Note sur les suites et séries de fonctions

Jean-Jérôme Casanova

1 Suites et séries de fonctions

1.1 Définitions et premières propriétés

Définition 1. Soit X un ensemble, (E,d) un espace métrique et $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions de X dans E.

— On dit que la suite (f_n) converge *simplement* vers une fonction $f : X \to E$ si pour tout $x \in X$ la suite $(f_n(x))$ converge vers $f(x)$ i.e.

$$\forall x \in X, \forall \varepsilon > 0,\ \exists N \in \mathbb{N} \,/\, \forall n \geq N,\ d(f_n(x), f(x)) < \varepsilon.$$

— On dit que la suite (f_n) converge *uniformément* vers une fonction $f : X \to E$ si

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N} \,/\, \forall x \in X, \forall n \geq N,\ d(f_n(x), f(x)) < \varepsilon.$$

Remarque 2. *Si E est un espace vectoriel normé (muni d'une norme $\|\cdot\|$) et si on considère l'espace $\mathcal{B}(X,E)$ des fonctions bornées de X dans E muni de la norme $\|f\|_\infty = \sup_{x\in X}\|f(x)\|$ alors la convergence uniforme correspond à la convergence dans $\mathcal{B}(X,E)$. Si de plus E est complet (i.e. un espace de Banach) alors, en se souvenant que $\mathcal{B}(X,E)$ est aussi complet, on obtient le critère de Cauchy uniforme suivant. Une suite de fonctions (f_n) converge uniformément (ou simplement converge dans $\mathcal{B}(X,E)$) si et seulement si elle est de Cauchy i.e.*

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N} \,/\, \forall p, q \geq N,\ \|f_p - f_q\|_\infty < \varepsilon.$$

On remarque que ce critère est "intrinsèque" et ne demande pas d'identifier au préalable une limite simple de f. Cependant, dans l'immense majorité des cas, on commencera par déterminer une limite simple de la suite (f_n) avant d'étudier la convergence uniforme vers cette limite.

Exemple 3. — La suite de fonction $f_n : [0,1[\to \mathbb{R} \quad x \mapsto x^n$ converge simplement vers 0. Sur $[0,1[$ cette convergence n'est pas uniforme car pour tout $n \in \mathbb{N}$ il existe $x \in [0,1[$ tel que $|f_n(x) - 0| > 1/2$ (on prend x très proche de 1). Cependant, sur l'intervalle $[0,\delta[$ avec $0 < \delta < 1$ on a bien convergence uniforme car pour tout $\varepsilon > 0$ on peut choisir $N \in \mathbb{N}$ tel que $\delta^N < \varepsilon$ et alors, pour tout $x \in [0,\delta[$ et tout $n \geq N$ on a $|f_n(x)| \leq \delta^n \leq \delta^N < \varepsilon$. Cet exemple est typique, on aura souvent un problème de convergence uniforme aux bornes de l'intervalle de définition.

— Exemple d'utilisation du critère de Cauchy uniforme. Soit (f_n) une suite de fonctions polynomiales définies sur $\mathbb{R}$, qui converge uniformément vers une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Alors f est nécessairement une fonction polynomiale. En effet, d'après le critère de Cauchy uniforme on a :

$$\exists N \in \mathbb{N} \,/\, \forall n \geq N, \forall x \in \mathbb{R},\ |f_n(x) - f_N(x)| \leq 1.$$

En particulier pour tout $n \geq N$ la fonction $f_n - f_N$ est une fonction polynomiale bornée sur $\mathbb{R}$ et donc elle est constante. Ainsi, pour tout $n \geq N$, il existe $\alpha_n \in \mathbb{R}$ tel que $f_n = \alpha_n + P_N$. En utilisant la convergence simple de f_n on montre alors que α_n converge vers un certain $\alpha \in \mathbb{R}$ et finalement f_n converge simplement (et uniformément) vers la fonction polynomiale $\alpha + P_N$.

Soit (g_n) une suite de fonctions. On considère la série de fonctions $f_n = \sum_{k=0}^{n} g_k$. On dit que la série de fonctions $\sum g_k$ converge simplement/uniformément si la suite de fonctions (f_n) converge simplement/uniformément. On introduit alors un nouveau type de convergence, la convergence normale, qui est un critère pratique pour montrer la convergence uniforme d'une série de fonctions.

Définition 4. Soient X un ensemble et E un espace de Banach. On dit que la série de fonctions $\sum g_k$ à termes dans $\mathcal{B}(X, E)$ converge *normalement* si la série $\sum \|g_k\|_\infty$ converge.

Proposition 5. *Soit $\sum g_k$ une série de fonctions à valeurs dans un espace de Banach. Si $\sum g_k$ converge normalement alors elle converge aussi uniformément.*

Démonstration. On utilise le critère de Cauchy uniforme. Soit $N \in \mathbb{N}$ et $p > q \geq N$. Pour tout $x \in X$:

$$\left\| \sum_{k=0}^{p} g_k(x) - \sum_{k=0}^{q} g_k(x) \right\| = \left\| \sum_{k=q+1}^{p} g_k(x) \right\| \leq \sum_{k=q+1}^{p} \|g_k(x)\| \leq \sum_{k=q+1}^{p} \|g_k\|_\infty .$$

Puisque la série numérique $\sum \|g_k\|_\infty$ converge on en déduit immédiatement que la série de fonctions $\sum g_k$ satisfait le critère de Cauchy uniforme et donc converge uniformément. □

Remarque 6. *La réciproque est fausse, il existe des séries de fonctions qui convergent uniformément mais pas normalement. Lorsque l'on veut démontrer la convergence uniforme d'une série de fonctions on commence par regarder la convergence normale qui est le critère le plus simple. Si la convergence normale n'est pas vérifiée on essaye alors de majorer uniformément la différence entre la série de fonctions et une limite simple que l'on a déterminée au préalable.*

1.2 Propriétés de la fonction limite

Théorème 7 (Continuité de la fonction limite)**.** *Soient (E, d) et (F, δ) deux espaces métriques et (f_n) une suite de fonctions de E dans F. Si (f_n) converge uniformément sur E vers une fonction $f : E \to F$ et si toutes les fonctions f_n sont continues en $x_0 \in E$ alors f est continue en x_0.*

Démonstration. Soit $\varepsilon > 0$. Puisque (f_n) converge uniformément vers f on a :

$$\exists k \in \mathbb{N} \,/\, \forall x \in E,\ \delta(f_k(x), f(x)) < \varepsilon.$$

De plus f_k est continue en x_0 donc :

$$\exists \alpha > 0 \,/\, \forall x \in E,\ d(x, x_0) \leq \alpha \Rightarrow \delta(f_k(x), f_k(x_0)) < \varepsilon.$$

Finalement on a, pour tout $x \in E$ tel que $d(x, x_0) \leq \alpha$,

$$\delta(f(x), f(x_0)) \leq \delta(f(x), f_k(x)) + \delta(f_k(x), f_k(x_0)) + \delta(f_k(x_0), f(x_0)) < 3\varepsilon.$$

□

Théorème 8 (Intégration d'une suite de fonctions)**.** *Soit (f_n) une suite de fonctions continues d'un segment $[a, b]$ de $\mathbb{R}$ dans un espace de Banach E, qui converge uniformément vers f sur $[a, b]$. Alors f est continue et*

$$\int_a^b f(t)dt = \lim_{n \to +\infty} \int_a^b f_n(t)dt.$$

Démonstration. On a

$$\left| \int_a^b f(t)dt - \int_a^b f_n(t)dt \right| \leq \int_a^b |f(t) - f_n(t)|dt \leq (b - a) \left\| f_n - f \right\|_\infty .$$

□

Corollaire 9 (Interversion $\sum / \int$)**.** *Si $\sum f_k$ est une série de fonctions continues sur un segment $[a, b]$ qui converge uniformément alors*

$$\int_a^b \sum_{k=0}^{+\infty} f_k(t)dt = \sum_{k=0}^{+\infty} \int_a^b f_k(t)dt.$$

Remarque 10. *Ces théorèmes sont très loin d'être optimaux et doivent être pensés comme les cas simples ou tout fonctionne. En pratique on utilise plus souvent les théorèmes de convergence dominée et de convergence monotone de la théorie de Lebesgue pour intervertir une série et une intégrale.*

Théorème 11 (Dérivabilité de la fonction limite)**.** *Soit (f_n) une suite de fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ d'un segment $[a, b]$ de $\mathbb{R}$ dans un espace de Banach E. On suppose que :*

— *Il existe* $x_0 \in [a,b]$ *tel que* $(f_n(x_0))$ *converge.*

— *La suite de fonctions* (f_n') *converge uniformément sur* $[a,b]$ *vers une fonction* g.

Alors (f_n) *converge uniformément sur* $[a,b]$ *vers une fonction* f *de classe* $\mathcal{C}^1$ *vérifiant* $f' = g$.

Corollaire 12 (Version $\mathcal{C}^k$)**.** *Soit* $k \in \mathbb{N}^*$ *et* (f_n) *une suite de fonctions de classe* $\mathcal{C}^k$ *d'un segment* $[a,b]$ *de* $\mathbb{R}$ *dans un espace de Banach* E. *On suppose que pour tout* $i \in \{1,2,\ldots,k\}$ *la suite de fonctions* $(f_n^{(i)})$ *converge uniformément vers une fonction* g_i *sur* $[a,b]$. *Alors la limite uniforme* $f = g_0$ *de* (f_n) *est de classe* $\mathcal{C}^k$ *et vérifie* $f^{(i)} = g_i$ *pour tout* $i \in \{1,2,\ldots,k\}$.

Corollaire 13 (Version série de fonctions)**.** *Soit* $k \in \mathbb{N}^*$ *et* $\sum f_n$ *une série de fonctions de classe* $\mathcal{C}^k$ *d'un segment* $[a,b]$ *de* $\mathbb{R}$ *dans un espace de Banach* E. *On suppose que pour tout* $i \in \{1,2,\ldots,k\}$ *la série de fonctions* $\sum f_n^{(i)}$ *converge uniformément. Alors* $g = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n$ *est de classe* $\mathcal{C}^k$ *et* $g^{(i)} = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n^{(i)}$ *pour tout* $i \in \{1,2,\ldots,k\}$.

Nous terminons cette note avec un théorème important d'approximation qui peut se démontrer à l'aide des séries de fonctions.

Théorème 14 (théorème de Weierstrass)**.** *Toute fonction continue* $f : [a,b] \subset \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ *est limite uniforme sur* $[a,b]$ *d'une suite de fonctions polynômes.*

Remarque 15. *Ce théorème n'est pas en contradiction avec l'exemple* 3 *car on se place ici sur un segment borné et non pas* $\mathbb{R}$ *tout entier.*

Exemple 16. Soit f une fonction continue sur $[a,b]$ telle que

$$\int_a^b f(t)P(t)dt = 0,$$

pour toute fonction polynomiale P. Alors, en prenant une suite (P_n) de fonctions polynomiales qui converge uniformément vers f on a :

$$0 = \int_a^b f(t)P_n(t)dt \to \int_a^b f(t)^2 dt = 0,$$

et la fonction f est nulle.