

Notions Fondamentales L1–L2

Feuille d'exercices n° 3 (2021) — Éléments de correction.

3 Algèbre linéaire et un peu plus

3.1 Espaces vectoriels, applications linéaires, matrices

Exercice 1. 1. On fait le sens réciproque par contraposée. S'il existe une famille génératrice finie, par le théorème de la base incomplète on peut en extraire une base comprenant n éléments. Donc toute famille libre a moins de n éléments, donc il n'existe pas de famille libre infinie.

Pour le sens direct, s'il n'existe pas de famille génératrice finie, on veut montrer qu'il existe une famille libre infinie. Construisons par récurrence une famille (e_1, \dots, e_n) qui soit libre. Comme (0) n'est pas génératrice il existe un vecteur non nul e_1 . Ensuite si on suppose que la famille est construite au rang n , alors comme la famille (e_1, \dots, e_n) n'est pas génératrice, il existe $e_{n+1} \notin \text{Vect}(e_1, \dots, e_n)$. On en déduit que (e_1, \dots, e_n) est libre. En effet, s'il existe $\lambda_1, \dots, \lambda_{n+1}$ tels que $\lambda_1 e_1 + \dots + \lambda_{n+1} e_{n+1} = 0$, alors $\lambda_{n+1} = 0$, sinon on peut écrire $e_{n+1} = -\frac{1}{\lambda_{n+1}} \sum_{i=1}^n \lambda_i e_i$, puis par liberté de (e_1, \dots, e_n) les autres λ_i sont nuls. On a donc construit une suite $(e_i)_{i \in \mathbb{N}}$ (pour qui aime la subtilité, ici on a utilisé l'axiome du choix de façon cachée) telle que toute sous-famille est libre, donc la famille infinie est libre.

2. On montre que c'est un sous-espace vectoriel de l'ensemble des suites réelles. Si u et v sont constantes à partir d'un certain indice, alors en prenant le plus grand des deux indices, $\lambda u + \mu v$ est constante à partir de cet indice. Et la suite nulle est bien constante à partir d'un certain rang.

Base de E : on note $c = (1, 1, \dots)$ (suite infinie constante), et $e_i = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots)$ (suite nulle sauf à l'indice i).

Alors $B = (c, e_0, e_1, \dots)$ est une base de E . En effet, elle est libre : si $u = \mu c + \sum_{i \in I} \lambda_i e_i = 0$ où I est un sous ensemble fini de \mathbb{N} , en prenant $n \notin I$, on obtient que $u_n = 0 = \mu$, puis pour tout $i \in I$, on a $u_i = \lambda_i + \mu = 0$, donc tous les coefficients μ, λ_i sont nuls.

Pour montrer qu'elle est génératrice, si $u \in E$ et u est constante à partir de l'indice n_0 , alors on a bien $u = u_{n_0} c + \sum_{i=0}^{n_0-1} (u_i - u_{n_0}) e_i$.

Exercice 2. 1. La somme de deux fonctions continue est continue, la multiplication d'une fonction continue par un réel est une fonction continue, la fonction constante 0 est une fonction continue.

2. On note e_λ la fonction $x \mapsto e^{\lambda x}$. Par l'absurde, si $a_1 e_{\lambda_1} + \dots + a_n e_{\lambda_n}$ est la fonction constante nulle, avec $n \in \mathbb{N}$, $\lambda_1 < \lambda_2 < \dots < \lambda_n$, et les a_i non tous nuls (quitte à supprimer ceux qui sont nuls, on peut considérer que $a_n \neq 0$). Alors on a donc $\sum_{i=1}^n a_i e^{\lambda_i x} = 0$, ce qui donne en multipliant par $e^{-\lambda_n x}$ que $a_n + \sum_{i=1}^{n-1} a_i e^{(\lambda_i - \lambda_n)x} = 0$. En passant à la limite $x \rightarrow \infty$, on obtient que $a_n = 0$, ce qui est une contradiction.

3. On a donc une famille $(e_\lambda)_{\lambda \in \mathbb{R}}$ infinie (puisque les éléments sont distincts deux à deux) et libre. Donc l'espace ne peut pas être de dimension finie.

Exercice 3. En posant $\psi : \begin{matrix} F_1 \times F_2 \times \dots \times F_k & \rightarrow & E^{k-1} \\ (x_1, x_2, \dots, x_k) & \mapsto & (x_2 - x_1, x_3 - x_2, \dots, x_k - x_{k-1}) \end{matrix}$, on obtient une application linéaire entre un espace de départ de dimension $\sum_{i=1}^n d_i$ et un autre (d'arrivée) de dimension $n(k-1)$ (strictement plus petite). Donc l'application ne peut pas être injective. Il existe donc $(x_1, \dots, x_k) \in \ker(\psi)$, avec $x_i \in F_i$. Mais alors on a $x_1 = x_2 = \dots = x_k$, autrement dit x_1 appartient à tous les F_i .

En fait on pouvait aussi voir que $F = \bigcap_{i=1}^n F_i$ est isomorphe au noyau de l'application linéaire ψ . En effet $\psi(x_1, \dots, x_k) = 0$ si et seulement si $(x_1, \dots, x_k) = (x, \dots, x)$ avec $x \in F$. Donc $x \mapsto (x, \dots, x)$ est une linéaire de F sur $\ker \psi$. Et le théorème du rang donne que $\dim F = \dim \ker(\psi) > 0$.

Exercice 4. Union de sous-espaces vectoriels.

1. Montrons que la condition nécessaire et suffisante est $F \subset G$ ou $G \subset F$. C'est évidemment une condition suffisante, puisqu'alors $F \cup G = G$ ou $F \cup G = F$ qui est bien un espace vectoriel.

Si $F \cup G$ est un espace vectoriel. Par l'absurde si on suppose qu'aucune des deux inclusions n'est vraie, on a donc un $x \in F$ et un $y \in G$ tel que $x \notin G$ et $y \notin F$. Mais alors x et y sont dans $F \cup G$ et donc $x + y \in F \cup G$. Si $x + y \in G$, alors $x = x + y - y$ est aussi dans G ce qui est une contradiction, et de même si $x + y \in F$, on a $y = x + y - x \in F$ ce qui est aussi une contradiction.

2. On va en fait montrer la proposition suivante qui est équivalente : « Si E est un espace vectoriel, on ne peut pas avoir $E = \bigcup_{i=1}^n E_i$, où les E_i sont des sous-espaces vectoriels stricts de E ».

On procède par récurrence sur n . Pour $n = 1$ c'est évident. Supposons que c'est vrai au rang $n - 1$, pour $n \geq 2$. Supposons que $E = \bigcup_{i=1}^n E_i$, où les E_i sont des sous-espaces vectoriels stricts de E . On ne peut pas avoir $E_n \subset \bigcup_{i=1}^{n-1} E_i$ sinon ce dernier ensemble serait égal à E , ce qui est faux par hypothèse de récurrence.

Soit donc $x \in E_n$ qui ne soit dans aucun des E_i pour $i < n$. Et comme E_n est un sous espace strict, il existe un élément $y \in E$ qui n'est pas dans E_n , donc qui est dans un E_k , avec $k < n$. On considère maintenant les éléments $y + \lambda x$, pour $\lambda \in \mathbb{K}$. Ces éléments sont tous différents (puisque x est non nul), et sont dans un des E_i pour $i < n$ (ils ne peuvent pas être dans E_n sinon y y serait aussi). Et comme il y en a au moins n , on en choisit deux qui sont dans le même : $y + \lambda_1 x \in E_j$ et $y + \lambda_2 x \in E_j$, avec $j < n$ et $\lambda_1 \neq \lambda_2$. On fait la différence et on multiplie par l'inverse de $\lambda_1 - \lambda_2$, pour obtenir $x \in E_j$ ce qui nous donne la contradiction.

3. On choisit un espace vectoriel $F \subset E$ de dimension maximale parmi ceux tels que $E_i \cap F = 0$ pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$ (il en existe, comme le singleton 0). Montrons qu'un tel espace convient. Soit d la dimension commune des E_i . Il suffit donc de montrer que $\dim F = \dim E - d$.

Si on a $\dim F < \dim E - d$, alors les $F_i = E_i \oplus F$ sont des sous-espaces stricts de E , donc il existe un élément x de E qui n'appartient à aucun d'entre eux. Mais alors on pose $\tilde{F} = \text{Vect}(F, x)$ qui est de dimension strictement plus grande que F et qui vérifie $E_i \cap \tilde{F} = 0$ pour $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, ce qui contredit la définition de F .

4. (a) On a par exemple $\mathbb{R}[X] = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \mathbb{R}_n[X]$, et aucun des sous-espaces n'est égal à $\mathbb{R}[X]$. Ou plus simplement dans tous les cas $E = \bigcup_{x \in E} \text{Vect}(x)$ lorsque E n'est pas de dimension 1 (mais ici l'union n'est pas dénombrable...).

(b) On remarque que la démonstration de la question 2 est valable si \mathbb{K} est fini tant que son cardinal q est supérieur ou égal à n . Montrons que dans tous les cas on peut recouvrir E par $q + 1$ sous-espaces stricts (sauf si E est de dimension 0 ou 1).

En effet on prend deux éléments x et y formant une famille libre, et on prend F un supplémentaire de $\text{Vect}(x, y)$. On écrit $\mathbb{K} = \lambda_1, \dots, \lambda_q$. Et on pose $E_0 = \text{Vect}(x, F)$ et $E_i = \text{Vect}(y + \lambda_i x, F)$ pour $i \in \llbracket 1, q \rrbracket$. Ce sont tous des sous-espaces stricts de E et ils recouvrent E . En effet si $z = \alpha x + \beta y + f$, avec $f \in F$, alors $z \in E_0$ si $\beta = 0$ et sinon $z = \beta(y + \lambda_i x) + f \in E_i$, où $\lambda_i = \alpha \cdot \beta^{-1}$.

Par exemple dans le cas simple où $\mathbb{K} = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} = \{\bar{0}, \bar{1}\}$ avec $\bar{1} + \bar{1} = \bar{0}$ (et toutes les autres opérations dans \mathbb{K} sont les mêmes que dans \mathbb{R} pour 0 et 1), on peut vérifier que \mathbb{K} est bien un corps. Et que par exemple dans \mathbb{K}^2 (qui est un espace vectoriel de dimension 2 sur \mathbb{K}), en écrivant $e_1 = (\bar{0}, \bar{1})$, $e_2 = (\bar{1}, \bar{0})$ et $e_3 = (\bar{1}, \bar{1}) = e_1 + e_2$, on obtient que $\mathbb{K}^2 = \bigcup_{i=1}^3 \text{Vect}(e_i)$.

Pour la question 3. On remarque que cette démonstration est valable dans le cas où \mathbb{K} est fini de cardinal $q \geq n$, d'après la remarque de la question précédente. Ici en prenant le même exemple que précédemment, avec $n = 3$, on a bien que si on a un supplémentaire F commun aux $\text{Vect}(e_i)$ pour $i = 1, 2$ et 3, alors tout élément de F non nul est différent de e_1, e_2 et e_3 , ce qui n'est pas possible car \mathbb{K}^2 contient exactement ces trois éléments en plus de l'élément nul. Donc F serait réduit à $\{0_{\mathbb{K}^2}\}$ mais alors ce ne serait pas un supplémentaire de $\text{Vect}(e_i)$.

Exercice 5. 1. On a en notant e_1 et e_2 les vecteurs de la base canonique, $Ae_1 = \binom{1}{2}$ et $Ae_2 = \binom{2}{-1} = 2Ae_1$. On en déduit directement que $2e_1 - e_2 = \binom{2}{-1}$ est dans le noyau de A . Et comme A n'est pas la matrice nulle, son noyau n'est pas \mathbb{R}^2 , donc $\ker A = \text{Vect}(2e_1 - e_2)$. Déterminons maintenant le noyau de f . Si $M \in \ker f$, cela signifie que $AM = 0$, ce qui équivaut à $AMe_1 = 0$ et $AMe_2 = 0$. Autrement dit cela équivaut à ce que Me_1 et Me_2 soient dans $\ker A$. M s'écrit donc avec deux colonnes de la forme $\lambda(2e_1 - e_2)$ et $\mu(2e_1 - e_2)$. C'est à dire que $M = \begin{pmatrix} 2\lambda & 2\mu \\ -\lambda & -\mu \end{pmatrix}$. Réciproquement on vérifie bien qu'un tel M satisfait $AM = 0$.

Les deux matrices $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ forment donc une base de $\ker f$.

- Par le théorème du rang, comme $M_2(\mathbb{R})$ est de dimension 4, l'image de f est de dimension 2, donc f n'est pas surjectif.
- On connaît la dimension, il suffit donc de trouver deux éléments non colinéaires dans l'image. On prend $M = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, ce qui donne $AM = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \in \text{Im}(f)$, puis $M = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, ce qui donne $AM = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} \in \text{Im}(f)$.

Les deux matrices $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$ (non colinéaires) forment donc une base de $\text{Im}(f)$.

Exercice 6. On définit :

$$f : \mathbb{R}[X] \longrightarrow \mathbb{R}[X] \quad \text{et} \quad g : \mathbb{R}[X] \longrightarrow \mathbb{R}[X]$$

$$P \longmapsto P' \quad \quad \quad P \longmapsto XP$$

- La dérivation des polynômes est linéaire : $(\lambda P + \mu Q)' = \lambda P' + \mu Q'$, le fait de multiplier par un polynôme fixé aussi : $X(\lambda P + \mu Q) = \lambda XP + \mu XQ$.
- L'endomorphisme f est surjectif (on sait prendre une primitive d'un polynôme) mais pas injective (deux polynômes différents d'une constante ont la même dérivée). L'endomorphisme g est injectif (si $XP = XQ$, alors $P = Q$) mais pas surjectif (le polynôme constant 1 n'est pas de la forme XP , pour une raison de degré).
- En dimension finie, l'injectivité et la surjectivité sont équivalentes, par le théorème du rang.

Exercice 7. Soit E un espace vectoriel, sur \mathbb{R} ou \mathbb{C} . Soient f et g deux endomorphismes de E , tels que $f \circ g = Id_E$.

- Si $f(x) = 0$ alors $g(f(x)) = 0$. Pour l'autre inclusion, si $g(f(x)) = 0$, alors en appliquant f on obtient $f(g(f(x))) = 0$ mais comme $f \circ g = Id_E$, on obtient donc $0 = f(g(f(x))) = f(x)$. Ici on n'a pas vraiment utilisé la linéarité de f et g , simplement le fait que $g(0) = 0$.
- On a que si $y = g(f(x))$, alors $y \in \text{Im}(g)$. Pour l'autre inclusion, si $y = g(x)$, on applique f , et on obtient que $f(y) = f(g(x)) = x$, puis en appliquant g , que $g(f(y)) = g(x) = y$, donc $y \in \text{Im}(g)$. Remarquer qu'ici on n'a jamais supposé que f ou g était linéaire, cette égalité est vraie pour des ensembles E et F en général.
- Si $f(x) = 0$ et que $x = g(y)$, alors $f(x) = f(g(y)) = y$, donc $y = 0$, puis $x = 0$. Ceci montre que la somme est directe. Pour montrer que la somme vaut bien E , on écrit que $x = g(f(x)) + x - g(f(x))$, et on montre que $x - g(f(x))$ est dans le noyau de f , puisque $g(f(x))$ est dans l'image de g . On calcule donc $f(x - g(f(x))) = f(x) - f(g(f(x))) = f(x) - f(x) = 0$, ce qui termine la démonstration.

Exercice 8. On va d'abord regarder $f(0)$ et $f(I_n)$. On a $f(0) = f(0)^2$. Comme on est dans un corps \mathbb{K} , $f(0) \in \{0, 1\}$. Si $f(0) = 1$, alors pour toute matrice A , $f(A) = f(A)f(0) = f(0) = 1$, ce qui contredit le fait que f n'est pas constante. Donc $f(0) = 0$. On montre de même que $f(I_n) = 1$.

Soit $A \in GL_n(\mathbb{K})$. Alors $1 = f(I_n) = f(A)f(A^{-1})$. D'où $f(A) \neq 0$.

On remarque que, si A et B sont équivalentes, $f(A) = 0 \Leftrightarrow f(B) = 0$. De plus, on voit que, si M est nilpotente (c'est à dire s'il existe un k tel que $M^k = 0$), alors $f(M) = 0$.

Soit A non inversible. Alors $r = \text{rg } A < n$. Comme $K_r = \begin{pmatrix} 0 & I_r \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ est de rang r , elle est équivalente à A . Or K_r est nilpotente. On a donc $f(K_r) = 0$. D'où $f(A) = 0$.

Exercice 9. 1. Si $f^p(x) = 0$, alors $f^{p+1}(x) = 0$, donc $N_p \subset N_{p+1}$. De même si $y = f^{p+1}(x)$ alors $y = f^p(f(x)) \in I_p$ donc $I_{p+1} \subset I_p$.

- L'idée est de construire un supplémentaire de N_p dans N_{p+1} , que l'on note D_p , de telle sorte que $d_p = \dim D_p$. On montre ensuite que $f^p(D_p) = \ker f \cap \text{Im } f^p = N_1 \cap I_p$. On peut alors montrer que l'application f^p restreinte au départ à D_p et à l'arrivée à $f^p(D_p)$ est un isomorphisme. On en conclut que $d_p = \dim(N_1 \cap I_p)$. Comme la suite $N_1 \cap I_p$ est décroissante pour l'inclusion, on obtient bien que (d_p) est décroissante. On obtient donc que la suite (d_p) est décroissante.

Exercice 10. 1. Il est complet, car en dimension finie toutes les normes sont équivalentes, et \mathbb{R}^n est complet. Donc si $\|\cdot\|$ est la norme sur E et que (e_1, \dots, e_n) est une base de F , alors $(x_1, \dots, x_n) \mapsto \|\sum_{i=1}^n x_i e_i\|$ est une norme sur \mathbb{R}^n , qui est donc complet pour cette norme (toutes sont équivalentes). On a donc

que si une suite est de Cauchy dans F , alors toutes ses coordonnées dans la base sont de Cauchy, donc convergent (dans \mathbb{R}), et cela est équivalent au fait que la suite des éléments (vus dans \mathbb{R}^n) converge, puis que la suite converge dans F . Comme un complet est fermé, cela termine la preuve.

2. Si la borne inférieure était 0, on aurait une suite y_n d'éléments de F convergeant vers x , qui lui n'est pas dans F , contredisant le fait que F est fermé.

Comme $d(x, F)$ est une borne inférieure, on sait que pour tout $\varepsilon > 0$, $d(x, F) + \varepsilon$ n'est pas un minorant. On prend $\varepsilon = d(x, F) > 0$, donc $2d(x, F)$ n'est pas un minorant, donc il existe $y_0 \in F$ tel que $\|x - y_0\| \leq 2d(x, F)$. Et comme $\|x - y\| \geq d(x, F)$ pour tout $y \in F$, on obtient bien $\|x - y_0\| \leq 2\|x - y\|$ (*remarque* : on peut en fait montrer que la borne inférieure est atteinte si F est fermé, et ainsi se passer du facteur 2).

On a bien $\|u\| = 1$, puis $u = \alpha x + y_0$ avec $y_0 \in F$ et $\alpha = \frac{1}{\|x - y_0\|} \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ donc $u \in \text{Vect}(F \cup \{x\})$, tout élément de la forme $\beta x + y$ s'écrit $\frac{\beta}{\alpha}u + (y - \frac{\beta}{\alpha}y_0) \in \text{Vect}(F \cup \{x\})$. Enfin si $y \in F$, alors $\|u - y\| = \|\alpha x + y_0 - y\| = \alpha \left\| x - \frac{1}{\alpha}(y_0 - y) \right\| \geq \frac{1}{2}\alpha \|x - y_0\| = \frac{1}{2}$ car $\frac{1}{\alpha}(y_0 - y) \in F$.

3. On prend $F = \text{Vect}(u_1, \dots, u_n)$ pour construire par récurrence u_{n+1} comme précédemment (si on aime les subtilités, on utilise ici l'axiome du choix).

(a) On a la suite (u_n) qui est bien dans la boule unité fermée. Mais si une extraction $(u_{\varphi(n)})$ convergeait, on aurait $\|u_{\varphi(n+1)} - u_{\varphi(n)}\|$ qui convergerait vers 0, or cette distance est toujours supérieure à $\frac{1}{2}$.

(b) On fait plein d'inégalités triangulaires pour obtenir les résultats demandés. L'inégalité donnée permet de dire que v_n ne peut pas converger dans $\text{Vect}(u_{i \in \mathbb{N}})$ (se rappeler que ceci désigne les combinaisons linéaires finies).

Si on reprend la construction précédente, en prenant à chaque fois $x = e_{n+1}$ dans la construction de la suite (u_i) à l'étape n , on obtient que $\text{Vect}(u_{i \in [0, n]}) = \text{Vect}(e_{i \in [0, n]})$. Donc si $(e_i)_{i \in \mathbb{N}}$ est une base de E , alors $(u_i)_{i \in \mathbb{N}}$ aussi est une base de E . Comme la suite ne converge pas dans $\text{Vect}(u_{i \in \mathbb{N}})$, c'est qu'elle ne converge pas dans E .

3.2 Polynômes et fractions rationnelles

Exercice 11. On résout dans \mathbb{C} : $(1 - z^2)^3 = (-2z)^3 \Leftrightarrow 1 - z^2 = -2z$ ou $1 - z^2 = -2e^{\frac{2i\pi}{3}}z$ ou $1 - z^2 = 2e^{\frac{2i\pi}{3}}z$. Ce sont trois équations de degré deux que l'on pourrait résoudre directement par le discriminant (il suffit d'en résoudre une seule des deux dernières, puisqu'en prenant les conjuguées des solutions cela nous donne les solutions de l'autre). Mais on peut faire mieux en écrivant par exemple pour la première que $z^2 - 2z - 1 = (z - 1)^2 - 2$. On obtient donc directement $z = 1 \pm \sqrt{2}$ pour la première équation.

Pour la deuxième, on la réécrit $(z - e^{\frac{2i\pi}{3}})^2 = 1 + e^{\frac{4i\pi}{3}} = -e^{\frac{2i\pi}{3}}$ (dont une racine carrée est $ie^{\frac{i\pi}{3}}$, les solutions sont donc $z = e^{\frac{2i\pi}{3}} \pm ie^{\frac{i\pi}{3}} = \frac{-1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2} + i(\frac{\sqrt{3}}{2} \pm \frac{1}{2}) = -\frac{1 \pm \sqrt{3}}{2}(1 - i)$.

Les solutions de la troisième équation sont donc $z = -\frac{1 \pm \sqrt{3}}{2}(1 + i)$.

On a donc la factorisation du polynôme dans $\mathbb{C}[X]$ (son coefficient dominant est -1).

Pour retrouver la factorisation dans $\mathbb{R}[X]$, on regroupe ensemble les racines qui sont conjuguées :

$$(X + \frac{1 \pm \sqrt{3}}{2}(1 - i))(X + \frac{1 \pm \sqrt{3}}{2}(1 + i)) = X^2 + (1 \pm \sqrt{3})X + \frac{1}{4}(1 \pm \sqrt{3})^2(1 - i)(1 + i) = X^2 + (1 \pm \sqrt{3})X + (2 \pm \sqrt{3}).$$

La factorisation complète est donc

$$P = -(X - 1 + \sqrt{2})(X - 1 - \sqrt{2})(X^2 + (1 + \sqrt{3})X + 2 + \sqrt{3})(X^2 + (1 - \sqrt{3})X + 2 - \sqrt{3}).$$

Exercice 12. 1. Il suffit de faire de l'interpolation de Lagrange. On suppose que P est de degré n .

On pose $L_i(X) = \frac{\prod_{j=0, j \neq i}^n X - j}{\prod_{j=0, j \neq i}^n i - j} \in \mathbb{Q}[X]$. Alors $\sum_{i=0}^n P(i)L_i(X)$ est un polynôme de $\mathbb{Q}[X]$ qui coïncide avec P en $n + 1$ valeurs, c'est donc P . On a donc $P \in \mathbb{Q}[X]$.

2. On suppose que P s'écrit $\sum_{k=0}^n a_k X^k$. On voit déjà que les polynômes λX^n , avec $|\lambda| = 1$ conviennent.

On veut montrer que ce sont les seuls. L'idée est de considérer le polynôme réciproque conjugué $P^* = \sum_{k=0}^n \bar{a}_{n-k} X^k = X^n \bar{P}(\frac{1}{X})$.

On a alors $\forall z \in \mathbb{C}, P(z)P^*(z) = z^n P(z)\overline{P(\frac{1}{z})}$, et pour $|z| = 1, \frac{1}{z} = \bar{z}$, donc $\forall z \in \mathbb{U}, P(z)P^*(z) = z^n P(z)\overline{P(\bar{z})} = z^n P(z)\overline{P(z)} = z^n$ (car $|P(z)| = 1$). Les deux polynômes PP^* et X^n coïncident donc sur \mathbb{U} , qui est infini, donc ils sont égaux. Donc P divise X^n , donc il est de la forme λX^m , et avec l'hypothèse on obtient que $|\lambda| = 1$.

3. Il y a d'abord de cas des polynômes constants irrationnels. On écarte ce cas, on suppose qu'il est de degré $n > 0$. On utilise d'abord les pôlynômes d'interpolation de Lagrange, en $n + 1$ valeurs irrationnelles, ce qui nous donne déjà que $P \in \mathbb{R}[X]$, et on le considère comme une fonction de \mathbb{R} dans \mathbb{R} .

Comme P n'est pas constant, on obtient que $P(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$ s'il est impair, et $] -\infty, \alpha[$, ou $]\alpha, \infty[$, s'il est pair. Dans tous les cas, on peut trouver $n + 1$ rationnels distincts r_i dans $P(\mathbb{R})$, et $n + 1$ réels q_i tels que $P(q_i) = r_i$. On obtient que les q_i sont tous distincts, et rationnels d'après l'hypothèse. Et on peut donc de nouveau faire de l'interpolation de Lagrange, et on obtient que $P \in \mathbb{Q}[X]$.

Cependant on peut avoir mieux : le polynôme X^2 ne vérifie pas l'hypothèse par exemple. En fait on voit déjà que les polynômes de degré 1 de $\mathbb{Q}[X]$ vérifient l'hypothèse. On va montrer que ce sont les seuls. Déjà on peut multiplier P par un entier sans perte de généralité, de telle sorte que $P \in \mathbb{Z}[X]$, et ensuite, quitte à ajouter un autre entier, on peut supposer que $[-1, 1] \subset P(\mathbb{R})$.

On a alors $P = \sum_{k=0}^n a_k X^k$, les a_k étant dans \mathbb{Z} . On prend p et q premiers entre eux, et on a $q^n P(\frac{p}{q}) =$

$\sum_{k=0}^n a_k p^k q^{n-k} \in \mathbb{Z}$. Si $P(\frac{p}{q}) = \frac{1}{m}$ avec m premier, on a $m|q^n$ donc $m|q$. Si $n \geq 2$ on a alors m divise $\frac{q^n}{m}$,

donc m divise $\sum_{k=0}^n a_k p^k q^{n-k}$ et enfin $m|a_n p^n$ donc comme $p \wedge q = 1$ et m premier, $m|a_n$. En conclusion,

si $n \geq 2$ et m est un nombre premier qui ne divise pas a_n , alors $\frac{1}{m}$ n'est pas dans l'image de P . Donc $n = 1$.

En conclusion

- $P(\mathbb{Q}) \subset \mathbb{Q} \iff P \in \mathbb{Q}[X]$
- $P(\mathbb{U}) \subset \mathbb{U} \iff P = \lambda X^n$, avec $|\lambda| = 1$
- $P(\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}) \subset \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \iff P = \alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ ou $P \in \mathbb{Q}[X]$, avec $\deg P = 1$

Exercice 13. 1. On met d'abord au même dénominateur pour obtenir $\frac{-x^2}{(x^2+1)^2}$, qui s'intègre par parties en prenant $u'(x) = \frac{x}{(x^2+1)^2}$ et $v(x) = x$. En rajoutant une primitive de $\frac{-1}{1+x^2}$ (c'est à dire arctan), on obtient au final $\frac{1}{2}(\frac{x}{1+x^2} + \arctan(x))$.

2. On fait une décomposition en éléments simples sous la forme $\frac{\alpha x + \beta}{(x^2+1)^2} + \frac{\gamma x + \delta}{x^2+1}$, et on sait intégrer tous les termes. Puis pour tout polynôme, on fait d'abord la division euclidienne pour se ramener à prendre la primitive d'un polynôme plus une primitive d'une fraction rationnelle de la forme précédente.

Remarque : on peut en fait même aller plus loin, on trouve qu'une primitive de $\frac{1}{(1+x^2)^k}$ s'écrit sous la forme $\frac{P(x)}{(x^2+1)^{k-1}} + \alpha_k \arctan(x)$.

Exercice 14. Composée de fractions rationnelles polynômiale.

1. Trouver l'image I_R d'une fraction rationnelle $R = \frac{P}{Q}$ de $\mathbb{C}(X)$ (écriture sous forme réduite), en tant que fonction définie sur son ensemble de définition. Il y a trois cas.
- Si R est un polynôme, $I_R = \{\gamma\}$ ou \mathbb{C} selon qu'il est constant ou non (par d'Alembert-Gauss).
 - Sinon, si $R = \alpha + \frac{\beta}{Q}$ ($\beta \neq 0$), i.e on peut trouver α dans \mathbb{C} tel que $P - \alpha Q$ soit un polynôme constant, et dans ce cas, comme Q est non-constant, son image est \mathbb{C} donc $I_R = \mathbb{C} \setminus \{\alpha\}$.
 - Sinon, quelque soit α dans \mathbb{C} , $P - \alpha Q$ est non-constant, donc d'après le théorème de D'Alembert-Gauss, il a une racine λ . La fraction R étant écrite sous forme réduite, on ne peut pas avoir $Q(\lambda) = 0$ car sinon $P(\lambda) = 0$ et donc $X - \lambda$ divise P et Q . Donc λ est dans l'ensemble de définition de R et on a $R(\lambda) = \alpha$. Au final $I_R = \mathbb{C}$.
2. D'abord éviter le piège induit par l'énoncé : on n'a pas forcément le droit d'écrire $f \circ g \in \mathbb{C}(X)$, ce n'est pas défini si g est une constante ayant la valeur d'un pôle de f , et en fait c'est le seul cas dans lequel ce n'est pas défini.

Cette pinaillerie mise à part, on raisonne en fonction de g . Si I_g rencontre un pôle de f , alors $f \circ g$ aura un pôle (l'antécédent en question, on peut le voir en analysant le comportement au voisinage, ou algébriquement, en réécrivant tout).

- $g = \alpha$ est constant et $I_g = \{\alpha\}$. Alors f peut avoir les pôles qu'elle veut (sauf α bien entendu), et on a bien $f \circ g = f(\alpha) \in \mathbb{C} \subset \mathbb{C}[X]$.
- $g \in \mathbb{C}[X]$, non constant. $I_g = \mathbb{C}$, et f ne peut donc pas avoir de pôles, donc $f \in \mathbb{C}[X]$, et c'est suffisant pour que $f \circ g \in \mathbb{C}[X]$.
- $g = \alpha + \frac{\beta}{Q}$, avec Q non-constant, et $I_g = \mathbb{C} \setminus \{\alpha\}$. Le seul pôle possible pour f est donc α , donc on écrit $f = E + \frac{P}{(X - \alpha)^n}$. On écrit $f \circ g$ et on voit qu'il faut que la partie entière E soit constante pour que $f \circ g \in \mathbb{C}[X]$, et que c'est suffisant.
- Enfin dans le dernier cas, g n'est pas un polynôme (donc a au moins un pôle) et $I_g = \mathbb{C}$, donc f ne peut pas avoir de pôles, donc f est un polynôme, et dans ce cas il faut qu'il soit constant pour que $f \circ g \in \mathbb{C}[X]$, et c'est suffisant.

Conclusion : $f \circ g \in \mathbb{C}[X]$ si et seulement si on est dans un des quatre cas suivants :

$$\begin{cases} g \in \mathbb{C} \text{ et } f \in \mathbb{C}(X), & \text{avec } g \text{ n'étant pas un pôle de } f \\ g \in \mathbb{C}(X) \text{ et } f \in \mathbb{C}, \\ g \in \mathbb{C}[X] \text{ et } f \in \mathbb{C}[X], \\ g = \alpha + \frac{\beta}{Q}, f = \frac{P}{(X - \alpha)^n}, & \text{avec } \deg(P) \leq n. \end{cases}$$

3.3 Réduction d'endomorphismes

Exercice 15. Soit f une application linéaire de \mathbb{R}^n dans \mathbb{R}^p de rang r , représenté par sa matrice A dans les bases canoniques.

1. L'espace vectoriel engendré par les vecteurs colonnes de A forme une famille génératrice de l'image (de dimension r) de f . Par le théorème de la base incomplète on peut en extraire une base (donc une famille libre à r éléments).
2. De même, on utilise la version du théorème de la base incomplète qui dit qu'on peut compléter la famille libre à r éléments qu'on vient de créer (la famille des Ae_j pour $j \in J$), en une base de \mathbb{R}^p , à partir d'une famille génératrice de \mathbb{R}^p , ici $(e_i)_{i \in [1,p]}$. La famille finale étant une base de \mathbb{R}^p , on a donc ajouté $p - r$ éléments. On note I l'ensemble des indices des éléments qu'on a choisi, et on a donc $\mathbb{R}^p = \text{Vect}(\{Ae_j\}_{j \in J}) \oplus \text{Vect}(\{e_i\}_{i \in I})$. Comme $\text{Vect}(\{Ae_j\}_{j \in J}) = \text{Im}(f)$ (c'est un sous-espace vectoriel de $\text{Im}(f)$ et de même dimension), on obtient bien le résultat voulu.

Si $x \in \text{Vect}(\{e_i\}_{i \notin I})$, par ce qui précède, on peut écrire $x = z + \sum_{i \in I} a_i e_i$, avec $z \in \text{Im}(f)$, c'est à dire de la forme $z = f(y)$ pour un y donné dans \mathbb{R}^n . En appliquant π (qui est linéaire), on obtient que $\pi(x) = \pi(z)$. Mais comme $x = \pi(x)$, on obtient bien $x = \pi(f(y))$. L'autre inclusion étant directe, puisque l'image de π est $\text{Vect}(\{e_i\}_{i \notin I})$, on obtient bien que $\pi \circ f(\mathbb{R}^n) = \text{Vect}(\{e_i\}_{i \notin I})$. Autrement dit l'application linéaire de \mathbb{R}^n dans $\text{Vect}(\{e_i\}_{i \notin I})$ dont la matrice dans ces bases est la sous-matrice de A constituée des lignes i pour $i \notin I$ est surjective (donc de rang r , puisqu'il y a r éléments de la forme e_i avec $i \notin I$).

3. Comme $f(\mathbb{R}^n) = \text{Im}(f) = \text{Vect}(\{Ae_j\}_{j \in J})$, on en déduit que $\pi(\text{Vect}(\{Ae_j\}_{j \in J})) = \text{Vect}(\{\pi(Ae_j)\}_{j \in J}) = \text{Vect}(\{e_i\}_{i \notin I})$. Autrement dit l'application linéaire de $\text{Vect}(\{\pi(Ae_j)\}_{j \in J})$ dans $\text{Vect}(\{e_i\}_{i \notin I})$ dont la matrice dans ces bases est la sous-matrice (carrée) de A constituée des lignes i pour $i \notin I$ et des colonnes j pour $j \in J$ est une application surjective, donc bijective. Et le déterminant de cette matrice est donc non-nul.

Donc il existe une sous matrice carrée de taille r telle que le déterminant soit non-nul. Montrons maintenant que s'il existe une sous-matrice carrée de taille q dont le déterminant est non-nul, alors $q \leq r$. Il suffit de voir que les colonnes sélectionnées forment une famille libre. En effet comme les colonnes auxquelles on a seulement gardé les lignes sélectionnées forme déjà une famille libre, donc si une combinaison linéaire des colonnes est nulles, alors la même combinaison est nulle en la restreignant aux lignes sélectionnées, donc les coefficients sont tous nuls.

Exercice 16. On peut soustraire la première ligne à toutes les autres, et factoriser par $(a_i - a_1)$ chaque ligne, puis de nouveau faire des opérations sur les colonnes pour se ramener à un déterminant de Vandermonde plus petit, et finir par récurrence. Mais il y a une astuce très classique (toujours en faisant par récurrence sur n), qu'il vaut le coup de connaître :

On peut, en remplaçant la première ligne par $(1 \ x \ x^2 \ \dots \ x^{n-1})$ voir que ce déterminant est un polynôme de degré $n - 1$ (en développant par exemple par rapport à la première ligne) ayant $n - 1$ racines : a_2, \dots, a_n (en effet, si on remplace x par a_i pour $i \neq 1$ on obtient bien deux lignes identiques, donc le déterminant est nul). On sait

donc que ce polynôme s'écrit $\alpha \prod_{i=2}^n (x - a_i)$. On s'aperçoit que le coefficient dominant est égal à $(-1)^{n-1}$ fois le déterminant de Vandermonde correspondant aux $(n-1)$ premières colonnes et aux $(n-1)$ dernières lignes, on obtient donc (par récurrence) que $\alpha = (-1)^{n-1} \prod_{2 \leq i < j \leq n} (a_j - a_i)$. En appliquant le polynôme en a_1 , on obtient

bien que le déterminant vaut $(-1)^{n-1} \prod_{2 \leq i < j \leq n} (a_j - a_i) \times \prod_{k=2}^n (a_1 - a_k)$, ce qui donne bien la formule voulue.

Exercice 17. On utilise la formule du déterminant : seulement des additions, soustractions et multiplications d'entiers, donc le déterminant est entier si la matrice est à coefficients entiers. Donc si $A^{-1} \in M_n(\mathbb{Z})$, alors $\det(A^{-1}) \in \mathbb{Z}$, mais comme $\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det A}$, la seule possibilité est d'avoir $\det A = \pm 1$.

Réciproquement si $\det A = \pm 1$, alors comme la matrice $\text{Com}(A)$ est à coefficients entiers (chaque coefficient est un déterminant d'une sous-matrice de A), la formule de Cramers donne que $A^{-1} = \frac{1}{\det A} \text{Com}(A)^T$ est aussi à coefficients entiers.

Exercice 18. 1. Pour calculer ce déterminant (on appelle H la matrice associée), on pose (e_1, e_2, \dots, e_n) la base canonique de \mathbb{R}^n et U le vecteur n'ayant que des 1 comme coordonnées, et on utilise la multilinéarité, et le fait que le déterminant est alterné :

$$\begin{aligned} \det H &= \det(aU + (a_1 - a)e_1, aU + (a_2 - a)e_2, \dots, aU + (a_n - a)e_n) \\ &= \det((a_1 - a)e_1, (a_2 - a)e_2, \dots, (a_n - a)e_n) \\ &\quad + a \sum_{i=1}^n \det((a_1 - a)e_1, (a_2 - a)e_2, \dots, (a_{i-1} - a)e_{i-1}, U, (a_{i+1} - a)e_{i+1}, \dots, (a_n - a)e_n) \\ &= \prod_{i=1}^n (a_i - a) + a \sum_{i=1}^n \prod_{j=1, j \neq i}^n (a_j - a). \end{aligned}$$

2. On note \mathfrak{D}_n l'ensemble des dérangements de \mathfrak{S}_n , et δ_n la différence entre le nombre de dérangements pairs et impairs, ce qui fait qu'on peut écrire $\delta_n = \sum_{\sigma \in \mathfrak{D}_n} \varepsilon(\sigma)$.

On peut écrire ça sous la forme d'un déterminant : si on note H la matrice ayant des 1 partout sauf sur la diagonale où elle a des zéros, on a $h_{i\sigma_i} = 0$ si i est un point fixe de σ , et sinon $h_{i\sigma_i} = 1$. Donc $h_{1\sigma_1} h_{2\sigma_2} \dots h_{n\sigma_n}$ vaut 0 si σ a un point fixe, et 1 sinon.

Donc $\det H = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} h_{1\sigma_1} h_{2\sigma_2} \dots h_{n\sigma_n} = \sum_{\sigma \in \mathfrak{D}_n} \varepsilon(\sigma) = \delta_n$.

Or on a $\det H = (-1)^n + n(-1)^{n-1} = (-1)^{n-1}(n-1)$. Il y a donc plus de dérangements pairs quand n est impair, et plus de dérangements impairs quand n est pair.

3. On pose $M \in \mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{R})$, la matrice d'incidence des A_i , de coefficients $m_{ij} = 1$ si $j \in A_i$ et $m_{ij} = 0$ sinon. On a $\text{Card}(A_i \cap A_j) = \sum_{k=0}^m m_{ik} m_{jk}$. Soit $H = MM^T$, en prenant H la matrice définie à la première question, avec $a_i = \text{Card}(A_i)$.

Or on a $a \leq a_i$ pour tout i , et le cas d'égalité est vrai pour au plus un indice i (dès que $i \neq j$, si $a = a_i = a_j$, alors $A_i = \text{Card}(A_i \cap A_j) = A_j$, or les ensembles sont disjoints deux à deux. Donc dans tous les cas $\det H > 0$, et donc le $n = \text{rg}(H) \leq \text{rg}(M) \leq m$.

Exercice 19. 1. Avec la formule du déterminant, on obtient que tous les termes de la somme sont pairs excepté celui où la permutation est l'identité (qui vaut 1), le déterminant est donc impair (donc non nul). On peut aussi montrer qu'il est impair par récurrence sur la taille de la matrice, en développant par rapport à la première ligne ou colonne.

2. On pose le problème. Soit $X = (x_i)_{i \in [1, 2n+1]}$ le vecteur des masses des cailloux. Quand on enlève le caillou i , on a deux tas, on note T_i l'ensemble des indices des cailloux du premier tas (qui est de cardinal n) et on a

$$\forall i \in [1, 2n+1], \quad \sum_{j \in T_i} x_j = \sum_{j \in [1, 2n+1] \setminus T_i, j \neq i} x_j \quad (1)$$

On réécrit ça matriciellement : on note $A \in \mathcal{M}_{2n+1}(\mathbb{R})$ la matrice dont les coefficients a_{ij} sont donnés

par $\begin{cases} 1 & \text{si } j \in T_i \\ -1 & \text{si } j \notin T_i, j \neq i. \\ 0 & \text{si } j = i \end{cases}$. Et alors (1) s'écrit simplement $AX = 0$.

Comme $\text{Card}(T_i) = n$, on obtient immédiatement que $\sum_{j=1}^{2n+1} a_{ij} = 0$, i.e. que le vecteur U dont toutes les coordonnées sont 1 est dans le noyau de A . Par conséquent si on montre que le rang de A est $2n$, alors le noyau est de dimension 1 et X est proportionnel à U , ce qu'on veut montrer.

Si on considère la matrice J n'ayant que des 1 comme coefficients, on obtient que $A + J$ est une matrice avec des 1 sur la diagonale et des 0 et des 2 partout ailleurs, comme à la question précédente. $A + J$ est donc de rang $2n + 1$, mais comme J est de rang 1, alors A est au moins de rang $2n$, donc son noyau est au plus de dimension 1, ce qu'on voulait montrer.

Exercice 20. Si $v = 0$ l'endomorphisme est nul (donc diagonalisable) et son rang est 0.

Si $v \neq 0$, alors l'image de f est $\text{Vect}(v)$ de dimension 1, donc le rang est 1.

On a alors que $f(v) \in \text{Vect}(v)$, donc il existe λ tel que $f(v) = \lambda v$. Donc v est un vecteur propre associé à la valeur propre λ . Plus précisément, si $v = \sum_{i=1}^n x_i e_i$, alors $\lambda = \sum_{i=1}^n x_i$.

D'autre part, les $n - 1$ éléments $(e_i - e_1)_{i \in \llbracket 2, n \rrbracket}$ sont $(n - 1)$ vecteurs propres indépendants associés à la valeur propre 0.

On a alors deux cas : si $\lambda \neq 0$, alors v est indépendant des autres vecteurs propres, et on a donc une base de n vecteurs propres, la matrice est diagonalisable.

Sinon, on peut montrer que la seule valeur propre est 0 : si on a $f(u) = \lambda' u$ alors $u \in \text{Im}(f)$ donc soit $\lambda' = 0$, soit u est proportionnel à v (mais alors $f(u) = 0$ puisque $f(v) = 0$). Et comme la matrice n'est pas nulle elle ne peut pas être diagonalisable avec pour seule valeur propre 0.

Exercice 21. 1. (a) On pose $A = \sum_{p=0}^{q-1} N^p$. Alors $(I_n - N)A = A(I_n - N) = I_n$ (ce sont des sommes télescopiques dans les deux cas).

(b) On note M cette matrice, qui s'écrit de la forme $I_n - A$, où A est la matrice avec une diagonale décalée de 1 vers le haut ne comportant que des a . Elle correspond à l'endomorphisme f de \mathbb{R}^n tel que $f(e_i) = a e_{i-1}$ pour $i \geq 2$, et $f(e_1) = 0$. Il est alors facile de calculer $f^j(e_i)$ qui vaut $a^j e_{i-j}$ si $i > j$ et 0 si $i \leq j$. Donc la matrice A^j ne contient que des a^j sur la diagonale décalée de j vers le haut, et des 0 ailleurs, et que A^n est nulle.

$$M^{-1} = \sum_{j=0}^{n-1} A^j = \begin{pmatrix} 1 & a & a^2 & \dots & a^{n-1} \\ 0 & 1 & a & & a^{n-2} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 1 & a \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

2. (a) On peut appliquer la formule de Newton parce que les matrices I_n et N commutent (attention ce n'est pas vrai en général). Mais sinon on peut simplement montrer par récurrence que $(I_n + N)^p = I_n + pN$.

(b) Calcule $M - 2I_2 = N = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$. Et on vérifie que $N^2 = 0$.

$$\text{On en déduit que } M^{100} = (2(I_2 + \frac{1}{2}N))^{100} = 2^{100}(I_2 + 50N) = 2^{100} \begin{pmatrix} -49 & 50 \\ -50 & 51 \end{pmatrix}.$$

Exercice 22. Comme $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, on a que $M^T M = \begin{pmatrix} a^2 + c^2 & ab + cd \\ ab + cd & b^2 + d^2 \end{pmatrix}$.

Comme $M^T M = I_2$, on a $a^2 + c^2 = 1$, donc il existe un unique $\theta \in [0, 2\pi[$ tel que $\begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta \\ \sin \theta \end{pmatrix}$. La deuxième égalité $ab + cd = 0$ correspond à dire que les vecteurs $\begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} b \\ d \end{pmatrix}$ sont orthogonaux. Comme on est en dimension 2, les vecteurs orthogonaux à $\begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix}$ (qui est non-nul) forment un espace vectoriel de dimension 1, engendré par exemple par $\begin{pmatrix} -c \\ a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\sin \theta \\ \cos \theta \end{pmatrix}$. On obtient donc que $\begin{pmatrix} b \\ d \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} -\sin \theta \\ \cos \theta \end{pmatrix}$. La troisième égalité s'écrit $\alpha^2(-\sin \theta)^2 + \alpha^2(\cos \theta)^2 = 1$, soit encore $\alpha^2 = 1$, donc $\alpha = \pm 1$. On est donc bien dans un des deux cas demandé (réciproquement on peut vérifier que ces deux cas donnent bien des matrices M telles que $M^T M = I_2$).

Pour la diagonalisation, on regarde le premier cas. On obtient $\mathcal{X}_M(\lambda) = (\cos \theta - \lambda)^2 + \sin^2 \theta = \lambda^2 - 2 \cos \theta \lambda + 1 = (\lambda - e^{i\theta})(\lambda - e^{-i\theta})$. Les deux valeurs propres ne sont pas réelles (sauf si $\theta = 0$ ou $\theta = \pi$, dans ce cas $M = \pm I_2$ est diagonalisable), et sont distinctes, donc la matrice n'est pas diagonalisable sur \mathbb{R} mais elle l'est sur \mathbb{C} .

Dans le deuxième cas, on a $\mathcal{X}_M(\lambda) = (\cos \theta - \lambda)(-\cos \theta - \lambda) - \sin^2 \theta = \lambda^2 - 1$, il y a donc deux valeurs propres distinctes ± 1 , et la matrice est diagonalisable sur \mathbb{R} (donc sur \mathbb{C}). On pouvait aussi voir directement qu'elle était symétrique réelle, donc diagonalisable (en base orthonormale).

Pour l'interprétation géométrique, la première matrice correspond à la matrice de rotation d'un vecteur dans \mathbb{R}^2 d'un angle θ . Il est donc raisonnable qu'elle ne soit pas diagonalisable (dans \mathbb{R}), à moins que l'angle soit 0 ou π : le vecteur Mx est la rotation du vecteur x d'un angle θ , et ne peut donc pas être colinéaire à x . La deuxième matrice correspond à une symétrie axiale : en effet, si on cherche un vecteur propre associé à la valeur propre 1 sous la forme $x = \begin{pmatrix} \cos \varphi \\ \sin \varphi \end{pmatrix}$, on obtient $\cos \varphi = \cos \theta \cos \varphi + \sin \theta \sin \varphi = \cos \theta - \varphi$ et $\sin \varphi = \sin \theta \cos \varphi - \cos \theta \sin \varphi = \sin \theta - \varphi$, ce qui donne que $\varphi = \theta - \varphi + 2k\pi$, ou encore $\varphi = \frac{1}{2}\theta + k\pi$. On a donc que le

vecteur $\begin{pmatrix} \cos \frac{\theta}{2} \\ \sin \frac{\theta}{2} \end{pmatrix}$ est un vecteur propre associé à la valeur propre 1 (c'est un vecteur directeur de l'axe de symétrie). D'autre part, comme la matrice est symétrique, on sait qu'elle est diagonalisable en base orthonormale, donc le vecteur précédent tourné de $\frac{\pi}{2}$ donne un vecteur orthogonal, qui est vecteur propre associé à la valeur propre -1 : son image par M est son opposé. M correspond donc à la symétrie axiale d'axe le vecteur $\begin{pmatrix} \cos \frac{\theta}{2} \\ \sin \frac{\theta}{2} \end{pmatrix}$.

Exercice 23. On a déjà par le théorème du rang que $\dim \ker f = n - 1$ (on se place en dimension finie). Donc le sous-espace propre associé à la valeur propre 0 est de dimension $n - 1$. S'il y a une autre valeur propre, alors son espace est de dimension au plus 1 (puisque la somme des dimensions des sous-espaces propres, qui sont en somme directe est inférieure ou égale à n), et au moins 1 (puisque il y a au moins un vecteur propre). Donc la somme des dimensions des sous-espaces propres est n , et l'endomorphisme est diagonalisable. Réciproquement s'il n'y a pas d'autre valeur propre que 0, l'endomorphisme ne peut pas être diagonalisable, sinon il serait nul et ne serait pas de rang 1.

Comme la trace est la somme des valeurs propres (complexes) comptées avec leur multiplicité, et que 0 est de multiplicité au moins $n - 1$ (puisque la dimension de l'espace propre associé est $n - 1$), alors la trace vaut 0 si la seule valeur propre est 0, et elle vaut λ s'il y a une autre valeur propre $\lambda \neq 0$ (qui est donc de multiplicité 1). Avec le résultat précédent, on a donc bien que l'endomorphisme est diagonalisable si et seulement si sa trace est nulle.

Dans le cas où f n'est pas diagonalisable, si on prend x un élément non-nul de $\text{Im } f$ (qui est de dimension 1), alors $f(x) \in \text{Im } f$, donc est de la forme λx , avec $\lambda \in \mathbb{R}$. On ne peut pas avoir $\lambda \neq 0$ sinon x serait un vecteur propre associé à une valeur propre non-nulle. Donc $\lambda = 0$, et $f(x) = 0$. On a donc montré que pour tout $x \in \text{Im } f$, $f(x) = 0$. Et donc pour tout $y \in E$, $f(y) \in \text{Im } f$ et donc $f(f(y)) = 0$. On a donc bien $f^2 = 0$.

Exercice 24. Soit $A \in M_n(\mathbb{K})$ et $B \in M_{2n}(\mathbb{K})$ la matrice par blocs $\begin{pmatrix} A & A \\ 0 & A \end{pmatrix}$. On suppose que B est diagonalisable. On sait alors qu'il existe P un polynôme annulateur de B , scindé à racines simples (sur \mathbb{K}).

1. On peut regarder l'endomorphisme restreint aux n premières coordonnées, dont l'image est bien constitué de vecteurs dont les n dernières coordonnées sont nulles : si X est un vecteur de \mathbb{K}^n alors $B \begin{pmatrix} X \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} AX \\ 0 \end{pmatrix}$. On a donc un sous-espace stable par B , et la matrice de l'endomorphisme restreint à ce sous-espace stable est A . Comme B est diagonalisable, A l'est aussi.

Mais on pouvait aussi utiliser la troisième question, comme on le verra.

2. Par récurrence sur p , en se souvenant que le produit de matrices par blocs se calcule comme le produit de matrice (en faisant bien attention à l'ordre dans les produits), à condition que les blocs soient de la bonne taille pour pouvoir effectuer les produits matriciels.
3. Si $P = \sum_{k=0}^d a_k X^k$, alors les blocs diagonaux sont de la forme $\sum_{k=0}^d a_k A^k$, c'est à dire $P(A)$. Et le bloc en haut à droite vaut $\sum_{k=0}^d k a_k A^k = AP'(A)$. Comme $P(B) = 0$, on en déduit que $P(A) = 0$ (ce qui nous donne une autre preuve que A est diagonalisable, puisque P est un polynôme scindé à racines simples annihilant A).

Supposons que λ est une valeur propre de A , on prend x un vecteur propre associé. Alors comme $P(A) = 0$, on obtient que $P(A)x = P(\lambda)x = 0$ donc $P(\lambda) = 0$. De même on obtient que $AP'(A)x = \lambda P'(\lambda)x = 0$. Donc $\lambda P'(\lambda) = 0$. Comme P est à racines simples, λ ne peut pas être racine de P' (puisque'elle est racine de P), donc $\lambda = 0$.

4. Comme A est diagonalisable avec pour seule valeur propre 0, elle est nulle. La seule matrice B de cette forme qui est diagonalisable est donc la matrice nulle.

Exercice 25. 1. Si x est un vecteur propre de $u \circ v$ associé à λ , alors $u(v(x)) = \lambda x \neq 0$ donc $v(x) \neq 0$. En appliquant v , on obtient $v(u(v(x))) = \lambda v(x)$, donc $v(x)$ est un vecteur propre de $v \circ u$ associé à λ .

2. Si $u \circ v$ n'est pas injectif (puisque 0 est valeur propre), alors montrons que $v \circ u$ ne l'est pas non plus. En effet, si $v \circ u$ était injectif, il serait inversible, puisque l'on est en dimension finie. Et on aurait aussi u injectif, donc u inversible, puis v inversible, et donc $u \circ v$ inversible.

3. Si $P = \sum_{k=0}^d a_k X^k$, on pose $D(P) = P' = \sum_{k=1}^d k a_k X^{k-1}$ et $I(P) = \sum_{k=0}^d \frac{a_k}{k+1} X^{k+1}$ (primitive de P nulle en 0).

On a $D(I(P)) = P$, mais $I(D(P)) = \sum_{k=1}^d a_k X^k = P - a_0$. Donc les polynômes constants non-nuls sont des vecteurs propre de $I \circ D$ associés à la valeur propre 0, mais $D \circ I$ est l'identité, qui est injective et n'a donc pas 0 pour valeur propre.

Exercice 26. 1. En notant d la dimension de E , on écrit que $\mathcal{X}_f(X) = \sum_{k=0}^d a_k X^k$, avec $a_0 = \det f \neq 0$. On peut donc noter $P = \sum_{k=1}^d a_k X^{k-1}$, de sorte que $\mathcal{X}_f(X) = XP(X) + \det f$. On a donc, par le théorème de Cayley-Hamilton, $\mathcal{X}_f(f) = f \circ P(f) + \det f \text{Id}_E = 0$. On en déduit que l'inverse de f est $\frac{-1}{\det f} P(f)$, qui est bien un polynôme en f .

2. La bonne manière de le faire est de mettre une norme sur E , puis de considérer la norme subordonnée sur $\mathcal{L}(E)$, qui est une norme telle que $\|f \circ g\| \leq \|f\| \|g\|$ pour $f, g \in \mathcal{L}(E)$. En particulier $\|f^n\| \leq \|f\|^n$, et donc la série $\sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{1}{n!} f^n$ est normalement convergente, donc convergente (l'espace $\mathcal{L}(E)$ étant de dimension finie, il est complet), vers un élément de $\mathcal{L}(E)$ que l'on note $\exp(f)$.

Pour montrer que $\exp(f)$ est un polynôme en f , on note $F = \text{Vect}(\{f^k, k \in \llbracket 0, d-1 \rrbracket\}) = \{P(f), P \in \mathbb{K}_{d-1}[X]\}$. On va d'abord montrer par récurrence que tout polynôme en f est un élément de F . En effet par le théorème de Cayley-Hamilton, si on note $\mathcal{X}_f(X) = (-1)^d X^d + P(X)$, où $P \in \mathbb{K}_{d-1}[X]$, on obtient que $0 = (-1)^d f^d + P(f)$, donc $f^d \in F$. Puis ensuite par récurrence, si on suppose que $f^k \in F$ pour tout $k \leq n$, avec $n \geq d-1$, alors $f^{n+1} = f^d \circ f^{n+1-d} = (-1)^{d+1} P(f) \circ f^{n+1-d} \in \text{Vect}(\{f^k, k \in \llbracket n+1-d, n \rrbracket\}) \subset F$. On a donc que $S_N(f) = \sum_{n=0}^N \frac{1}{n!} f^n$ est un élément de F pour tout N , et donc comme F est complet (de dimension finie) donc fermé, sa limite $\exp(f)$ appartient bien à F . Autrement dit $\exp(f)$ peut s'écrire comme un polynôme (de degré inférieur ou égal à $d-1$) en f .

Remarque : on peut en fait exprimer $\exp(f)$ et f^{-1} (pour la première question) comme des polynômes de $\mathbb{K}_{k-1}[X]$, où k est le degré du polynôme minimal de f . D'autre part, il faut bien comprendre qu'on n'a pas prouvé qu'il existait un polynôme P tel que $\exp(f) = P(f)$ pour tout f (ce qui est faux) : en effet, pour un f donné, le polynôme que l'on a créé a des coefficients qui dépendent eux-mêmes de f .

Exercice 27. Tout d'abord, si λ est une valeur propre de A alors $e^\lambda = \lambda$, qui n'a pas de solution sur \mathbb{R} , donc la seule possibilité est que A soit diagonalisable sur \mathbb{C} (dans laquelle il existe bien des solutions à $e^z = z$, mais c'est plus subtil à prouver). Une façon de faire et de montrer que la matrice peut s'écrire, dans une certaine

base, par « blocs de Jordan » de la forme $J = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda & \dots & \dots & \vdots \\ \vdots & \dots & \dots & \dots & 0 \\ \vdots & & \dots & \dots & 1 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & \lambda \end{pmatrix} \in M_k(\mathbb{C})$, où $e^J = J$ (donc $e^\lambda = \lambda$). Il

n'y a éventuellement pas de 1 si la taille est $k = 1$ (et dans ce cas la matrice est diagonalisable). En écrivant $N = J - \lambda I_k$, on sait que N est nilpotente, et on a que $e^J = e^\lambda e^N$ et on montre que cela ne peut pas fonctionner si $k \geq 2$ (on utilise que $e^\lambda \neq 1$).

Exercice 28. 1. Si $x \in \ker(f - \lambda \text{Id}_E)$, alors $f(g(x)) = g(f(x)) = g(\lambda x) = \lambda g(x)$ donc $g(x) \in \ker(f - \lambda \text{Id}_E)$. Si $x \in \text{Im}(f)$ alors on peut écrire $x = f(y)$, alors $g(x) = g(f(y)) = f(g(y)) \in \text{Im}(f)$. On a donc bien $g(\text{Im}(f)) \subset \text{Im}(f)$.

2. On note $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ les valeurs propres de f , et d_1, \dots, d_k les dimensions des sous-espaces associés (donc $d_1 + \dots + d_k = n = \dim E$). Comme $F_i = \ker(f - \lambda_i \text{Id}_E)$ est stable par g , $g|_{F_i}$ est donc diagonalisable, donc on peut trouver une base $e_{1,i}, \dots, e_{d_i,i}$ de d_i vecteurs propres de g appartenant à F_i (c'est à dire qu'ils sont aussi vecteurs propres de f). Si on fait cela pour tous les i , on obtient au final n vecteurs propres indépendants (puisque les F_i sont en somme directes), formant une base de vecteurs propres, à la fois pour f et pour g .

3. Si λ est un vecteur propre de f (il en existe, puisque f est trigonalisable : on prend par exemple le premier vecteur d'une base dans laquelle la matrice de f est triangulaire supérieure), on note $F = \ker(f - \lambda \text{Id}_E)$. Comme F est stable par g , alors $g|_F$ est trigonalisable, donc admet un vecteur propre appartenant à F (associé à la valeur propre μ). Autrement dit, il existe un vecteur propre commun e_1 à f et g . Si on complète (e_1) en une base de E , on peut écrire la matrice de f et g dans cette base, qui sont donc de la forme $A_f = \begin{pmatrix} \lambda & L_f \\ 0 & B_f \end{pmatrix}$ et $A_g = \begin{pmatrix} \mu & L_g \\ 0 & B_g \end{pmatrix}$. Il reste donc à montrer que B_f et B_g sont trigonalisables et commutent, ainsi par récurrence on aura une base de trigonalisation.

Pour le fait qu'elles commutent, il suffit d'écrire le produit par bloc, et comme les matrices A_f et A_g commutent, alors les sous-matrices B_g et B_f aussi.

Pour le fait qu'elles sont trigonalisables, on utilise le résultat sur le fait que c'est le cas si et seulement si le polynôme caractéristique est scindé. Comme on a $\mathcal{X}_f(X) = \mathcal{X}_{A_f}(X) = (\lambda - X)\mathcal{X}_{B_f}(X)$ et que \mathcal{X}_f est scindé, alors \mathcal{X}_{B_f} est scindé, et de même pour \mathcal{X}_{B_g} .

Exercice 29. 1. On a $P(0) \neq 0$ donc 0 n'est pas valeur propre, donc u est inversible.

2. On a $P = XQ$ avec $Q(0) \neq 0$. Comme $P(u) = 0$, le lemme des noyaux donne $E = \ker P(u) = \ker u \oplus \ker Q(u)$. De plus $Q(u) \circ u = 0$ donc $\text{Im } u \subset \ker Q(u)$. Et par le théorème du rang les dimensions sont égales : $\dim \text{Im } u = \dim E - \dim \ker u = \dim \ker Q(u)$. Donc on a ce qu'on voulait.

3. On suppose $p \geq 1$ (le cas $p = 0$: toutes les matrices considérées sont inversibles et les noyaux sont toujours nuls). On a $P = X^p Q$ avec $Q(0) \neq 0$, avec $P(u) = 0$. Le lemme des noyaux donne $E = \ker P(u) = \ker u^p \oplus \ker Qu$. De plus $Q(u) \circ u^p = 0$ donc $\text{Im } u^p \subset \ker Q(u)$. Et par le théorème du rang les dimensions sont égales : $\dim \text{Im } u^p = \dim E - \dim \ker u^p = \dim \ker Q(u)$.

Ici on a aussi $X^q Q(u) = 0$ pour $q \geq p$ donc par le lemme des noyaux $E = \ker u^q \oplus \ker Qu$. Comme $\ker u^p \subset \ker u^q$, l'égalité des dimension donne l'égalité entre ces deux espaces, et donc par le théorème du rang $\dim \text{Im } u^q = \dim \text{Im } u^p$ et par une inclusion évidente on a $\text{Im } u^q = \text{Im } u^p$ et donc $E = \ker u^q \oplus \text{Im } u^q$ dès que $q \geq p$. Montrons que ce n'est plus le cas pour $q < p$.

Si $q = 0$ comme u n'est pas inversible, on ne peut pas avoir $E = \ker u^q \oplus \text{Im } u^q$. Sinon si $1 \leq q < p$, le polynôme $X^q Q$ n'annule pas u donc $E \neq \ker u^q \oplus \ker Q(u)$. En particulier $\dim \ker u^q < \dim \ker u^p$, donc $\ker u^q$ est strictement inclus dans $\ker u^p$. On suppose qu'on a $E = \ker u^q \oplus \text{Im } u^q$, alors montrons qu'on a $\ker u^{q+1} = \ker u^q$ et $\text{Im } u^{q+1} = \text{Im } u^q$. Par récurrence finie on aura $\ker u^p = \ker u^q$, donc une contradiction.

Soit $x \in \ker u^{q+1}$. On a $u^q(x) \in \ker u$ donc $u^q(x) \in \ker u^q$ et trivialement $u^q(x) \in \text{Im } u^q$, donc $u^q(x) = 0$. Donc $\ker u^{q+1} \subset \ker u^q$, l'autre inclusion est immédiate. Pour les images, le théorème du rang et une inclusion évidente suffisent alors.

3.4 Algèbre bilinéaire

Exercice 30. 1. C'est de dimension $p = n^2$. L'application qui à une matrice associe le vecteur correspondant à la mise bout à bout de tous ses vecteurs colonnes est un isomorphisme.

2. Comme dans \mathbb{R}^n , le produit scalaire de deux éléments de \mathbb{R}^n est la somme des produits coordonnée par coordonnée, on obtient donc un produit scalaire sur $M_n(\mathbb{R})$ en faisant la même chose : $\langle A, B \rangle = \sum_{i,j=1}^n a_{i,j} b_{i,j}$. On voit alors que l'on peut écrire ce calcul comme $\text{Tr}(AB^T)$.
3. On a, de même que dans \mathbb{R}^n , qu'une suite d'éléments converge si et seulement si la suite correspondant à chacune des coordonnées converge. Pour les matrices, cela s'écrit donc $A_k \rightarrow A$ (dans $M_n(\mathbb{R})$) quand $n \rightarrow \infty$ si et seulement si pour tout $(i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2$, on a $(A_k)_{i,j} \rightarrow (A)_{i,j}$ (dans \mathbb{R}) quand $n \rightarrow \infty$.
4. Pour l'ouvert : utiliser que $GL_n(\mathbb{R}) = \det^{-1}(\mathbb{R}^*)$, et que \det est continue (polynômiale en les coefficients), et \mathbb{R}^* ouvert.

Pour le fait que c'est dense : on prend $A \in M_n(\mathbb{R})$, et on veut trouver une suite A_k de matrices inversibles qui converge vers A . Si A est inversible, il suffit de prendre $A_k = A$. Sinon on prend $A_k = A - \frac{1}{k} I_n$. Comme A n'a qu'un nombre fini de valeurs propres, il existe $k_0 \in \mathbb{N}^*$ tel que pour tout $k \geq k_0$, $\frac{1}{k}$ n'est pas valeur propre de A , donc A_k est bien inversible. D'autre part, tous les coefficients de A_k convergent bien vers ceux de A .