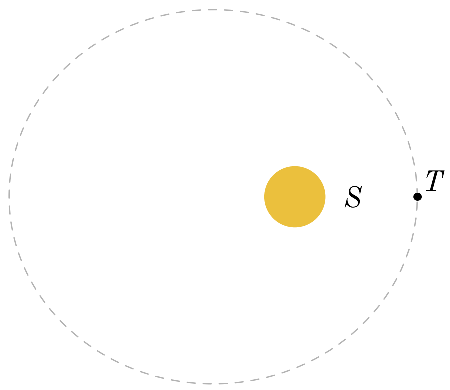
Les différentes solutions



Graphe de

$$\theta \mapsto r(\theta) = \frac{p}{1 + e\cos\theta}$$

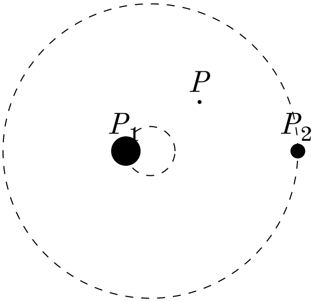
Animation d'une solution



Le modèle des trois corps

Le problème restreint des 3 corps

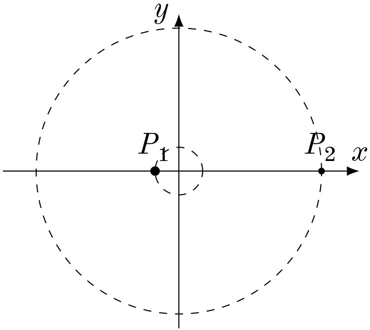
- Un satellite P de masse m négligeable de position q (fonction du temps)
- 2 primaires P_1 et P_2 en rotation circulaire autour de leur centre de masse, de positions respectives q_1 et q_2 (fonctions du temps)
- Leurs masses respectives : M_1 et M_2



$$m\frac{\mathrm{d}^2 q(t)}{\mathrm{d}t^2} = -GM_1 m\frac{q(t)-q_1(t)}{\|q(t)-q_1(t)\|^3} - GM_2 m\frac{q(t)-q_2(t)}{\|q(t)-q_2(t)\|^3}$$

Le problème restreint des 3 corps

- Système de coordonnées tournant dans lequel les deux primaires sont fixes (le long de l'axe (Ox))
- Problème circulaire restreint des trois corps (CR3BP)



Équations du CR3BP

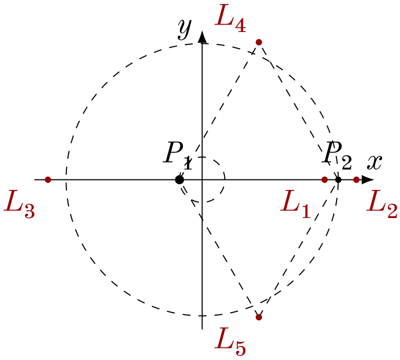
Étude mathématique du problème : normalisation, étude de l'équation différentielle du mouvement, etc.

Dynamique

$$
\begin{cases}
\dot{x}_1 = x_4 \\
\dot{x}_2 = x_5 \\
\dot{x}_3 = x_6 \\
\dot{x}_4 = x_1 + 2x_5 - (1-\mu)\dfrac{x_1+\mu}{r_{13}^3} - \mu\dfrac{x_1 - 1 + \mu}{r_{23}^3} \\
\dot{x}_5 = x_2 - 2x_4 - (1-\mu)\dfrac{x_2}{r_{13}^3} - \mu\dfrac{x_2}{r_{23}^3} \\
\dot{x}_6 = -(1-\mu)\dfrac{x_3}{r_{13}^3} - \mu\dfrac{x_3}{r_{23}^3}
\end{cases}
$$

Points de Lagrange

- Cinq points d'équilibre appelés points de Lagrange
- Points colinéaires : L_1, L_2 et L_3
- Points équilatéraux : L_4 et L_5



Stabilité des équilibres

Questions ?

- Est-ce que ces points peuvent être utiles ?
- Est-ce que ce points attirent les objets ?
- Est-ce que ces points repoussent les objets ?

On montre que :

- L_1, L_2 et L_3 sont instables
- La stabilité de L_4 et L_5 dépend du système

Stabilité des équilibres

Questions ?

- Est-ce que ces points peuvent être utiles ?
- Est-ce que ce points attirent les objets ?
- Est-ce que ces points repoussent les objets ?

On montre que :

- L_1, L_2 et L_3 sont instables
- La stabilité de L_4 et L_5 dépend du système

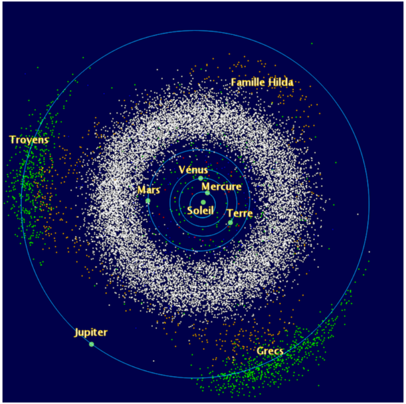
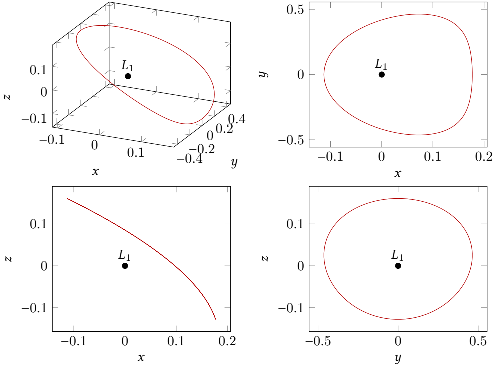


Image WikiPédia

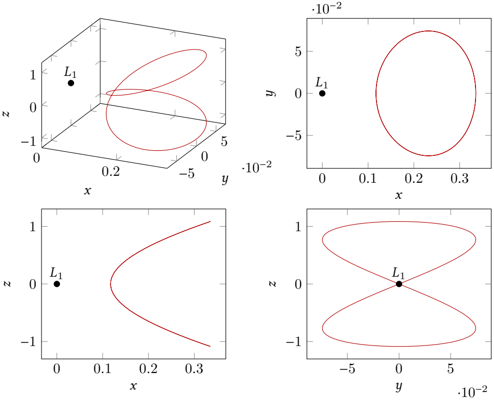
Orbites périodiques

On démontre l'existence d'orbites périodiques autour des points d'équilibre de Lagrange

orbite de Halo (Soleil-Terre)

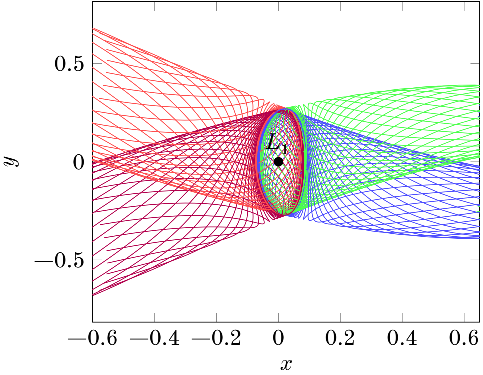


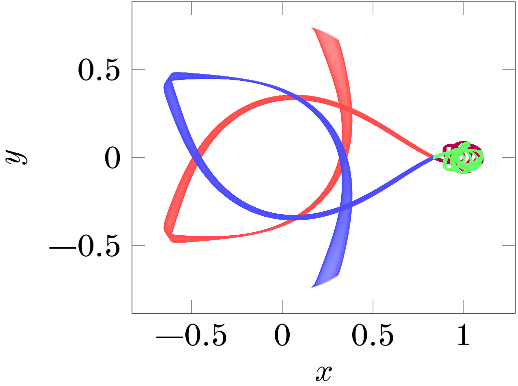
orbite en huit (Terre-Lune)



Variétés invariantes

On démontre l'existence de courants gravitationnels issus de ces orbites périodiques autour des points d'équilibre de Lagrange





Exemples de courants gravitationnels dans le système Terre-Lune

Est-ce utile ?

- Comment calculer pratiquement les orbites périodiques et les courants gravitationnels ?

Est-ce utile ?

- Comment calculer pratiquement les orbites périodiques et les courants gravitationnels ?

→ Méthodes numériques : besoin de mathématiques

Est-ce utile ?

- Comment calculer pratiquement les orbites périodiques et les courants gravitationnels ?

$\longrightarrow$ Méthodes numériques : besoin de mathématiques

- Est-ce qu'on peut les utiliser dans « la vie réelle » ?

Est-ce utile ?

- Comment calculer pratiquement les orbites périodiques et les courants gravitationnels ?

→ Méthodes numériques : besoin de mathématiques

- Est-ce qu'on peut les utiliser dans « la vie réelle » ?

→ Les mathématiques ont permis de trouver dans la vie réelle ces courants gravitationnels, missions ISEE-3, Hiten, Genesis, etc.

Est-ce utile ?

- Comment calculer pratiquement les orbites périodiques et les courants gravitationnels ?

→ Méthodes numériques : besoin de mathématiques

- Est-ce qu'on peut les utiliser dans « la vie réelle » ?

→ Les mathématiques ont permis de trouver dans la vie réelle ces courants gravitationnels, missions ISEE-3, Hiten, Genesis, etc.

- Et pour les mathématiques ?

Est-ce utile ?

- Comment calculer pratiquement les orbites périodiques et les courants gravitationnels ?

→ Méthodes numériques : besoin de mathématiques

- Est-ce qu'on peut les utiliser dans « la vie réelle » ?

→ Les mathématiques ont permis de trouver dans la vie réelle ces courants gravitationnels, missions ISEE-3, Hiten, Genesis, etc.

- Et pour les mathématiques ?

→ Sujet de recherche actuel !

Récapitulatif

Dynamique du problème des N-corps

$$\ddot{q}(t) = \sum_{i=1}^{N} \mu_i \left(\frac{q(t) - q_i(t)}{\|q(t) - q_i(t)\|^3} \right),$$

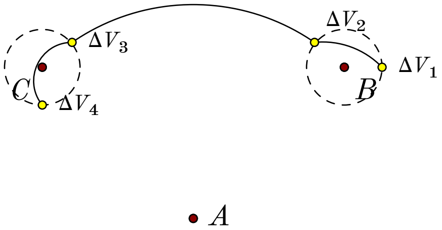
Simplifications

- Seulement garder les influences principales (un ou deux astres)
- Propriétés intéressantes et exploitables pour la conception de missions spatiales

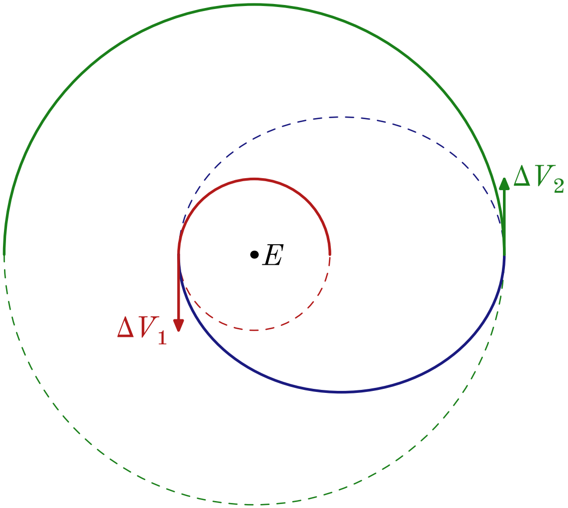
Concevoir des missions spatiales

Patch Conic Method

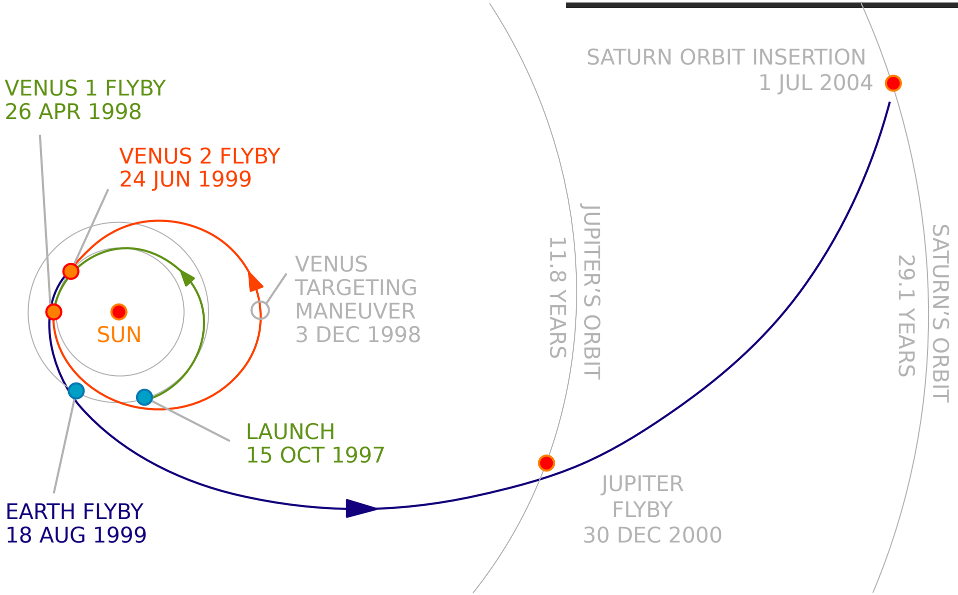
- Transferts autour d'un seul astre (problème des 2 corps) par ΔV
- Trajectoire *interplanétaire* par *recollement* de trajectoires képlériennes (*patch conic method*), phénomène du *swing-by*



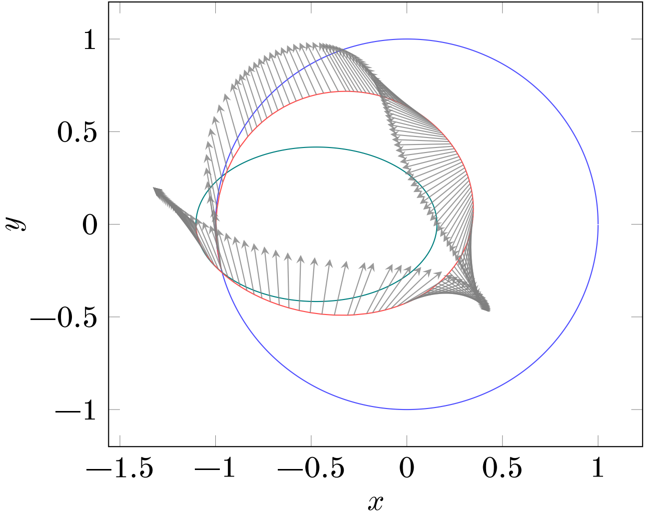
Transfert de Hohmann



Mission Cassini



Poussée faible, 2 corps

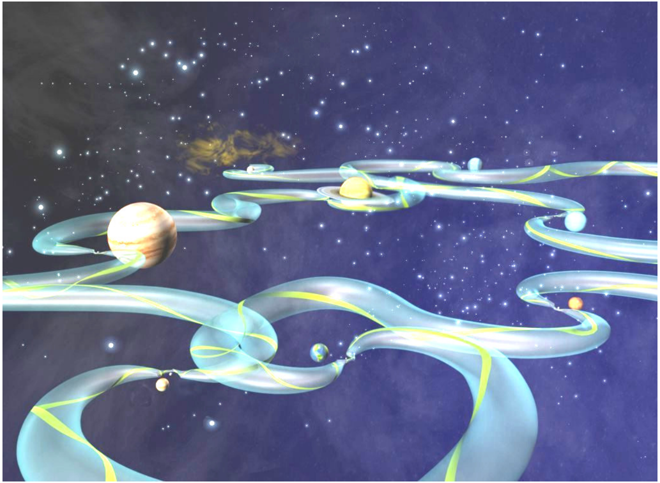


Avec le problème des trois corps

Les variétés invariantes comme réseau de courants

Interplanetary Transport Network

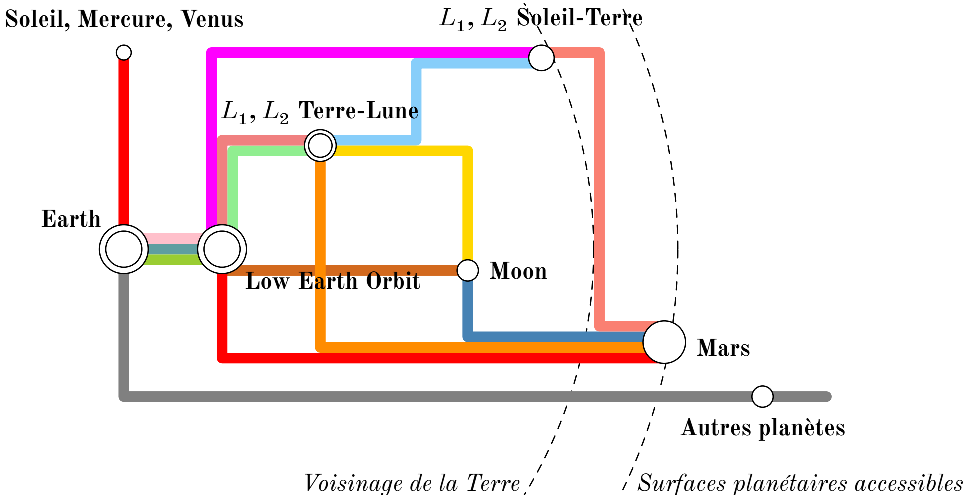
NASA/Caltech



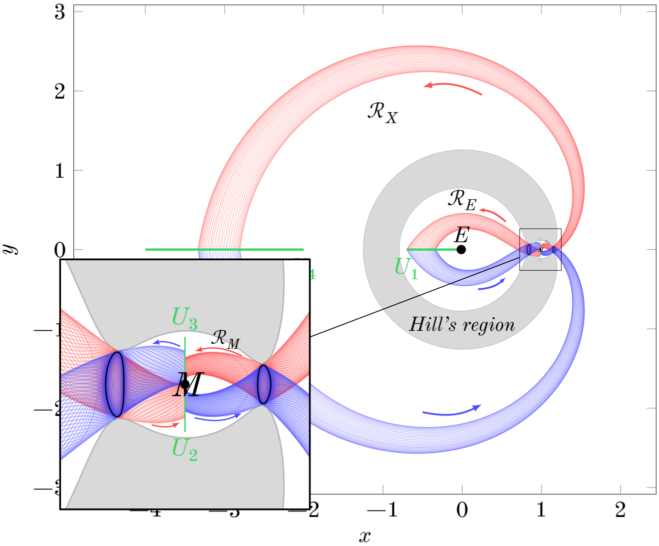
Avec le problème des trois corps

Les variétés invariantes comme réseau de courants

Interplanetary Transport Network

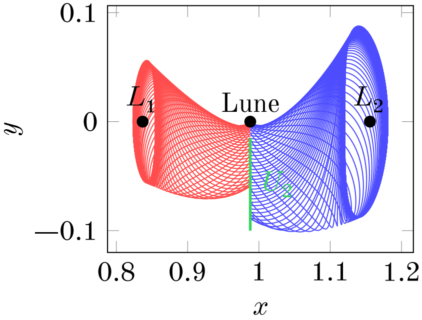


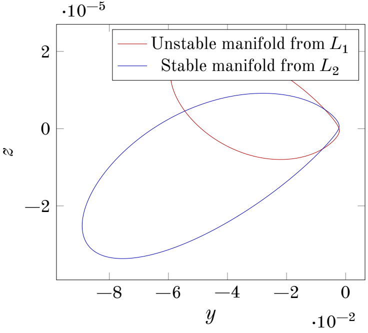
Système Terre-Lune



Transfert d'une variété à une autre

- Calcul d'intersection en espace entre deux variétés
- Passage de l'une à l'autre par une impulsion ΔV





Le contrôle optimal

Des théories mathématiques

La théorie du contrôle a comme objet d'étude le comportement de systèmes dynamiques paramétrés, c'est-à-dire l'étude d'équations différentielles de la forme :

$$x'(t) = f(x, u)$$

où u est le contrôle (fonction).

Des questions qu'on se pose

- Ces équations ont-elles des solutions ?
- S'il existe une solution, est-elle unique ?
- Comment les solutions dépendent des conditions initiales ?
- Et bien d'autres encore...

Cadre dans lequel rentre la conception de mission spatiale où le contrôle est la poussée des moteurs du satellite !

Le contrôle optimal

- Dans le cadre des missions spatiales : contrôle du satellite
- On cherche donc à amener le satellite d'un point A à un point B
- Le fuel « coûte » cher : on veut minimiser la consommation, par exemple :

$$\min \sum_i \Delta V_i$$

- Comme on a vu, on peut aussi avoir une poussée « continue », dans ces cas là, on cherche à minimiser :

$$C(u) = \int_0^{t_f} \|u(t)\| \, \mathrm{d}t$$

Contrôle optimal : formulation

- La fonctionnelle de coût sur le contrôle u :

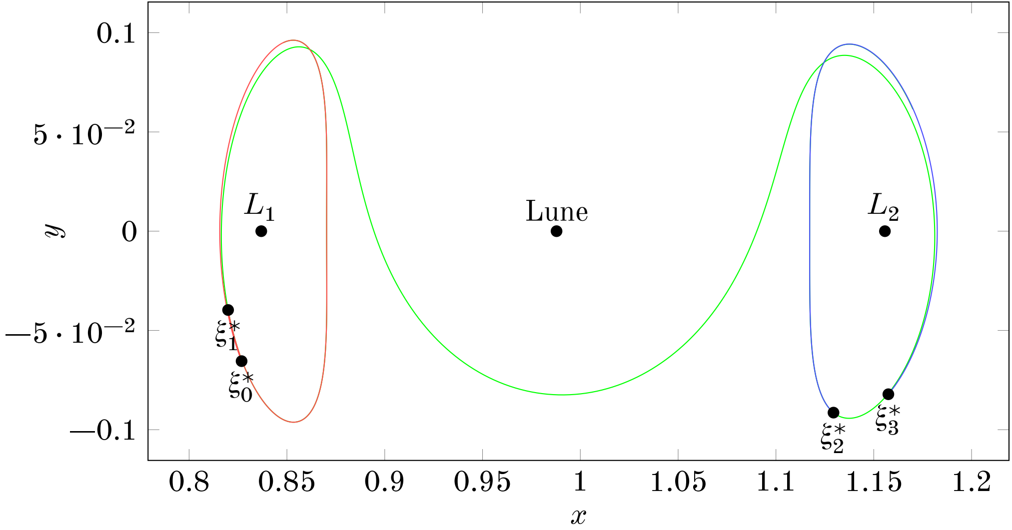
$$\text{Minimiser } C_{x_0,t_f}(u) = \int_0^{t_f} f^0(t, x(t), u(t))\,\mathrm{d}t$$

- Départ $x(0) \in M_0$ et arrivée $x(t_f) \in M_1$,
- Le problème

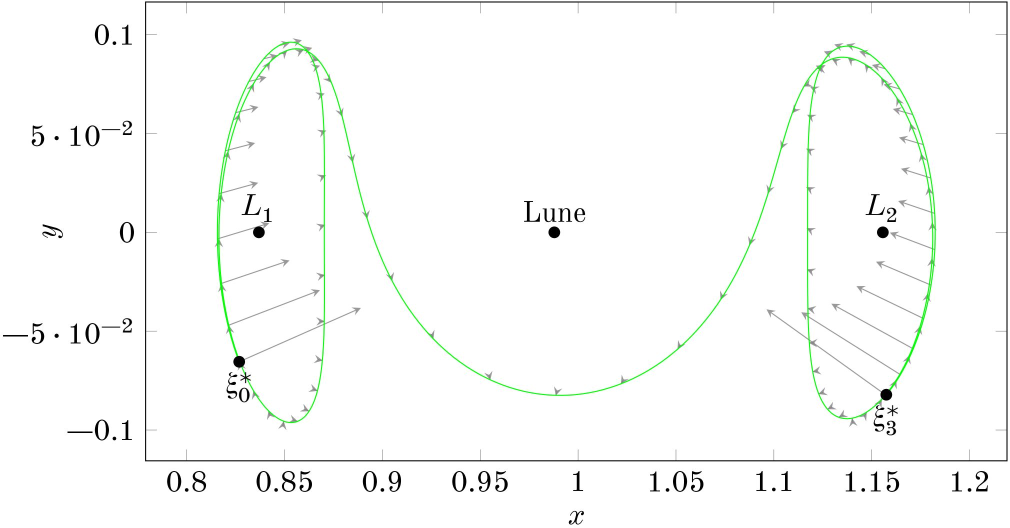
$$(\mathcal{P})\begin{cases} \text{Minimiser } C_{x_0,t_f}(u) = \displaystyle\int_0^{t_f} f^0(t, x(t), u(t))\,\mathrm{d}t, \\ \dot{x}(t) = f(t, x(t), u(t)), \\ u \in \mathcal{U}_{x_0,t_f,\Omega} \\ x(0) \in M_0, \quad x(t_f) \in M_1. \end{cases}$$

- Cadre très général du contrôle optimal

Exemple de transfert optimal

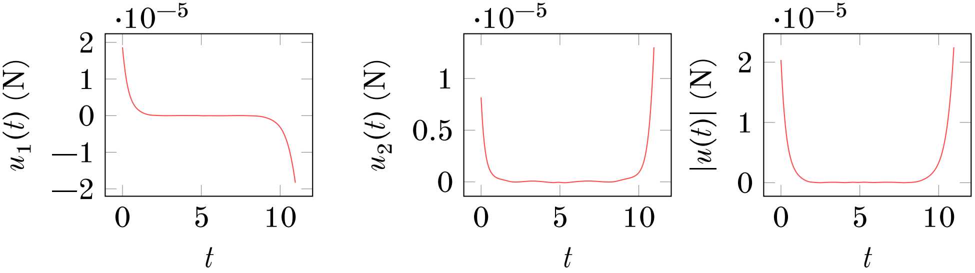


Exemple de transfert optimal

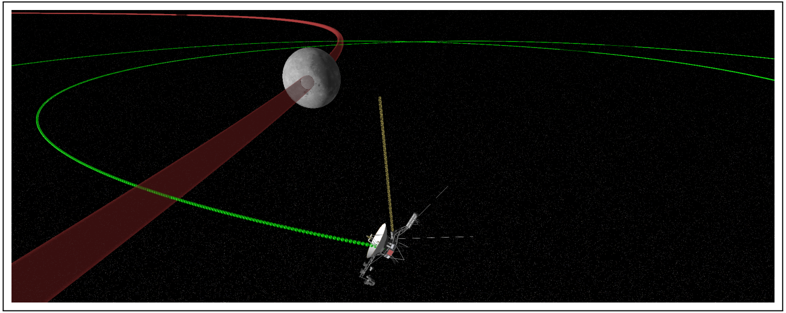


Contrôle associé

Effet turnpike



Vidéo



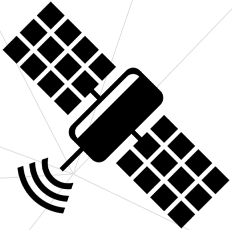
Les théories du contrôle

Domaines d'application bien plus vastes que les satellites

- Les robots, les voitures automatiques, etc.
- Les recherches sur le corps humain (fonctionnement de l'œil, déplacement dans une pièce, etc.)
- La biologie, la médecine (traitement médical optimal, etc.)
- et bien d'autres...

Références

- Site web du Professeur Jérôme Pérez http://perso.ensta-paristech.fr/~perez/
- Site web du Professeur Emmanuel Trélat https://www.ljll.math.upmc.fr/~trelat/
  - Article sur le site Images des maths http://images.math.cnrs.fr/Theorie-du-controle-points-de
  - Conférence « Tout est sous contrôle » https://www.youtube.com/watch?v=ET7f8SpOkVQ
- Introduction de ma thèse : https://www.ceremade.dauphine.fr/~chupin/



Merci de votre attention!