# Notions fondamentales de L1-L2
# Examen du 26 Octobre 2021 (durée 2h)

---

Toutes les réponses doivent être soigneusement justifiées pour être considérées. Il est rappelé que la rédaction comptera de manière importante dans l'évaluation des copies. Aucun document n'est autorisé, aucune calculatrice. Le barème est donné à titre indicatif.

---

**Exercice 1.** (Diagonalisation, 4 points)
Soit $A$ la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & -1 \\ 2 & 4 & 2 \\ -1 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

1. Calculer et factoriser $\mathcal{X}_A$.

2. Diagonaliser $A$ et donner une matrice $D$ diagonale et $P \in GL_n(\mathbb{R})$ telles que $A = PDP^{-1}$.

3. Donner, sans calcul mais en justifiant, le polynôme minimal de $A$.

4. Exprimer $A^n$ en fonction de $P$, $D$ et $P^{-1}$.

---

**Exercice 2.** (Formule de Stirling, 4 points)
On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad u_n = \frac{n^n e^{-n}\sqrt{n}}{n!}.$$

1. En effectuant un développement limité, montrer que la série de terme général $v_n = \ln(u_{n+1}/u_n)$ converge.

2. En déduire l'existence de $k > 0$ tel que : $n! \sim k\sqrt{n}\, n^n e^{-n}$ lorsque $n \to +\infty$.

**Exercice 3.** (Étude d'une forme quadratique, 5 points)
On définit l'application q sur $\mathbb{R}_2[X]$ par :

$$\forall P \in \mathbb{R}_2[X],\ q(P) = P'(1)^2 - P'(0)^2.$$

1. Montrer que $q$ est une forme quadratique, donner sa forme polaire ainsi que sa matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}_2[X]$.

2. Déterminer son noyau et son cône isotrope.

3. La forme quadratique $q$ est-elle non dégénérée ? Définie ? Positive ou négative ?

4. Déterminer une base de $\{X^2\}^\perp$

5. Déterminer $\{1\}^\perp$.

---

**Exercice 4.** (Séries d'endomorphismes, 10 points)
Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace de Banach. On dit qu'une série $\sum\limits_{n\geq 0} u_n$ à valeurs dans $E$ est absolument convergente si la série numérique $\sum\limits_{n\geq 0} \|u_n\|$ converge.

1. Soit $\sum\limits_{n\geq 0} u_n$ une série absolument convergente. Montrer que la série converge et que

$$\left\| \sum_{n\geq 0} u_n \right\| \leq \sum_{n\geq 0} \|u_n\|\,.$$

Soit $\mathcal{L}_c(E)$ l'ensemble des endomorphismes continues de $E$. On rappelle que cet espace, muni de la norme $\|f\|_\infty = \sup_{\|x\|=1} \|f(x)\|$ est un espace de Banach.

2. Montrer que $\|\cdot\|_\infty$ vérifie : $\forall f, g \in \mathcal{L}_c(E)$, $\|f \circ g\|_\infty \leq \|f\|_\infty \|g\|_\infty$.

3. Soit $\sum_{n\geq 0} a_n z^n$ une série entière de rayon $R > 0$. Soit $f \in \mathcal{L}_c(E)$ tel que $\|f\|_\infty < R$. Montrer que la série $\sum_{n\geq 0} a_n f^n$ converge vers un élément de $\mathcal{L}_c(E)$.

4. Montrer que l'application

$$T : \begin{cases} \{f \in \mathcal{L}_c(E) \mid \|f\|_\infty < R\} \to \mathcal{L}_c(E) \\ f \mapsto \sum\limits_{n\geq 0} a_n f^n, \end{cases}$$

est continue. (Indication : on pourra montrer que $T$ est continue sur les ensembles de la forme $\{f \in \mathcal{L}_c(E) \mid \|f\|_\infty \leq r\}$ avec $r \in ]0, R[$ et considérer la série de fonctions $f \mapsto \sum_{n\geq 0} a_n T_n(f)$ ou $T_n : \mathcal{L}_c(E) \to \mathcal{L}_c(E) \quad f \mapsto f^n$).

5. Soit $f \in \mathcal{L}_c(E)$. On suppose que $\|f\|_\infty < 1$. Montrer que la série $\sum_{n\geq 0} f^n$ converge dans $\mathcal{L}_c(E)$ et montrer que sa limite $g$ est l'inverse de $Id_E - f$.

Soit $f \in \mathcal{L}_c(E)$. On appelle exponentielle de $f$ la série

$$h := \sum_{n \geq 0} \frac{1}{n!} f^n,$$

et on note $h = \exp(f) = e^f$.

6. Justifier que $\exp(f)$ existe et montrer que $\|\exp(f)\|_\infty \leq e^{\|f\|_\infty}$.

7. On considère la suite de fonctions $g_n : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+ \quad x \mapsto \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n$. Donner la limite simple de $g_n$ sur $\mathbb{R}^+$. La convergence est-elle uniforme ?

8. Montrer que

$$\lim_{n \to +\infty} \left(Id_E + \frac{f}{n}\right)^n = \exp(f).$$

(Indication : on pourra montrer que pour tout $k \in [\![1, n]\!]$ : $\displaystyle\frac{1}{n^k}\binom{n}{k} \leq \frac{1}{k!}$).

9. Soit $g \in \mathcal{L}_c(E)$ tel que $g^{-1} \in \mathcal{L}_c(E)$. Montrer que

$$\exp(g^{-1} f g) = g^{-1} \exp(f) g.$$

On se place désormais en dimension finie. Soit $A \in \mathbb{M}_n(\mathbb{C})$.

10. Montrer que $\exp(A)$ est un polynôme en $A$.

11. Montrer que $\det(\exp(A)) = e^{\mathrm{tr}(A)}$.