Notions fondamentales de L1-L2
Correction Examen du 26 Octobre 2021

Exercice 1. (Diagonalisation, 4 points)
Soit A la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & -1 \\ 2 & 4 & 2 \\ -1 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

1. Calculer et factoriser $\mathcal{X}_A$.

2. Diagonaliser A et donner une matrice D diagonale et $P \in GL_n(\mathbb{R})$ telles que $A = PDP^{-1}$.

3. Donner, sans calcul mais en justifiant, le polynôme minimal de A.

4. Exprimer A^n en fonction de P, D et P^{-1}.

Correction :

1. On a

$$\mathcal{X}_A(\lambda) = \begin{vmatrix} \lambda-3 & 0 & 1 \\ -2 & \lambda-4 & -2 \\ 1 & 0 & \lambda-3 \end{vmatrix} = (\lambda-4)\begin{vmatrix} \lambda-3 & 1 \\ 1 & \lambda-3 \end{vmatrix} = (\lambda-4)((\lambda-3)^2-1) = (\lambda-4)^2(\lambda-2).$$

2. On a $\mathrm{Sp}(A) = \{2, 4\}$. La matrice A est diagonalisable si et seulement si le sous espace propre associé à la valeur propre 4 est de dimension 2. Calculons $E_4(A)$:

$$X = (x, y, z)^T \in E_4(A) \Leftrightarrow \begin{cases} 3x - z = 4x \\ 2x + 4y + 2z = 4y \\ -x + 3z = 4z \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = -z \\ y = y \\ z = z \end{cases}$$

On a donc $E_4(A) = \text{Vect}\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \rangle$ qui est de dimension 2 et A est diagonalisable.

Calculons $E_2(A)$:

$$\begin{aligned} X = (x,y,z)^T \in E_2(A) &\Leftrightarrow \begin{cases} 3x - z = 2x \\ 2x + 4y + 2z = 2y \\ -x + 3z = 2z \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x = z \\ y = -2z \\ z = z \end{cases} \end{aligned}$$

Ainsi $E_2(A) = \text{Vect}\langle \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \rangle$. En notant $B' = (\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix})$ la base formée des vecteurs propres de A et P la matrice de passage de la base canonique B à la base B' on a :

$$A = \text{Mat}_{B',B}(Id) \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \text{Mat}_{B,B'}(Id) = PDP^{-1},$$

avec $D = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

3. Puisque A est diagonalisable son polynôme minimal est scindé à racines simples. De plus il divise le polynôme caractéristique et ses racines sont exactement les valeurs propres de A. On en déduit que $\mu_A(\lambda) = (\lambda - 4)(\lambda - 2)$.

4. Par récurrence immédiate on a : $A^n = PD^nP^{-1}$.

Exercice 2. (Formule de Stirling, 4 points)
On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad u_n = \frac{n^n e^{-n} \sqrt{n}}{n!}.$$

1. En effectuant un développement limité, montrer que la série de terme général $v_n = \ln(u_{n+1}/u_n)$ converge.

2. En déduire l'existence de $k > 0$ tel que : $n! \sim k\sqrt{n}\, n^n e^{-n}$ lorsque $n \to +\infty$.
Correction :

1. On commence par simplifier $\frac{u_{n+1}}{u_n}$:

$$\begin{aligned}
\frac{u_{n+1}}{u_n} &= \frac{(n+1)^{n+1}e^{-(n+1)}\sqrt{n+1}}{(n+1)!}\frac{n!}{n^n e^{-n}\sqrt{n}} \\
&= \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+\frac{1}{2}} e^{-1}.
\end{aligned}$$

On peut alors estimer v_n lorsque n tend vers l'infini :

$$\begin{aligned}
v_n &= \left(n+\frac{1}{2}\right)\ln(1+\frac{1}{n}) - 1 \\
&= \left(n+\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{n^3}\right)\right) - 1 \\
&= 1 - \frac{1}{2n} + \frac{1}{2n} - \frac{1}{4n^2} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{n^2}\right) - 1 \\
&= \mathcal{O}\left(\frac{1}{n^2}\right).
\end{aligned}$$

Puisque $\sum \frac{1}{n^2}$ est une série de Riemann absolument convergente on en déduit $\sum v_n$ est une série absolument convergente et donc convergente (rappel : les théorèmes de comparaison sur les séries concernent des séries à termes positifs, pour le critère avec $\mathcal{O}$ il suffit d'être de signe constant à partir d'un certain rang. Ici on utilise la convergence absolue pour éviter l'étude du signe de v_n).

2. Soit $N \in \mathbb{N}^*$:

$$\sum_{n=1}^{N} v_n = \sum_{n=1}^{N} \ln(u_{n+1}) - \ln(u_n) = \ln(u_{N+1}) - \ln(u_1) \text{ (série téléscopique).}$$

En faisant tendre N vers l'infini on en déduit que la suite $(\ln(u_n))$ converge vers un certain $\lambda \in \mathbb{R}$. Par continuité de l'exponentielle on a $u_n \to e^{\lambda}$ lorsque n tend vers l'infini. Finalement en notant $k = \frac{1}{e^{\lambda}}$ on a :

$$\frac{kn^n e^{-n}\sqrt{n}}{n!} \underset{n\to+\infty}{\rightarrow} 1,$$

donc

$$n! \sim kn^n e^{-n}\sqrt{n}.$$

Remarque : en utilisant les intégrales de Wallis (par exemple) on peut montrer que la constante $k = \sqrt{2\pi}$.

Exercice 3. (Étude d'une forme quadratique, 5 points)
On définit l'application q sur $\mathbb{R}_2[X]$ par :

$$\forall P \in \mathbb{R}_2[X],\ q(P) = P'(1)^2 - P'(0)^2.$$

1. Montrer que q est une forme quadratique, donner sa forme polaire ainsi que sa matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}_2[X]$.

2. Déterminer son noyau et son cône isotrope.

3. La forme quadratique q est-elle non dégénérée ? Définie ? Positive ou négative ?

4. Déterminer une base de $\{X^2\}^\perp$

5. Déterminer $\{1\}^\perp$.

Correction :

1. En utilisant la méthode de dédoublement des termes on introduit la forme bilinéaire symétrique :

$$\varphi(P, Q) = P'(1)Q'(1) - P'(0)Q'(0).$$

Puisque $q(P) = \varphi(P, P)$ on en déduit que q est une forme quadratique et que sa forme polaire est φ (autre méthode : utiliser directement les formules de polarisation pour retrouver φ). La matrice de q (qui est la matrice de sa forme polaire) est donnée par (en notant B la base canonique de $\mathbb{R}_2[X]$) :

$$\mathrm{Mat}_B(q) = (\varphi(X^{i-1}, X^{j-1}))_{1\leq i,j\leq 3} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 4 \end{pmatrix}.$$

2. On a $\mathrm{Ker}(q) = \{P \in \mathbb{R}_2[X] \mid \forall Q \in \mathbb{R}_2[X],\ \varphi(P, Q) = 0\} = \mathrm{Ker}(A)$. La matrice A est de rang 2 donc d'après le théorème du rang son noyau est de dimension 1. De plus, la première colonne de A étant nulle on a $(1, 0, 0)$ qui est dans le noyau de A. Ainsi $\mathrm{Ker}(A) = \mathrm{Vect}\ \langle 1\rangle$ i.e. l'ensemble des polynômes constants. Pour déterminer le cône isotrope (que l'on note C_q) on a :

$$\begin{aligned} P = aX^2 + bX + c \in C_q &\Leftrightarrow q(P) = (2a + b)^2 - b^2 = 0 \\ &\Leftrightarrow 4a(a + b) = 0 \end{aligned}$$

Ainsi $C_q = \{aX^2 + bX + c \in \mathbb{R}_2[X] \mid a = 0 \text{ ou } a + b = 0\}$ (on peut remarquer que C_q n'est pas un espace vectoriel).

3. Puisque le noyau de q n'est pas vide la forme est dégénérée. De plus le noyau étant inclus dans le cône isotrope elle est également non définie. Enfin $Q(X^2) = 4 > 0$ et $q(2X - X^2) = -4 < 0$ donc q n'est pas négative ou positive.

4. Un polynôme $P = aX^2 + bX + c$ est dans $\{X^2\}^\perp$ si et seulement si :

$$\varphi(aX^2 + bX + c, X^2) = 4a + 2b = 0.$$

Ainsi $\{X^2\}^\perp = \text{Vect}\langle 1, X^2 - 2X\rangle$.

5. Puisque 1 est dans le noyau de q il est orthogonale à tous les éléments de $\mathbb{R}_2[X]$. Ainsi $\{1\}^\perp = \mathbb{R}_2[X]$.

Exercice 4. (Séries d'endomorphismes, 10 points)
Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace de Banach. On dit qu'une série $\sum_{n\geq 0} u_n$ à valeurs dans E est absolument convergente si la série numérique $\sum_{n\geq 0} \|u_n\|$ converge.

1. Soit $\sum_{n\geq 0} u_n$ une série absolument convergente. Montrer que la série converge et que

$$\left\| \sum_{n\geq 0} u_n \right\| \leq \sum_{n\geq 0} \|u_n\| .$$

Soit $\mathcal{L}_c(E)$ l'ensemble des endomorphismes continues de E. On rappelle que cet espace, muni de la norme $\|f\|_\infty = \sup_{\|x\|=1} \|f(x)\|$ est un espace de Banach.

2. Montrer que $\|\cdot\|_\infty$ vérifie : $\forall f, g \in \mathcal{L}_c(E)$, $\|f \circ g\|_\infty \leq \|f\|_\infty \|g\|_\infty$.

3. Soit $\sum_{n\geq 0} a_n z^n$ une série entière de rayon $R > 0$. Soit $f \in \mathcal{L}_c(E)$ tel que $\|f\|_\infty < R$. Montrer que la série $\sum_{n\geq 0} a_n f^n$ converge vers un élément de $\mathcal{L}_c(E)$.

4. Montrer que l'application

$$T : \begin{cases} \{f \in \mathcal{L}_c(E) \mid \|f\|_\infty < R\} \to \mathcal{L}_c(E) \\ f \mapsto \sum\limits_{n\geq 0} a_n f^n, \end{cases}$$

est continue. (Indication : on pourra montrer que T est continue sur les ensembles de la forme $\{f \in \mathcal{L}_c(E) \mid \|f\|_\infty \leq r\}$ avec $r \in]0, R[$ et considérer la série de fonctions $f \mapsto \sum_{n\geq 0} a_n T_n(f)$ ou $T_n : \mathcal{L}_c(E) \to \mathcal{L}_c(E) \quad f \mapsto f^n$).

5. Soit $f \in \mathcal{L}_c(E)$. On suppose que $\|f\|_\infty < 1$. Montrer que la série $\sum_{n\geq 0} f^n$ converge dans $\mathcal{L}_c(E)$ et montrer que sa limite g est l'inverse de $Id_E - f$.

Soit $f \in \mathcal{L}_c(E)$. On appelle exponentielle de f la série

$$h := \sum_{n\geq 0} \frac{1}{n!} f^n,$$

et on note $h = \exp(f) = e^f$.

6. Justifier que $\exp(f)$ existe et montrer que $\|\exp(f)\|_\infty \leq e^{\|f\|_\infty}$.

7. On considère la suite de fonctions $g_n : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+ \quad x \mapsto \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n$. Donner la limite simple de g_n sur $\mathbb{R}^+$. La convergence est-elle uniforme ?

8. Montrer que

$$\lim_{n\to+\infty}\left(Id_E+\frac{f}{n}\right)^n=\exp(f).$$

(Indication : on pourra montrer que pour tout $k\in[\![1,n]\!]$: $\dfrac{1}{n^k}\dbinom{n}{k}\leq\dfrac{1}{k!}$).

9. Soit $g\in\mathcal{L}_c(E)$ tel que $g^{-1}\in\mathcal{L}_c(E)$. Montrer que

$$\exp(g^{-1}fg)=g^{-1}\exp(f)g.$$

On se place désormais en dimension finie. Soit $A\in\mathbb{M}_n(\mathbb{C})$.

10. Montrer que $\exp(A)$ est un polynôme en A.

11. Montrer que $\det(\exp(A))=e^{\mathrm{tr}(A)}$.

Correction :

1. On fixe $N\in\mathbb{N}^*$ et $p>q\geq N$. On a :

$$\left\|\sum_{n=0}^{p}v_n-\sum_{n=0}^{q}v_n\right\|=\left\|\sum_{n=q+1}^{p}v_n\right\|\leq\sum_{n=q+1}^{p}\|v_n\|.$$

Le membre de droite de l'inégalité précédente est une tranche de Cauchy d'une série convergente. Ainsi pour tout $\varepsilon>0$ il existe $N\in\mathbb{N}$ tel que

$$\sum_{n=q+1}^{p}\|v_n\|<\varepsilon,$$

pour tout $p>q\geq N$. On en déduit que la suite $S_N=\sum_{n=0}^{N}v_n$ est une suite de Cauchy dans E qui est complet donc elle converge. Finalement, pour tout $N\in\mathbb{N}^*$:

$$\left\|\sum_{n=0}^{N}v_n\right\|\leq\sum_{n=0}^{N}\|v_n\|,$$

et on obtient l'inégalité demandée en faisant tendre N vers l'infini (le membre de droite converge par hypothèse et le membre de gauche converge par continuité de la norme).

2. Soit $(f,g)\in\mathcal{L}_c(E)^2$ et $x\in E$ $x\neq0$ on a :

$$\|f(g(x))\|\leq\|f\|_\infty\|g(x)\|\leq\|f\|_\infty\|g\|_\infty\|x\|.$$

En normalisant par $\|x\|$ on obtient bien le résultat demandé (on a utilisé que $\|f\|_\infty=\sup_{\|x\|=1}\|f(x)\|=\sup_{x\neq0}\frac{\|f(x)\|}{\|x\|}$).

3. On rappelle que, par définition du rayon de convergence, la série $\sum_{n\geq 0} a_n z^n$ converge absolument pour tout $|z| < R$. Pour tout $f \in \mathcal{L}_c(E)$ tel que $\|f\|_\infty \leq R_1 < R$ on a, en fixant $N \in \mathbb{N}^*$:

$$\sum_{n=0}^{N} \|a_n f^n\|_\infty \leq \sum_{n=0}^{N} |a_n| \, \|f\|_\infty^n \leq \sum_{n=0}^{N} |a_n| R_1^n.$$

Le membre de droite de l'inégalité précédente converge car $R_1 < R$. Ainsi la série $\sum a_n f^n$ est une série absolument convergente et d'après 1. elle converge vers un élément de $\mathcal{L}_c(E)$.

4. Montrons que l'application T_n est continue. On fixe $f \in \mathcal{L}_c(E)$ et soit f_k une suite de fonctions telle que $f_k \to f$ dans $\mathcal{L}_c(E)$. On note $\varepsilon_k = f_k - f$. On a :

$$T_n(f_k) = (f + \varepsilon_k)^n = f^n + R(f, \varepsilon_k),$$

ou $R(f, \varepsilon_k)$ est une somme de composition faisant intervenir f et au moins une fois ε_k. En utilisant la norme d'algèbre, et pour k suffisamment grand, on obtient : $\|R(f, \varepsilon_k)\|_\infty \leq C(f) \|\varepsilon_k\|_\infty$. Puisque par définition ε_k tend vers 0 dans $\mathcal{L}_c(E)$ on en déduit que $T_n(f_k)$ converge vers $T_n(f)$ dans $\mathcal{L}_c(E)$.
On se place désormais sur $\{f \in \mathcal{L}_c(E) \mid \|f\|_\infty \leq r\}$ avec $r \in]0, R[$. L'application $f \mapsto \sum_{n\geq 0} a_n T_n(f)$ est une série de fonctions continues. De plus, pour tout $f \in \{f \in \mathcal{L}_c(E) \mid \|f\|_\infty \leq r\}$:

$$\|a_n T_n(f)\|_\infty \leq |a_n| r^n.$$

Ainsi cette série de fonction converge normalement sur $\{f \in \mathcal{L}_c(E) \mid \|f\|_\infty \leq r\}$ et la somme est continue. Le raisonnement étant vrai pour tout $r \in]0, R[$ on obtient bien le résultat demandé.

5. La série entière $\sum_{n\geq 0} z^n$ a un rayon de convergence $R = 1$. Puisque $\|f\|_\infty < 1$ on en déduit, d'après la question 2, la convergence de $\sum_{n\geq 0} f^n$ vers un élément g de $\mathcal{L}_c(E)$. De plus, pour tout $N \in \mathbb{N}^*$:

$$\sum_{n=0}^{N} f^n \circ (Id_E - f) = Id_E - f^{N+1}$$

$$(Id_E - f) \circ \sum_{n=0}^{N} f^n = Id_E - f^{N+1}.$$

En passant à la limite sur N on obtient $g \circ (Id_E - f) = (Id_E - f) \circ g = Id_E$ et $g = (Id_E - f)^{-1}$.

6. La série exponentielle est une série entière de rayon infini donc, d'après la question 2, $\exp(f)$ est bien définie pour tout $f \in \mathcal{L}_c(E)$. On fixe $N \in \mathbb{N}^*$:

$$\left\| \sum_{n=0}^{N} \frac{1}{n!} f^n \right\|_\infty \leq \sum_{n=0}^{N} \frac{1}{n!} \|f\|_\infty^n.$$

En faisant tendre N vers l'infini on obtient bien l'inégalité demandée.

7. Soit $x \in \mathbb{R}^+$. On a :
$$\left(1+\frac{x}{n}\right)^n = \exp\left(n\ln\left(1+\frac{x}{n}\right)\right),$$
et en effectuant un développement limité pour n grand on a :
$$\exp\left(n\ln\left(1+\frac{x}{n}\right)\right) = \exp\left(x+\mathcal{O}\left(\frac{1}{n^2}\right)\right).$$
Ainsi en faisant tendre n vers l'infini on a $g_n(x) \to e^x$. La limite simple de g_n est donc la fonction exponentielle définie sur $\mathbb{R}^+$. Montrons que la convergence n'est pas uniforme :
$$|g_n(n) - e^n| = |2^n - e^n| = e^n\left(1-\left(\frac{2}{e}\right)^n\right) \underset{n\to+\infty}{\to} +\infty.$$
La suite de fonctions g_n ne converge donc pas uniformément sur $\mathbb{R}^+$.

8. Soit $f \in \mathcal{L}_c(E)$, on a :
$$\begin{aligned}\exp(f) - \left(Id_E - \frac{f}{n}\right)^n &= \sum_{k=0}^{+\infty}\frac{1}{k!}f^k - \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\frac{1}{n^k}f^k\\ &= \sum_{k=0}^{n}\left(\frac{1}{k!}-\frac{1}{n^k}\binom{n}{k}\right)f^k + \sum_{k>n}\frac{1}{k!}f^k.\end{aligned} \tag{1}$$
Montrons à présent l'indication, soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $k \in [\![1,n]\!]$:
$$\frac{1}{n^k}\binom{n}{k} = \frac{n}{n}\frac{n-1}{n}\dots\frac{n-k+1}{n}\frac{1}{k!} \leq \frac{1}{k!}.$$
Ainsi en passant à la norme dans (1) :
$$\left\|\exp(f) - \left(Id_E - \frac{f}{n}\right)^n\right\|_\infty \leq \sum_{k=0}^{n}\left(\frac{1}{k!}-\frac{1}{n^k}\binom{n}{k}\right)\|f\|_\infty^k + \sum_{k>n}\frac{1}{k!}\|f\|_\infty^k = \exp(\|f\|_\infty) - \left(1+\frac{\|f\|_\infty}{n}\right)^n,$$
et on conclut en utilisant le résultat de convergence de la question précédente.

9. Soit g comme dans l'énoncé et $f \in \mathcal{L}_c(E)$. Pour $N \in \mathbb{N}^*$:
$$\sum_{n=0}^{N}\frac{1}{n!}(g^{-1}\circ f\circ g)^n = \sum_{n=0}^{N}\frac{1}{n!}g^{-1}\circ f^n\circ g = g^{-1}\circ\left(\sum_{n=0}^{N}\frac{1}{n!}f^n\right)\circ g.$$
Dans l'égalité précédente on a utilisé le fait que $(g^{-1}\circ f\circ g)^n = g^{-1}\circ f^n\circ g$ qui se démontre par récurrence immédiate. En faisant tendre N vers l'infini on obtient bien le résultat demandé.

10. Le sous espace vectoriel des polynômes en A, $P_A = \{P(A) \mid P \in \mathbb{C}[X]\}$, est de dimension fini. Il est donc complet et en particulier fermé. La suite B_n définie par :

$$B_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} A^k,$$

est une suite de P_A qui converge dans $\mathbb{M}_n(\mathbb{C})$ vers $\exp(A)$. Par fermeture de P_A on a donc $\exp(A)$ qui est un polynôme en A.

11. La matrice A est trigonalisable dans $\mathbb{C}$ (son polynôme caractéristique est scindé). Ainsi il existe une matrice triangulaire supérieure $T \in \mathbb{M}_n(\mathbb{C})$ et une matrice de passage $P \in GL_n(\mathbb{C})$ telles que : $A = PTP^{-1}$. D'après la question 8 on a : $\exp(A) = P\exp(T)P^{-1}$. Le déterminant étant invariant par conjugaison on a $\det(\exp(A)) = \det(\exp(T))$. De plus si on note $T = (t_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$:

$$\exp(T) = \begin{pmatrix} e^{t_{1,1}} & \star & \star & \star \\ 0 & e^{t_{2,2}} & \star & \star \\ \vdots & \ddots & \ddots & \star \\ 0 & \dots & 0 & e^{t_{n,n}} \end{pmatrix}.$$

Ainsi $\det(\exp(T)) = \prod_{i=1}^{n} e^{t_{i,i}} = \exp\left(\sum_{i=1}^{n} t_{i,i}\right) = e^{\mathrm{tr}(T)} = e^{\mathrm{tr}(A)}$ où l'on a utilisé l'invariance de la trace par conjugaison.