---

# Feuille 10 : Optimisation sous contraintes

---

**Exercice 1.** Maximiser la fonction $xyz$ sur la courbe obtenue par intersection de la sphère $\mathbb{S}^2 : x^2+y^2+z^2=1$ et du plan $x+y+z=1$.

**Correction :** On considère l'application de classe $C^1$ :

$$f : \begin{cases} \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R} \\ (x,y,z) \mapsto xyz. \end{cases}$$

On veut maximiser cette fonction sur l'ensemble $\mathcal{V} = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2+y^2+z^2 = 1 \text{ et } x+y+z=1\}$. Premièrement montrons que $\mathcal{V}$ est une sous variété. On considère l'application de classe $C^1$ :

$$g : \begin{cases} \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2 \\ (x,y,z) \mapsto (x^2+y^2+z^2-1, x+y+z-1). \end{cases}$$

On a bien $\mathcal{V} = g^{-1}(\{0\})$. Calculons la différentielle de $g$. Soit $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$ on a (en identifiant la différentielle et la matrice Jacobienne) :

$$Dg(x,y,z) = \begin{pmatrix} 2x & 2y & 2z \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Cette matrice est de rang strictement inférieur à 2 si et seulement si $x=y=z$. Soit $x \in \mathbb{R}$, on regarde si le point $(x,x,x)$ peut appartenir à $\mathcal{V}$. Le point $(x,x,x)$ est dans $\mathcal{V}$ si et seulement si :

$$\begin{cases} 3x^2 = 1 \\ 3x = 1. \end{cases}$$

Ce système n'a pas de solution. Ainsi en tout point $(x,y,z)$ de $\mathcal{V}$ la différentielle $Dg(x,y,z)$ est surjective et $\mathcal{V}$ est donc une sous variété de dimension 1.

La sous variété $\mathcal{V}$ est compacte (on est en dimension finie, $g^{-1}(\{0\})$ est fermé et borné car la sphere est bornée). Puisque la fonction $f$ est $\mathcal{C}^1$ elle est donc bornée sur $\mathcal{V}$ et elle atteint ses bornes. En particulier elle admet un maximum en un, ou plusieurs points de $\mathcal{V}$.

**Méthode 1 :** On peut remarquer la chose suivante. On a $f(1,0,0) = 0$ donc la question est : peut-on faire mieux ? Pour faire mieux il faut un triplet $(x,y,z)$ tel que $x,y,z > 0$ ou tel que deux coordonnées soient strictement négatives et une positive. On va voir que ces situations sont impossibles. L'équation de la sphère implique directement que $|x|, |y|, |z| < 1$. Si toutes les coordonnées sont strictement positives on a donc $x+y+z > x^2+y^2+z^2 = 1$ et le point ne peut pas appartenir à $\mathcal{V}$. Si deux coordonnées sont négatives (disons $(x,y)$) on a $z = 1-x-z > 1$ ce qui est aussi impossible. En conclusion le maximum de $f$ sur $\mathcal{V}$ est donné par 0 et est atteint en tout point de $\mathcal{V}$ avec une coordonnée nulle (par exemple en $(1,0,0)$.

**Méthode 2 :** La deuxième méthode est plus systématique (et nous donnera le minimum de $f$ sur $\mathcal{V}$ au passage). Pour chercher les points de $\mathcal{V}$ qui réalisent le maximum de la fonction $f$ on utilise le théorème des extremas liés. Si on note $(x,y,z)$ un point réalisant le maximum il s'agit en particulier d'un extremum local de $f_{|\mathcal{V}}$ et il existe $(\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2$ tels que :

$$Df(x,y,z) = \lambda_1 Dg_1(x,y,z) + \lambda_2 Dg_2(x,y,z),$$

où l'on a noté $g = (g_1, g_2)$. L'égalité précédente conduit au système :

$$\begin{cases} yz = 2\lambda_1 x + \lambda_2 \\ xz = 2\lambda_1 y + \lambda_2 \\ xy = 2\lambda_1 z + \lambda_2. \end{cases}$$

La résolution de ce système va nous donner tous les points critiques. Puisqu'on cherche le maximum on peut restreindre l'étude. Si une des trois coordonnées de $(x, y, z)$ vaut zéro on a $f(x, y, z) = 0$. On va donc exclure ce cas et voir si les autres points critiques font mieux que 0. D'autre part on sait déjà que les points $(x, x, x) \in \mathbb{R}^3$ ne sont pas dans $\mathcal{V}$. On suppose donc que $x \neq 0$, $y \neq 0$, $z \neq 0$ et $x \neq y$ (les autres cas seront obtenus par symétrie). En effectuant $L_1 - L_2$ dans le système précédent on obtient :

$$z(y - x) = 2\lambda_1(x - y),$$

qui se simplifie en $z = -2\lambda_1$. Maintenant si on suppose que $y \neq z$ on obtient (en simplifiant $L_3 - L_2$) $x = -2\lambda_1$. On obtient donc une solution de la forme $(x, y, x)$ avec $x \neq y$. Si $y = z$ on a une solution de la forme $(x, y, y)$ avec $x \neq y$. Toujours par symétrie on se restreint à la deuxième option. Le point $(x, y, y)$ est dans $\mathcal{V}$ si et seulement si :

$$\begin{cases} x^2 = 1 - 2y^2 \\ x = 1 - 2y. \end{cases}$$

En élevant la deuxième équation au carré et en regroupant on trouve :

$$-4y + 6y^2 = 0.$$

Puisqu'on a supposé que $y \neq 0$ on obtient donc $y = 2/3$. Enfin en utilisant la relation $x + y + y = 1$ on trouve $x = -1/3$. Par symétrie les points critiques (à coordonnées non nulles) de $f$ sur $\mathcal{V}$ sont donc $(2/3, 2/3, -1/3), (2/3, -1/3, 2/3), (-1/3, 2/3, 2/3)$. Dans tout les cas on vérifie que $f(x, y, z) = -4/27$ qui n'est donc pas le maximum puisque $f(1, 0, 0) = 0$. Même conclusion que pour la méthode 1. Au passage on remarque que l'on a obtenu le minimum de $f$ sur $\mathcal{V}$ qui est donc $-4/27$.

**Exercice 2** (Un peu de microéconomie (mais pas trop quand même))**.**

La théorie microéconomique du consommateur suppose qu'un agent avec un budget $b > 0$, étant donnés des prix (strictement positifs) $p_1, ..., p_n$ des différents biens de consommation, choisit son panier de consommation en résolvant

$$\sup \left\{ U(c_1, ..., c_n) : c_i \geq 0 \text{ et } \textstyle\sum_{i=1}^n p_i c_i = b \right\}, \tag{1}$$

avec $U$ sa fonction d'utilité. Résoudre rigoureusement (cette fois-ci ...!) le problème lorsque $U$ est ...

1. une fonction de Cobb-Douglas :
$$U(c_1, ..., c_n) = c_1^{\alpha_1} ... c_n^{\alpha_n}$$
avec $\alpha_i \geq 0$ et $\sum \alpha_i \leq 1$.
2. $$U(c_1, ..., c_n) = \sum_{i=1}^n \alpha_i c_i^{\beta_i}$$
avec $\alpha_i > 0$ et $\beta_i$ dans $]0, 1[$, pour $i = 1, ..., n$.
3. $$U(c_1, ..., c_n) = \left( \sum_{i=1}^n c_i^\rho \right)^{1/\rho}$$
avec $\rho \in ]0, 1[$.

**Correction :** On va s'intéresser au premier cas. L'espace $F = \{(c_1, \cdots, c_n) \in \mathbb{R}^n \mid \sum_{i=1}^n p_i c_i = b\}$ est un hyperplan affine de $\mathbb{R}^n$. Il s'agit donc d'une sous variété de dimension $n-1$. Lorsque l'on regarde l'intersection de cet espace avec $(\mathbb{R}^+)^n$ on doit faire attention à ce qui se passe au "bord". Si on note $\mathcal{V} = F \cap (\mathbb{R}^+)^n$ cet espace est une sous variété en tout point $(c_1, \cdots, c_n) \in F$ de coordonnées strictement positives. Si l'un des $c_i$ est nul $\mathcal{V}$ n'est pas une sous variété en ce point. On va donc devoir considérer ces points à part dans l'analyse (en pratique on va rapidement les éliminer avec des arguments d'optimisation). Traduit en mathématiques l'énoncé nous demande de maximiser la fonction $U(c_1, \cdots, c_n) = c_1^{\alpha_1} \cdots c_n^{\alpha_n}$ sur $\mathcal{V}$. L'espace $\mathcal{V}$ est compact (on montre facilement qu'il est fermé et borné en dimension finie). La fonction $U$ étant continue on a donc un maximum sur $\mathcal{V}$. On remarque que si l'un des $c_i$ est nul on a $U(c_1, \cdots, c_n) = 0$. On va donc chercher les extremums en dehors de ces points et voir si on fait mieux. L'espace $F$ est donné par $g^{-1}(\{0\})$ avec $g$ la fonction $C^1$ définie par :

$$g : \begin{cases} \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \\ (c_1, \cdots, c_n) \mapsto \displaystyle\sum_{i=1}^n p_i c_i - b. \end{cases}$$

Le plan tangent en un point $(c_1, \cdots, c_n)$ de $\mathcal{V}$ de coordonnées strictement positives est égal au plan tangent de $F$ en ce point. D'après le théorème des extremas liés, si $(c_1, \cdots, c_n)$ est un extremum de $U$ sur $\mathcal{V}$ (avec des coordonnées strictement positives) il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que :

$$DU(c_1, \cdots, c_n) = \lambda Dg(c_1, \cdots, c_n).$$

L'égalité précédente se réécrit :

$$\begin{cases} \alpha_1 c_1^{\alpha_1 - 1} c_2^{\alpha_2} \cdots c_n^{\alpha_n} = \lambda p_1, \\ \vdots \\ \alpha_n c_1^{\alpha_1} c_2^{\alpha_2} \cdots c_n^{\alpha_n - 1} = \lambda p_n. \end{cases}$$

En multipliant la ligne $L_i$ par $c_i$ et en notant $C = U(c_1, \cdots, c_n)$ on obtient :

$$\begin{cases} \alpha_1 C = \lambda p_1 c_1, \\ \vdots \\ \alpha_n C = \lambda p_n c_n. \end{cases}$$

On se rappelle ensuite que le point $(c_1, \cdots, c_n)$ doit être dans $\mathcal{V}$. En particulier, en ajoutant toutes les lignes on a :

$$C \sum_{i=1}^n \alpha_i = \lambda \sum_{i=1}^n p_i c_i = \lambda b,$$

et $\lambda = \dfrac{C \sum_{i=1}^n \alpha_i}{b}$. On remplace $\lambda$ dans le système précédent pour trouver :

$$c_i = \frac{\alpha_i b}{p_i \sum_{j=1}^n \alpha_j}.$$

Finalement en notant $\alpha = \sum_{j=1}^n \alpha_i$ :

$$U(c_1, \cdots, c_n) = \frac{b^\alpha \alpha_1^{\alpha_1} \cdots \alpha_n^{\alpha_n}}{\alpha^\alpha p_1^{\alpha_1} \cdots p_n^{\alpha_n}}.$$

Grâce à notre argument de compacité initial on sait que $U$ admet un maximum sur $\mathcal{V}$. Ce maximum ne se trouve pas au bord de $\mathcal{V}$ car la quantité précédente est strictement positive. Il y a un unique point critique de $U$ à "l'intérieur" de $\mathcal{V}$ et $U$ est strictement positive en ce point, c'est donc le maximum.