La méthode du Lagrangien

Jean-Jérôme Casanova

Le but de ce document est de décrire la méthode du Lagrangien pour chercher et étudier les extremums d'une fonction sous contraintes. Soit $f, g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ deux fonctions régulières. On cherche les extremums de $f(x,y)$ sous la contrainte $g(x,y) = 0$. On considère la fonction

$$\mathcal{L}(x,y,\lambda) = f(x,y) - \lambda g(x,y).$$

Cette application est appelée le Lagrangien du problème d'optimisation et va nous permettre de trouver et d'étudier les extremum de $f(x,y)$ sous la contrainte $g(x,y) = 0$. On procède comme suit:

1. On cherche les points critiques du Lagrangien i.e. on résout:

$$\begin{aligned} &\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x}(x,y,\lambda) = 0 \\ &\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial y}(x,y,\lambda) = 0 \\ &\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda}(x,y,\lambda) = 0 \quad (\Leftrightarrow g(x,y) = 0) \end{aligned} \tag{0.1}$$

2. Notons (x^*, y^*, λ^*) un point critique du Lagrangien, on cherche ensuite à déterminer si il s'agit d'un minimum ou d'un maximum local (ou d'aucun des deux). Pour cela on va utiliser des conditions d'ordre 2 dite "faibles". On calcul

$$r = \frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial^2 x}(x^*, y^*, \lambda^*), \quad t = \frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial^2 y}(x^*, y^*, \lambda^*), \quad s = \frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial x \partial y}(x^*, y^*, \lambda^*).$$

   La matrice Hessienne de $\mathcal{L}$ au point (x^*, y^*, λ^*) est donnée par

$$H = \begin{pmatrix} r & s \\ s & t \end{pmatrix}.$$

   La nature du point (x^*, y^*, λ^*) dépend du signe des valeurs propres de H. On a trois cas :

   - Si $\det H > 0$ et $\mathrm{Tr} H > 0$ les valeurs propres de H sont positives et (x^*, y^*) est un minimum local de $f(x,y)$ sous la contrainte $g(x,y) = 0$.

- Si $\det H > 0$ et $\mathrm{Tr} H < 0$ les valeurs propres de H sont négative et (x^*, y^*) est un maximum local de $f(x, y)$ sous la contrainte $g(x, y) = 0$.
- Si $\det H < 0$ les valeurs propres sont de signes distincts et on ne peut pas conclure (pour l'instant).

3. On s'intéresse au cas $\det H < 0$. Contrairement au cas sans contraintes ou on obtient un point selle (qui n'est donc ni minimum ni maximum local) ici on doit poursuivre l'étude. On va regarder la positivité du terme quadratique $U^T H U$ lorsque U est dans le plan tangent de la sous variétés $C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid g(x, y) = 0\}$ au point (x^*, y^*). On commence par calculer les vecteurs du plan tangent:

$$U^T = (u, v) \in T_{(x^*,y^*)}C \Leftrightarrow \partial_x g(x^*, y^*)u + \partial_y g(x^*, y^*)v = 0.$$

   On calcul ensuite $U^T H U$ et on a les possibilités suivantes:

   - Si $U^T H U > 0$ on a un minimum local.
   - Si $U^T H U < 0$ on a un maximum local.
   - Si $U^T H U = 0$ on ne peut pas conclure.

Remarque 1. La recherche des points critiques via le Lagrangien est une réécriture du théorème des extrema liés. Les deux premières équations reviennent à chercher λ tel que $Df(x, y) = \lambda Dg(x, y)$ et la dernière traduit simplement le fait que (x, y) doit vérifier la contrainte $g(x, y) = 0$.

Remarque 2. Dans le cas plus général $n > 2$ et sous plusieurs contraintes $g_i(x) = 0$ avec $1 \leq i \leq p < n$ on pose

$$\mathcal{L}(x, \lambda_1, \ldots, \lambda_p) = f(x) - \sum_{i=1}^{p} \lambda_i g_i(x),$$

et on procède comme précédemment pour les points critiques (en regardant les dérivées du Lagrangien par rapport à toute ses variables). Pour étudier ces points critiques on passe directement à l'étape 3 de la méthode précédente. A noter que dans le cas de contraintes multiples il faut premièrement vérifier que ces contraintes décrivent un objet lisse en montrant que l'ensemble $\{x \in \mathbb{R}^n \mid g_i(x) = 0,\ 1 \leq i \leq p\}$ est bien une sous variété.