# Compléments sur les espaces préhilbertiens

Jean-Jérôme Casanova

## 1 Isométries

On se place dans un espace prehilbertien $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$.

**Définition 1.** On dit que $f \in \mathcal{L}(E)$ est une isométrie si

$$\forall x \in E, \quad \|f(x)\| = \|x\|.$$

**Proposition 2.** *Une application $f \in \mathcal{L}(E)$ est une isométrie si et seulement si*

$$\forall (x, y) \in E^2, \quad \langle f(x), f(y) \rangle = \langle x, y \rangle.$$

*Remarque* 3. Une isométrie est toujours injective. En dimension finie elle est bijective.

**Proposition 4.** *On suppose que $E$ est euclidien (i.e. de dimension finie). Une application $f$ est une isométrie si et seulement si l'image d'une base orthonormale de $E$ par $f$ est une base orthonormale de $E$.*

*Remarque* 5. (Conséquence sur les représentations matricielles). Soient $B = (e_1, \ldots, e_n)$ une base orthonormale de $E$, $f$ une isométrie et $A = \mathrm{Mat}_B(f)$. On note $C_i$ les colonnes de $A$ qui représentent les coordonnées des vecteurs $f(e_i)$ dans la base $B$. On a

$$\langle f(e_i), f(e_j) \rangle = \delta_{i,j} = C_i^T C_j.$$

On déduit directement de l'identité précédente la relation $A^T A = Id$. Une matrice vérifiant cette relation est appelée une matrice orthogonale et $f$ est une isométrie si et seulement si sa matrice dans une base orthonormale est une matrice orthogonale. On voit au passage que $\det(A) \in \{-1, +1\}$. On parle d'isométries directes (déterminant égale à 1) ou indirectes (déterminant égale à $-1$).

**Exemple 6.** Dans $\mathbb{R}^2$ la rotation d'angle $\theta$ est :

$$A = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix},$$

est une matrice orthogonale/une isométrie. On peut montrer (bon exercice) que toute les isométries directes de $\mathbb{R}^2$ s'écrivent, dans une base orthonormale $B$, sous la forme matricielle précédente.

## 2 Endomorphismes adjoints

**Définition 7.** Soit $f, g \in \mathcal{L}(E)$. On dit que $f$ et $g$ sont adjoints si

$$\forall (x,y) \in E^2, \quad \langle f(x), y \rangle = \langle x, g(y) \rangle.$$

*Remarque* 8. En dimension infinie on a pas toujours l'existence d'un adjoint. C'est le cas en dimension finie. Supposons que $E$ soit un espace euclidien muni d'une base orthonormée $B = (e_1, \ldots, e_n)$. Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ et $A = \mathrm{Mat}_B(f)$. Alors, en notant $X$ le vecteur colonne des coordonnées d'un vecteur $x$ dans la base $B$ :

$$\forall (x,y) \in E^2, \quad \langle f(x), y \rangle = (AX)^T Y = X^T (A^T Y) = \langle x, g(y) \rangle,$$

ou $g \in \mathcal{L}(E)$ est l'endomorphisme associé à la matrice $A^T$ dans la base $B$. On notera par la suite $f^*$ l'adjoint de $f$.

On dit qu'un endomorphisme $f$ de $E$ est auto-adjoint si $f^* = f$. Dans ce cas sa matrice dans une base orthonormée vérifie $A^T = A$ i.e. est une matrice symétrique.

**Théorème 9.** *Soit $E$ un espace euclidien et $f \in \mathcal{L}(E)$ un endomorphisme auto-adjoint. Alors il existe une base orthonormée de vecteurs propres pour $f$. De plus les valeurs propres de $f$ sont réelles.*

**Corollaire 10.** *Soit $A$ une matrice symétrique réelle. Alors $A$ est diagonalisable dans une base orthonormée. Plus précisément il existe une matrice orthogonale $P$ et une matrice diagonale $D$ (toute deux à coefficients réels) telles que :*

$$A = PDP^T = PDP^{-1}.$$

*Démonstration.* On munit $\mathbb{R}^n$ de sa base canonique et du produit scalaire usuel $\langle X, Y \rangle = X^T Y = \sum_{i=1}^n x_i y_i$ (on remarque au passage que la base canonique est une base orthonormée pour ce produit scalaire). Soit $f$ l'endomorphisme associé à $A$ dans la base $B$. Puisque $A$ est symétrique $f$ est auto-adjoint. D'après le théorème précédent il existe une base $B'$ orthonormée telle que $D = \mathrm{Mat}_{B'}(f)$ soit une matrice diagonale. Si on note $P = \mathrm{Mat}_{B',B}(Id)$ la matrice de passage de $B$ à $B'$ on a :

$$A = PDP^{-1}.$$

Finalement puisque $P$ est la matrice de passage d'une base orthonormale à une autre il s'agit d'une matrice orthogonale donc $P^T = P^{-1}$. □