Maxime Chupin et Guillaume Legendre

CEREMADE — Université Paris-Dauphine

18 février 2025

π et son calcul numérique

Stage pour élèves de 2nd

C’est quoi une méthode numérique ?

C'est quoi une méthode numérique ? (I)

- Moyen de résoudre un problème mathématique avec un calculateur (ordinateur)

0011010110011001101011001

1001101011001100110011010

1100110011010110110011

C'est quoi une méthode numérique ? (I)

- Moyen de résoudre un problème mathématique avec un calculateur (ordinateur)
- Opérations arithmétiques simples de manière répétitive : algorithme

001101011001101011001

100110101100110011010

110011001101010110011

C’est quoi une méthode numérique ? (I)

- Moyen de résoudre un problème mathématique avec un calculateur (ordinateur)
- Opérations arithmétiques simples de manière répétitive : algorithme
- En mathématiques, on est souvent confronté à l’infini : par exemple, il y a une infinité d’entiers

0011010110011001101011001

1001101011001100110011010

1100110011010110110011

C’est quoi une méthode numérique ? (I)

- Moyen de résoudre un problème mathématique avec un calculateur (ordinateur)
- Opérations arithmétiques simples de manière répétitive : algorithme
- En mathématiques, on est souvent confronté à l’infini : par exemple, il y a une infinité d’entiers
- Certaines méthodes ont besoin d’un nombre infini d’opérations pour fournir le résultat

C'est quoi une méthode numérique ? (I)

- Moyen de résoudre un problème mathématique avec un calculateur (ordinateur)
- Opérations arithmétiques simples de manière répétitive : algorithme
- En mathématiques, on est souvent confronté à l'infini : par exemple, il y a une infinité d'entiers
- Certaines méthodes ont besoin d'un nombre infini d'opérations pour fournir le résultat
- Un calculateur ne peut faire qu'un nombre fini d'opérations : la méthode fournit une approximation de la solution

C'est quoi une méthode numérique ? (II)

Quelques aspects du calcul numérique

1. Comment calculer avec l'ordinateur ?
   → algorithmes, programmation (scratch, python), machine (cluster), etc.

C'est quoi une méthode numérique ? (II)

Quelques aspects du calcul numérique

1. Comment calculer avec l'ordinateur ?
   → algorithmes, programmation (scratch, python), machine (cluster), etc.
2. Est-ce qu'on calcule vraiment ce qu'on souhaite calculer ?
   → existence, unicité, convergence, etc.

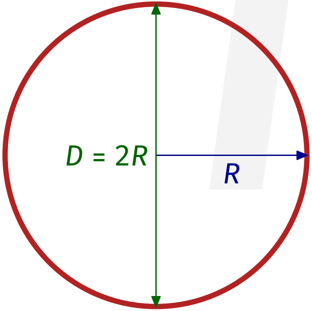
C’est quoi π ?

C’est quoi π ? (I)

- Constante mathématique donnée par le quotient entre le périmètre d’un cercle et son diamètre

C'est quoi π ? (I)

- Constante mathématique donnée par le quotient entre le périmètre d'un cercle et son diamètre
- Sert aussi à calculer son aire (πR^2)



C’est quoi π ? (II)

- Utilisé depuis des milliers d’années pour des applications pratiques

C'est quoi π ? (II)

- Utilisé depuis des milliers d'années pour des applications pratiques
- Intervient dans de nombreuses formules en mathématiques et en physique, par exemple :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \cdots = \frac{\pi^2}{6}$$

C'est quoi π ? (II)

- Utilisé depuis des milliers d'années pour des applications pratiques
- Intervient dans de nombreuses formules en mathématiques et en physique, par exemple :
$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \cdots = \frac{\pi^2}{6}$$
- Nombre irrationnel, c'est-à-dire qu'il ne peut s'exprimer comme le quotient de deux nombres entiers, par exemple $\frac{22}{7}$ (qui est une approximation de π)

C'est quoi π ? (II)

- Utilisé depuis des milliers d'années pour des applications pratiques
- Intervient dans de nombreuses formules en mathématiques et en physique, par exemple :
$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \cdots = \frac{\pi^2}{6}$$
- Nombre irrationnel, c'est-à-dire qu'il ne peut s'exprimer comme le quotient de deux nombres entiers, par exemple $\frac{22}{7}$ (qui est une approximation de π)
- Sa représentation sous la forme d'un nombre à virgule possède une infinité de chiffres

C'est quoi π ? (II)

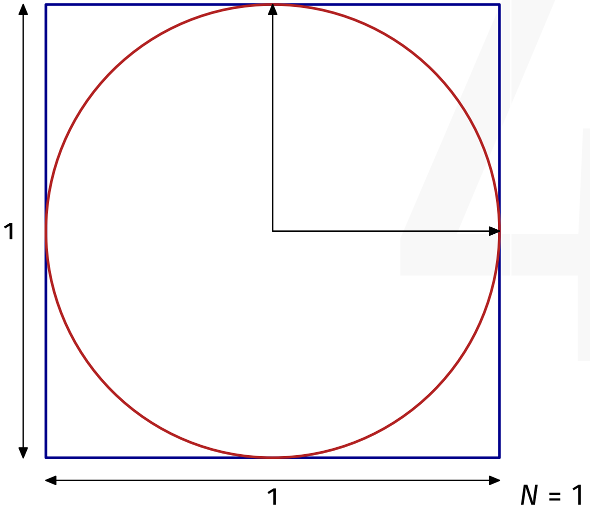
- Utilisé depuis des milliers d'années pour des applications pratiques
- Intervient dans de nombreuses formules en mathématiques et en physique, par exemple :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \cdots = \frac{\pi^2}{6}$$

- Nombre irrationnel, c'est-à-dire qu'il ne peut s'exprimer comme le quotient de deux nombres entiers, par exemple $\frac{22}{7}$ (qui est une approximation de π)
- Sa représentation sous la forme d'un nombre à virgule possède une infinité de chiffres
- Nombreuses manières de calculer π avec une précision arbitraire, une des plus anciennes remontant à 250 avant J.-C.

π vaut-il 4 ?

π vaut-il 4 ?



Polygones d'Archimède

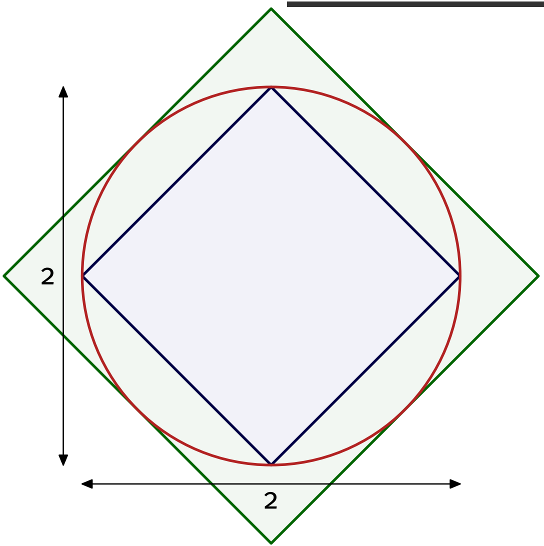
Polygones d'Archimède (I)

- En inscrivant le cercle dans un carré, la précédente méthode nous informe que $\pi < 4$

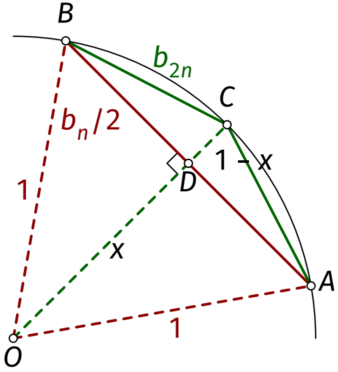
Polygones d'Archimède (I)

- En inscrivant le cercle dans un carré, la précédente méthode nous informe que $\pi < 4$
- Archimède a eu l'idée d'approcher le cercle par des polygones réguliers, respectivement *inscrits* et *circonscrits*

Polygones d'Archimède (II)

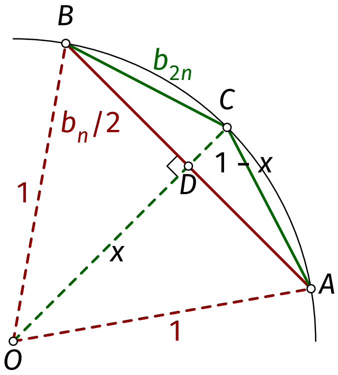


Polygones d'Archimède (III) : exercice



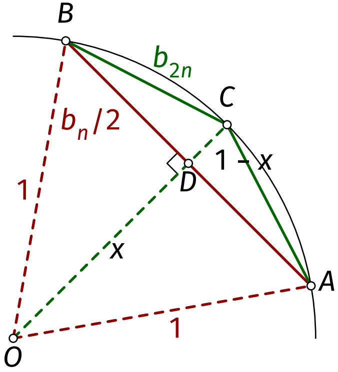
- Passage d'un polygone à n côtés à un polygone à $2n$ côtés

Polygones d'Archimède (III) : exercice



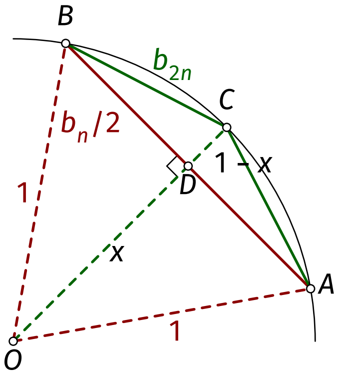
- Passage d'un polygone à n côtés à un polygone à $2n$ côtés
- $p_n = n \times b_n$ et $p_{2n} = 2n \times b_{2n}$

Polygones d'Archimède (III) : exercice



- Passage d'un polygone à n côtés à un polygone à $2n$ côtés
- $p_n = n \times b_n$ et $p_{2n} = 2n \times b_{2n}$
- Pythagore : $x^2 + \frac{b_n^2}{4} = 1^2$

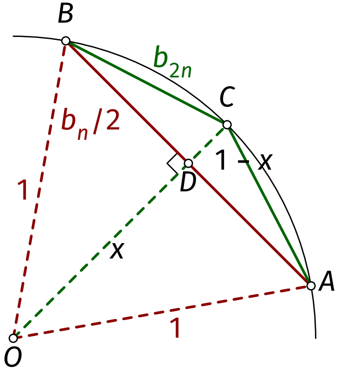
Polygones d'Archimède (III) : exercice



- Passage d'un polygone à n côtés à un polygone à $2n$ côtés
- $p_n = n \times b_n$ et $p_{2n} = 2n \times b_{2n}$
- Pythagore : $x^2 + \frac{b_n^2}{4} = 1^2$

- $x = \sqrt{1 - \frac{b_n^2}{4}}$

Polygones d'Archimède (III) : exercice

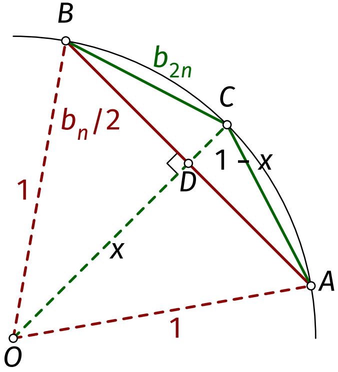


- Passage d'un polygone à n côtés à un polygone à $2n$ côtés
- $p_n = n \times b_n$ et $p_{2n} = 2n \times b_{2n}$
- Pythagore : $x^2 + \frac{b_n^2}{4} = 1^2$

- $x = \sqrt{1 - \frac{b_n^2}{4}}$
- Pythagore :

$$(1-x)^2 + \frac{b_n^2}{4} = b_{2n}^2$$

Polygones d'Archimède (III) : exercice



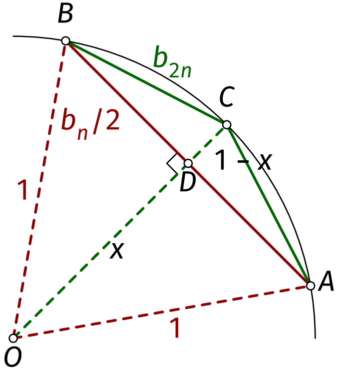
- Passage d'un polygone à n côtés à un polygone à $2n$ côtés
- $p_n = n \times b_n$ et $p_{2n} = 2n \times b_{2n}$
- Pythagore : $x^2 + \frac{b_n^2}{4} = 1^2$

- $x = \sqrt{1 - \frac{b_n^2}{4}}$
- Pythagore :

$$(1-x)^2 + \frac{b_n^2}{4} = b_{2n}^2$$

$$1 - 2\sqrt{1 - \frac{b_n^2}{4}} + 1 - \frac{b_n^2}{4} + \frac{b_n^2}{4} = b_{2n}^2$$

Polygones d'Archimède (III) : exercice



- Passage d'un polygone à n côtés à un polygone à $2n$ côtés
- $p_n = n \times b_n$ et $p_{2n} = 2n \times b_{2n}$
- Pythagore : $x^2 + \frac{b_n^2}{4} = 1^2$
- $x = \sqrt{1 - \frac{b_n^2}{4}}$
- Pythagore :

$$(1-x)^2 + \frac{b_n^2}{4} = b_{2n}^2$$

$$1 - 2\sqrt{1 - \frac{b_n^2}{4}} + 1 - \frac{b_n^2}{4} + \frac{b_n^2}{4} = b_{2n}^2$$

$$b_{2n} = \sqrt{2 - \sqrt{4 - b_n^2}}$$

Polygones d'Archimède (IV)

In [1]:

```python
import math
# initialisation
b = math.sqrt(2)
nb_cote = 4
for i in range(1,6):
    b=math.sqrt(2-math.sqrt(4-b**2))
    nb_cote=2*nb_cote
print("Le périmètre calculé pour",nb_cote, "côtés est",nb_cote*b)
print("Une approximation de Pi est alors",nb_cote*b/2)
```

Out [1]:

```
Le périmètre calculé pour 128 côtés est 6.282554501865514
Une approximation de Pi est alors 3.141277250932757
```

Polygones d'Archimède (V)

- Formules permettant de calculer les périmètres de polygones inscrits et circonscrits au cercle itérativement en doublant chaque fois le nombre de côtés :

$$P_{2n} = \frac{2p_n P_n}{p_n + P_n} \text{ et } p_{2n} = \sqrt{p_n P_{2n}}$$

Il obtint l'encadrement :

$$3 + \frac{10}{71} < \pi < 3 + \frac{1}{7},$$

en allant jusqu'à 96 côtés.

Polygones d'Archimède (V)

- Formules permettant de calculer les périmètres de polygones inscrits et circonscrits au cercle itérativement en doublant chaque fois le nombre de côtés :

$$P_{2n} = \frac{2p_nP_n}{p_n + P_n} \text{ et } p_{2n} = \sqrt{p_nP_{2n}}$$

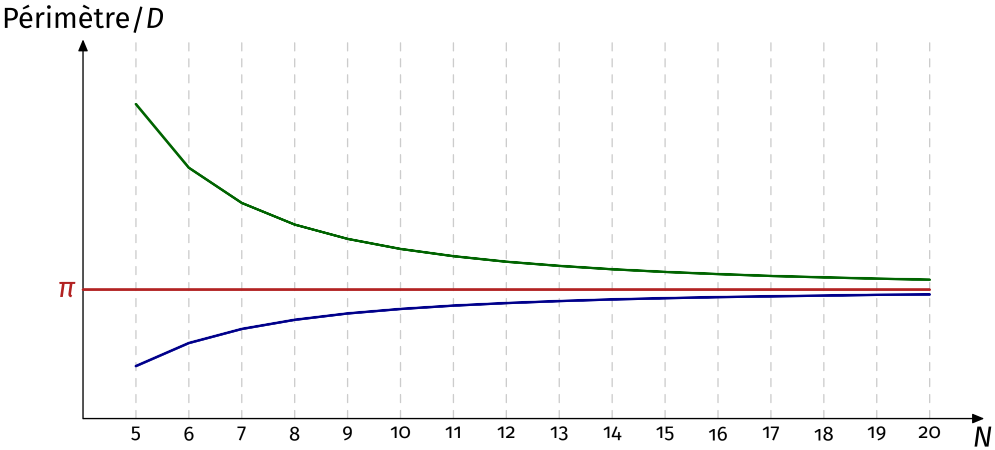
  Il obtint l'encadrement :

$$3 + \frac{10}{71} < \pi < 3 + \frac{1}{7},$$

  en allant jusqu'à 96 côtés.

- Vers 1610, Ludolph van Ceulen parvint à calculer les 35 premières décimales de π par cette méthode, en considérant des polygones ayant des centaines de milliards de côtés

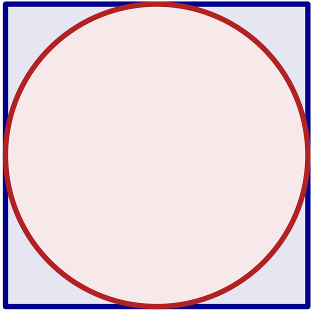
Polygones d'Archimède (VI)



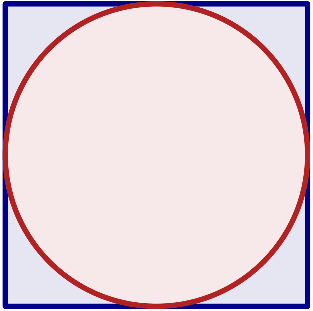
- Encadrements toujours plus précis de la valeur de π en augmentant progressivement le nombre de côtés des polygones

Un peu de hasard

Un cercle dans un carré



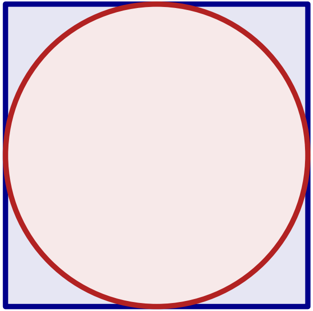
Un cercle dans un carré



- Des probabilités : on jette des cailloux, sans viser, dans le carré

Un peu de hasard...

Un cercle dans un carré



- Des probabilités : on jette des cailloux, sans viser, dans le carré
- On compte alors ceux qui sont dans le cercle (et on multiplie par 4...)

Du code

In [2]:

```python
import numpy as np
N = 200
pi = 0
dedans = 0
tirage = 0
for i in range(N):
    x = np.random.uniform(-1,1)
    y = np.random.uniform(-1,1)
    if x**2+y**2<1:
        dedans += 1
    tirage += 1
    pi = 4*dedans/tirage
print("L'approximation de Pi calculée est",pi)
```

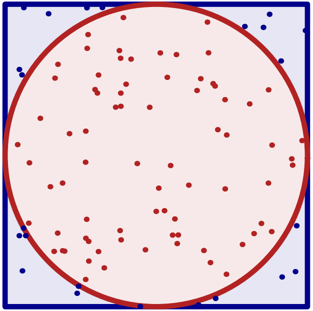
Out [2]:

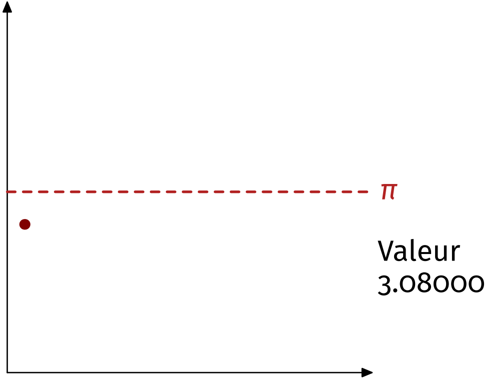
```
L'approximation de Pi calculée est 3.2
```

Évolution du résultat en fonction du nombre de tirages

$N = 100$

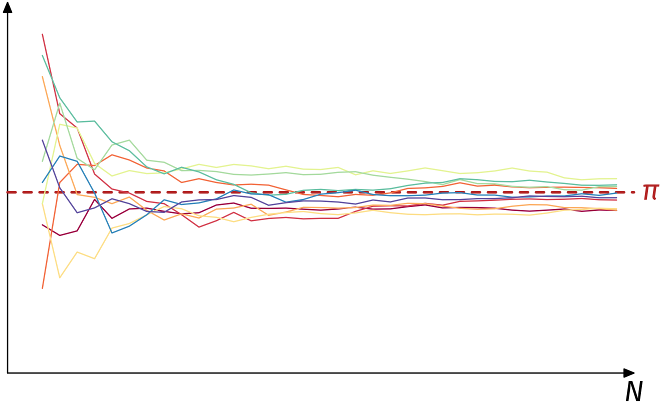
$$4 \times \frac{77}{100} = 3.08000$$



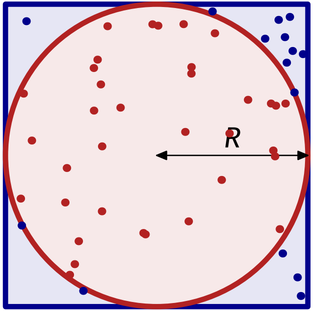


De nombreuses expériences

- On réalise la même expérience plusieurs fois



Un théorème



Quand N devient très grand (*loi des grands nombres*) :

$$\text{Probabilité d'être dans le cercle} = \frac{\text{Aire cercle}}{\text{Aire carré}} = \frac{\pi R^2}{(2R)^2} = \frac{\pi}{4}$$

Pour aller plus loin

Pour aller plus loin (I)

- Pour la plupart des applications courantes, on a besoin d'une précision de seulement quelques décimales ($3,14159265358979$ suffit en général largement)

Pour aller plus loin (I)

- Pour la plupart des applications courantes, on a besoin d'une précision de seulement quelques décimales ($3,14159265358979$ suffit en général largement)
- Le calcul de π est en revanche utilisé pour tester de nouveaux super-ordinateurs et régulièrement battre des records !

Pour aller plus loin (II)

D'autres algorithmes

- Pour calculer un grand nombre de décimales, on peut utiliser une série numérique, c'est-à-dire qu'on écrit le nombre π comme une somme infinie, en se servant du développement d'une fonction bien choisie.
  Par exemple, la série de Madhava–Gregory–Leibniz (vers 1400, 1671 et 1673) s'écrit
  $$\pi = 4\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} = 4\left(1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \dots\right).$$
  Sa convergence est extrêmement lente (il faut sommer cinq milliards de termes pour obtenir les dix premières décimales).

Pour aller plus loin (II)

D'autres algorithmes

- Pour calculer un grand nombre de décimales, on peut utiliser une série numérique, c'est-à-dire qu'on écrit le nombre π comme une somme infinie, en se servant du développement d'une fonction bien choisie.
  Par exemple, la série de Madhava–Gregory–Leibniz (vers 1400, 1671 et 1673) s'écrit
  $$\pi = 4\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} = 4\left(1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \dots\right).$$
  Sa convergence est extrêmement lente (il faut sommer cinq milliards de termes pour obtenir les dix premières décimales).
- Une méthode voisine et préférable est donnée par la formule de Machin (1706)
  $$\pi = 16\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1}\left(\frac{1}{5}\right)^{2n+1} - 4\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1}\left(\frac{1}{239}\right)^{2n+1}.$$

D'autres algorithmes

- Méthode très rapide :
  Brent–Salamin (1976)

$$a_0 = 1,\ b_0 = \frac{1}{\sqrt{2}},\ p_0 = 1,\ t_0 = \frac{1}{4}.$$

Répéter, pour tout entier naturel n,

$$a_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2},\ b_{n+1} = \sqrt{a_n b_n},$$

$$p_{n+1} = 2p_n,\ t_{n+1} = t_n - p_n(a_{n+1} - a_n)^2.$$

Pour aller plus loin (III)

- Méthode très rapide : Brent–Salamin (1976)

$$a_0 = 1,\ b_0 = \frac{1}{\sqrt{2}},\ p_0 = 1,\ t_0 = \frac{1}{4}.$$

Répéter, pour tout entier naturel n,

$$a_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2},\ b_{n+1} = \sqrt{a_n b_n},$$

$$p_{n+1} = 2p_n,\ t_{n+1} = t_n - p_n(a_{n+1} - a_n)^2.$$

- Approximation donnée par :

$$\pi_{n+1} = \frac{(a_{n+1} + b_{n+1})^2}{4t_{n+1}} < \pi.$$

D'autres algorithmes

- Méthode très rapide : Brent–Salamin (1976)

$$a_0 = 1,\ b_0 = \frac{1}{\sqrt{2}},\ p_0 = 1,\ t_0 = \frac{1}{4}.$$

Répéter, pour tout entier naturel n,

$$a_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2},\ b_{n+1} = \sqrt{a_n b_n},$$

$$p_{n+1} = 2p_n,\ t_{n+1} = t_n - p_n(a_{n+1} - a_n)^2.$$

- Approximation donnée par :

$$\pi_{n+1} = \frac{(a_{n+1} + b_{n+1})^2}{4t_{n+1}} < \pi.$$

- Premières valeurs :

3, 140
3, 14159264
3.14159265358979323827
3.14159265358979323846264338327950288419711

Le nombre de décimales exactes *double* à chaque itération, mais l'exécution de cette méthode demande beaucoup de mémoire.

Pour aller plus loin (IV)

D'autres algorithmes

- Tous les records récents utilisent la formule des frères Chudnovsky (1988) pour l'inverse de π :

$$\frac{1}{\pi} = 12 \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n (6n)!(545140134n + 13591409)}{(3n)!(n!)^3 (640320)^{3n+3/2}}$$

et une technique d'optimisation appelée scindage binaire, qui la rend peu coûteuse.

D'autres algorithmes

- Tous les records récents utilisent la formule des frères Chudnovsky (1988) pour l'inverse de π :

$$\frac{1}{\pi} = 12 \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n (6n)! (545140134n + 13591409)}{(3n)!(n!)^3 (640320)^{3n+3/2}}$$

  et une technique d'optimisation appelée scindage binaire, qui la rend peu coûteuse.
- Leur vérification se fait avec la formule de Bailey–Borwein–Plouffe (1995) ou celle de Bellard (1997), qui permettent de calculer le k^e chiffre (en base 16) après la virgule du nombre π sans avoir à en calculer les précédents.

Historique de la connaissance de π (1)

Avant l'ordinateur

-2500 avant J.-C. : $\frac{22}{7} \simeq 3.14$

-250 avant J.-C. : Archimède, Grèce, $\frac{223}{71} < \pi < \frac{22}{7}$

480 après J.-C. : Zu Chongzhi, Chine, $\frac{355}{113} \simeq 3.141592$

Avant l'ordinateur, avec les séries

1120 : Fibonacci, Italie, $\pi \simeq 3.141818$

1579 : François Viète, France, calcul de $\frac{2}{\pi}$, 9 décimales

1853 : William Shanks, Angleterre, passe 15 ans à calculer 707 décimales mais seules les 527 premières sont justes

Historique de la connaissance de π (2)

Avec l'ordinateur

- **1910 :** Ramanujan, Inde, établit de nombreuses formules qui vont beaucoup servir par la suite (film *L'Homme qui défiait l'infini*, 2015)
- **1973 :** Jean Guilloud et Martin Bouyer, France, en 23h20min, 1001250 décimales
- **Entre 1981 et 1989 :** record plusieurs fois par an, entre le Japon et les États-Unis
- **Années 2000 :** différents records en 2009, 2010, 2011, 2013, 2014, 2016, 2019, 2020, 2021, 2022
- **2024 :** Ranous, O'Brien et Beeler, en 104 jours, plus de deux cent deux mille milliards ($2,0211229 \times 10^{14}$) de décimales

Un peu de poésie

Un peu de poésie

> *Que j'aime à faire apprendre ce nombre utile aux sages !*
> *3 1 4 1 5 9 2 6 5 3 5*
> *Immortel Archimède, artiste ingénieur,*
> *8 9 7 9*
> *Qui de ton jugement peut priser la valeur ?*
> *3 2 3 8 4 6 2 6*
> *Pour moi, ton problème eut de pareils avantages.*
> *4 3 3 8 3 2 7 9*
>
> Maurice Decerf