Théorème des sous variétés

Jean-Jérôme Casanova

Le but de ce document est de démontrer l'équivalence entre trois définitions d'une sous variété de $\mathbb{R}^n$ (définition comme object "lisse", vision paramétrique et vision implicite). Avant de présenter ces trois définitions et de montrer leur équivalence on commence par rappeler comment mettre une submersion et une immersion sous forme "normale".

Théorème 1. *Soient $1 \leq p \leq n$ deux entiers, U un ouvert de $\mathbb{R}^n$, $a \in U$ et $f = (f_1, \ldots, f_p) : U \to \mathbb{R}^p$ une application de classe $\mathcal{C}^1$ telle que $Df(a)$ soit surjective (on dit que f est une submersion en a). Alors il existe un $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme φ d'un voisinage ouvert de a dans $\mathbb{R}^n$ tel que*

$$f \circ \varphi^{-1} = g : (x_1, \ldots, x_n) \to (x_1, \ldots, x_p).$$

Preuve. Puisque $Df(a)$ est surjective les vecteurs $Df_i(a)$ sont libres avec $i \in [\![1, p]\!]$. En utilisant le théorème de la base incomplète on considère une famille de formes linéaires $(\varphi_{p+1}, \ldots, \varphi_n)$ telle que $(Df_1(a), \ldots, Df_p(a), \varphi_{p+1}, \ldots, \varphi_n)$ soit une base de $(\mathbb{R}^n)^*$. On définit enfin l'application:

$$\varphi : x \mapsto (f_1(x), \ldots, f_p(x), \varphi_{p+1}(x), \ldots, \varphi_n(x)), \, \forall x \in U.$$

L'application φ est $\mathcal{C}^1$ car f est $\mathcal{C}^1$ et les φ_i sont linéaires en dimension finie. De plus $D\varphi(a) = (Df_1(a), \ldots, Df_p(a), \varphi_{p+1}, \ldots, \varphi_n)$ est inversible donc d'après le théorème d'inversion locale φ réalise un $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme d'un voisinage ouvert V de a dans $\mathbb{R}^n$ vers $\varphi(V)$. Finalement on remarque que $f = g \circ \varphi$. □

Théorème 2. *Soient $1 \leq p \leq n$ deux entiers, U un ouvert de $\mathbb{R}^p$, $a \in U$ et $f = (f_1, \ldots, f_n) : U \to \mathbb{R}^n$ une application de classe $\mathcal{C}^1$ telle que $Df(a)$ soit injective (on dit que f est une immersion en a). Alors il existe un $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme φ^{-1} d'un voisinage ouvert de $f(a)$ dans $\mathbb{R}^n$ tel que*

$$\varphi^{-1} \circ f = g : (x_1, \ldots, x_p) \to (x_1, \ldots, x_p, 0 \ldots, 0).$$

Preuve. On note $(e_1, \ldots, e_p)$ la base canonique de $\mathbb{R}^p$. Puisque $Df(a)$ est injective les vecteurs $Df(a)e_i$ sont libres avec $i \in [\![1, p]\!]$. En utilisant le théorème de la base incomplète on considère une famille $(v_{p+1}, \ldots, v_n)$ telle que $(Df(a)e_1, \ldots, Df(a)e_p, v_{p+1}, \ldots, v_n)$ est une base de $\mathbb{R}^n$. On introduit alors la fonction

$$\varphi : x \mapsto f(x_1, \ldots, x_p) + x_{p+1}v_{p+1} + \cdots + x_n\varphi_n, \, x \in U \times \mathbb{R}^{n-p}.$$

L'application φ est $\mathcal{C}^1$ car les dérivées partielles de φ existent et sont continues. De plus, si on note $a' = (a, 0) \in \mathbb{R}^n$ on a

$$D\varphi(a') = (Df(a)e_1, \ldots, Df(a)e_p, v_{p+1}, \ldots, v_n),$$

et $D\varphi(a')$ est inversible et d'après le théorème d'inversion locale φ réalise un $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme d'un voisinage ouvert de a' dans $\mathbb{R}^n$ vers $\varphi(V)$. Finalement on remarque que $f = \varphi \circ g$. $\square$

Remarque 3. Dans les deux cas on remarque que si $a = 0$ et que $f(a) = 0$ les fonctions φ sont bien définies entre deux ouverts de $\mathbb{R}^n$ contenant 0. De plus $\varphi(0) = 0$. Ces propriétés nous seront utiles pour ajuster les voisinages dans la preuve du théorème des sous variétés.

Nous allons maintenant présenter et démontrer le "théorème des sous variétés".

Théorème 4. *Soit M un sous ensemble de $\mathbb{R}^n$ et $a \in M$. On dit que M est une sous variété de $\mathbb{R}^n$ en a de classe C^1 et de dimension d si l'une des définitions suivantes équivalentes est satisfaite:*

1. *(Vision lisse, ou définition par redressement). Il existe un voisinage ouvert U de a dans $\mathbb{R}^n$ et V un voisinage ouvert de 0 dans $\mathbb{R}^n$ ainsi qu'un $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme $\varphi : U \to V$ telle que $\varphi(a) = 0$ et*

$$\varphi(U \cap M) = V \cap \left(\mathbb{R}^d \times \{0\}\right).$$

2. *(Vision paramétrique). Il existe un voisinage ouvert U de a dans $\mathbb{R}^n$, un voisinage ouvert Ω de 0 dans $\mathbb{R}^d$ et une immersion $f : \Omega \to \mathbb{R}^n$ (i.e. f est $\mathcal{C}^1$ et sa différentielle est injective) telle que $f(0) = a$ et f réalise un homéomorphisme de Ω sur $U \cap M$.*

3. *(Vision implicite). Il existe un voisinage ouvert U de a et une submersion $f : U \to \mathbb{R}^{n-d}$ (i.e. f est $\mathcal{C}^1$ et sa différentielle est surjective) telle que $U \cap M = f^{-1}(\{0\})$.*

Preuve. La définition "la plus forte" des trois est la première. Les implications (1) $\to$ (2) et (1) $\to$ (3) sont donc les plus aisées. Pour démontrer les implications réciproques nous utiliserons le théorème des formes normales pour les submersions et les immersions rappelé plus haut.

• (1) $\to$ (2). Soit U et φ comme dans le théorème. On va montrer que la restriction de φ^{-1} à $\Omega = \varphi(U) \cap \mathbb{R}^d$ fournit un paramétrage. On note $i : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^n$ l'injection canonique de $\mathbb{R}^p$ dans $\mathbb{R}^n$. On considère alors $f = \varphi^{-1} \circ i : \Omega \to \mathbb{R}^n$. Montrons que f satisfait bien les conditions du théorème. Puis que i est injective, $\mathcal{C}^\infty$ et que φ est un $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme on en déduit que f est $\mathcal{C}^1$ et injective (et par composition, la différentielle de f est aussi injective). De plus

$$f(\Omega) = \varphi^{-1}(i(\Omega)) = \varphi^{-1}(\varphi(U) \cap (\mathbb{R}^d \times \{0\})) = U \cap M.$$

Ainsi f réalise une bijection continue de Ω sur $U \cap M$ et $f^{-1} : U \cap M \to \Omega$ est définie par l'identité $f^{-1}(x) = (\varphi_1(x), \ldots, \varphi_d(x))$ pour tout $x \in U \cap M$ (écrire $\varphi^{-1}(i(x)) = y$ et inverser). Ainsi f^{-1} est continue et f réalise un homéomorphisme de Ω sur $U \cap M$.

• (1) → (3). On suppose toujours que U et φ sont définis comme dans le théorème. On note $\varphi = (\varphi_1, \ldots, \varphi_n)$ et on pose $f = (\varphi_{d+1}, \ldots, \varphi_n)$. On a bien $f : U \to \mathbb{R}^{n-d}$ et puisque φ est un $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme $Df(a) = (D\varphi_{d+1}(a), \ldots, D\varphi_n(a))$ est surjective (les vecteurs $D\varphi_i(a) = (\partial_j \varphi_i(a))_{1 \le j \le n}$ sont libres et donc en particulier les $n-d$ derniers le sont aussi). La fonction f est donc une surjection et il reste à montrer que $f^{-1}(\{0\}) = U \cap M$. On procède par équivalence:

$$\begin{aligned} x \in f^{-1}(\{0\}) &\Leftrightarrow f(x) = 0 \ \&\ x \in U \\ &\Leftrightarrow (\varphi_{d+1}(x), \ldots, \varphi_n(x)) = 0 \ \&\ x \in U \\ &\Leftrightarrow \varphi(x) \in \varphi(U) \cap (\mathbb{R}^d \times \{0\}) \\ &\Leftrightarrow x \in \varphi^{-1}(\varphi(U) \cap (\mathbb{R}^d \times \{0\})) = U \cap M. \end{aligned}$$

• (3) → (1). On suppose que U et f sont comme dans le théorème. Quitte à translater la sous variété on va supposer que $a = 0$. Cette hypothèse nous permettra, lorsque l'on va utiliser la forme normale de f, d'ajuster les voisinages (voir Remarque 3). On a alors $f(0) = 0$ et f est une submersion en 0. D'après Théorème 1 il existe un $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme φ entre deux voisinages ouverts U_1 et U_2 (que l'on suppose inclus dans U) de 0 dans $\mathbb{R}^n$ telle que

$$f \circ \varphi^{-1} : (x_1, \ldots, x_n) \to (x_{d+1}, \ldots, x_n).$$

Quitte à restreindre U (puis U_2) on peut supposer que $U = U_1$. On note alors $\varphi : U \to U_2$ et on va montrer que $\varphi(U \cap M) = \varphi(U) \cap (\mathbb{R}^d \times \{0\})$. Soit $x \in U \cap M$. On a $0 = f(x) = f(\varphi^{-1}(\varphi(x)))$ donc $\varphi(x) \in \mathbb{R}^d \times \{0\}$. On a ainsi montré que $\varphi(U \cap M) \subset \varphi(U) \cap (\mathbb{R}^d \times \{0\})$. Réciproquement si $y \in \varphi(U) \cap (\mathbb{R}^d \times \{0\})$ il existe $x \in U$ tel que $y = \varphi(x)$. Les d dernières composantes de $\varphi(x)$ sont nulles. On en déduit que $(f \circ \varphi^{-1})(\varphi(x)) = 0 = f(x)$. Ainsi $x \in f^{-1}(\{0\}) = U \cap M$ et on a $\varphi(U) \cap (\mathbb{R}^d \times \{0\}) \subset \varphi(U \cap M)$.

• (2) → (1). Soit Ω, U, f comme dans le théorème. Comme précédemment on se ramène au cas $a = 0$ à l'aide d'une translation. On a donc une immersion f en 0 qui vérifie $f(0) = 0$. D'après Théorème 2 il existe un $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme φ entre deux ouverts U_1 et U_2 (que l'on suppose inclus dans U) de $\mathbb{R}^n$ tel que

$$\varphi^{-1} \circ f : (x_1, \ldots, x_d) \to (x_1, \ldots, x_d, 0, \ldots, 0). \tag{0.1}$$

Quitte à restreindre U, Ω et U_1 on suppose que $U = U_2$ et on note $\varphi^{-1} : U \to U_1$. On a alors $\varphi^{-1} \circ f$ qui réalise un $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme de Ω sur $\varphi^{-1}(U \cap M) \cap (\mathbb{R}^d \times \{0\})$ ce qui nous donne l'inclusion $\varphi^{-1}(U \cap M) \subset \varphi(U) \cap (\mathbb{R}^d \times \{0\})$. Cependant cette inclusion peut être stricte. On va devoir trouver un meilleur candidat que U pour obtenir l'égalité. On pose $V = U_1 \cap (\Omega \times \mathbb{R}^{n-d})$ et on note, $\Phi = \varphi^{-1} : U \to U_1$ (pour éviter la notation inverse dans les calculs qui vont suivre). En utilisant (0.1) on remarque que :

$$\Phi(f(\Omega)) = \Omega \times \{0\} \subset U_1 \cap (\mathbb{R}^d \times \{0\}).$$

On en déduit la première inclusion dans

$$\Omega \times \{0\} \subset V \subset \Omega \times \mathbb{R}^{n-d}.$$

Si on intersecte les ensembles précédents avec $\mathbb{R}^d \times \{0\}$ on obtient:

$$V \cap (\mathbb{R}^d \times \{0\}) = \Omega \times \{0\} = V \cap (\Omega \times \{0\}).$$

Pour la dernière égalité il suffit d'intersecter la première avec V. On pose alors $U_3 = \Phi^{-1}(V) \subset \Phi^{-1}(U_1) \subset U$. Il s'agit d'un voisinage ouvert de 0 dans $\mathbb{R}^n$ et de plus

$$\begin{aligned}
\Phi(U_3 \cap M) &= \Phi(U_3 \cap U \cap M) \\
&= \Phi(U_3) \cap \Phi(U \cap M) \\
&= V \cap (\Omega \times \{0\}) \\
&= V \cap (\mathbb{R}^d \times \{0\}) = \Phi(U_3) \cap (\mathbb{R}^d \times \{0\}).
\end{aligned}$$

Ainsi on a bien construit un $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme $\Phi : U_3 \to V$ vérifie les hypothèses du théorème. $\square$