Équivalence des normes en dimension finie

Jean-Jérôme Casanova

Cette note est dédiée à la preuve de l'équivalence des normes en dimension finie ainsi qu'à ses conséquences immédiates. On supposera connus les pré-requis suivants :

— *Les segments de* $\mathbb{R}$ *sont compacts.* En effet soit $I = [a,b]$ un segment de $\mathbb{R}$ et (x_n) une suite de points de I. On peut extraire une sous-suite monotone $(x_{\varphi(n)})$ de (x_n). Cette suite étant monotone bornée elle converge et d'après le théorème de Bolzano-Weierstrass I est compact.

— *Théorème de Tykhonov : Soit* $(E_i)_{i\in I}$ *une famille quelconque d'espaces topologiques compacts. Alors l'espace topologique produit des* E_i *est un espace compact.*

Dans sa forme générale, ce théorème est équivalent à l'axiome du choix. La version dénombrable (et même finie) qui est utilisée ici se démontre en utilisant une distance sur $\prod_{i\in I} E_i$ adaptée à la topologie produit ainsi que la caractérisation de la compacité à l'aide des suites.

— Soit $n \geq 1$. Les parties fermées bornées de $(\mathbb{K}^n, \|\cdot\|_\infty)$, où $\|u\|_\infty = \sup\limits_{i\in[\![1,n]\!]} |u_i|$ pour $u = (u_1, \ldots, u_n) \in \mathbb{K}^n$, sont compactes. En effet soit A une partie fermée bornée de $(\mathbb{K}^n, \|\cdot\|_\infty)$. A est bornée donc il existe $M > 0$ tel que $A \subset B_f(0, M) = [-M, M]^n$ qui est compact comme produit de compacts. Puisque un fermé d'un compact est compact on en déduit que A est compact.

Théorème 1. *Dans un espace vectoriel normé de dimension finie toutes les normes sont équivalentes.*

Démonstration. Soit E un $\mathbb{K}$-e.v de dimension finie et $(e_1, \ldots, e_n)$ une base de E. Pour tout $x = \sum_{i=1}^n x_i e_i \in E$ on définit la norme $N_0(x) = \sup_{i\in[\![1,n]\!]} |x_i|$. On va montrer que toute les normes sur E sont équivalentes à N_0. Soit N une norme sur E. Pour tout $x \in E$ on a

$$N(x) \leq \sum_{i=1}^n |x_i| N(e_i) \leq \left(\sum_{i=1}^n N(e_i)\right) N_0(x) \leq C N_0(x), \tag{1}$$

où $C = \sum_{i=1}^n N(e_i)$ est une constante indépendante de x.

La deuxième inégalité est plus délicate à obtenir. Considérons l'isométrie :

$$T : \begin{cases} (\mathbb{K}^n, \|\cdot\|_\infty) \longrightarrow (E, N_0) \\ (x_1, \ldots, x_n) \mapsto \displaystyle\sum_{i=1}^n x_i e_i. \end{cases}$$

La sphère unité $S_\infty(0,1)$ de $(\mathbb{K}^n, \|\cdot\|_\infty)$ est compacte car fermée et bornée (voir pré-requis). On en déduit que $S_{N_0}(0,1) = T(S_\infty(0,1))$ est compact dans (E, N_0) (T est continue puisqu'il s'agit d'une isométrie). L'inégalité (1) nous assure que N est continue et il existe $x_0 \in S_{N_0}(0,1)$ tel que $N(x_0) = \min_{N_0(x)=1} N(x)$. A noter que d'après l'axiome de séparation des normes $N_0(x_0) \neq 0$ implique que $N(x_0) \neq 0$. Finalement, pour tout $x \in E$ on a :

$$N(x) = N\left(\frac{x}{N_0(x)}\right) N_0(x) \geq N(x_0) N_0(x).$$

Ainsi N est bien équivalente à N_0. La norme N étant quelconque le théorème est bien démontré. □

La proposition suivante résume quelques conséquences utiles du théorème précédent.

Proposition 2.

1. *Toute application linéaire d'un e.v.n de dimension finie vers une e.v.n de dimension quelconque est continue.*
2. *Les e.v.n de dimension finie sont complets.*
3. *Un sous-espace vectoriel de dimension finie est toujours fermé.*
4. *Dans un e.v.n de dimension finie les parties compactes sont exactement les parties fermées et bornées.*

Démonstration. 1) Soit E un e.v.n de dimension finie, F un e.v.n quelconque et $f \in \mathcal{L}(E,F)$. En reprenant les notations de la preuve du Théorème 1 on considère $(e_1, \ldots, e_n)$ une base de E la norme N_0. On a alors :

$$\forall x = \sum_{i=1}^n x_i e_i \in E, \quad \|f(x)\|_F \leq \sum_{i=1}^n |x_i| \, \|f(e_i)\|_F \leq C N_0(x),$$

où $C = \sum_{i=1}^n \|f(e_i)\|_F$. L'application f est continue pour la norme N_0 et donc, d'après le Théorème 1, pour toutes les normes sur E.

2) Montrons-le explicitement en utilisant l'application T introduite dans la preuve du Théorème 1. Puisque la complétude est une notion métrique et que des normes équivalentes induisent des distances équivalentes il suffit de montrer que (E, N_0) est complet. Montrons tout d'abord que $(\mathbb{K}^n, \|\cdot\|_\infty)$ est complet. Soit $u^k = (u_1^k, \ldots, u_n^k)$ avec $k \in \mathbb{N}$ une suite de Cauchy de $(\mathbb{K}^n, \|\cdot\|_\infty)$. Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $p, q \geq N$:

$$\forall i \in [\![1, n]\!], \quad |u_i^p - u_i^q| < \varepsilon.$$

Si on fixe $i \in [\![1, n]\!]$ on remarque que la suite $(u_i^p)_{p \in \mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy dans l'espace complet $(\mathbb{R}, |\cdot|)$. Elle converge donc vers une limite notée u_i. En effectuant ce procédé pour tout $i \in [\![1, n]\!]$ on construit une limite $u = (u_1, \ldots, u_n)$. Pour montrer que $(u^k)_{k \in \mathbb{N}}$ converge bien vers u, on fixe $i \in [\![1, n]\!]$ et on passe à la limite sur q dans l'estimation :

$$|u_i^p - u_i^q| < \varepsilon.$$

On obtient ainsi :

$$\forall i \in [\![1, n]\!], \quad |u_i^p - u_i| \leq \varepsilon,$$

ce qui s'écrit aussi $\left\|u^k - u\right\|_\infty \leq \varepsilon$. Ainsi $(u^k)_{k\in\mathbb{N}}$ converge et $(\mathbb{K}^n, \|\cdot\|_\infty)$ est complet.

Revenons à présent à l'espace (E, N_0). Soit $v^k = \sum_{i=1}^n v_i^k e_i$ avec $k \in \mathbb{N}$ une suite de Cauchy de (E, N_0). Pour tout $\varepsilon > 0$ il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $p, q \geq N$:

$$N_0(v^p - v^q) < \varepsilon \Leftrightarrow \forall i \in [\![1, n]\!], \quad |v_i^p - v_i^q| < \varepsilon.$$

Ainsi on a directement $\|T^{-1}(v^p) - T^{-1}(v^q)\|_\infty < \varepsilon$ et $(T^{-1}(v^p))_{p\in\mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy de l'espace $(\mathbb{K}^n, \|\cdot\|_\infty)$ qui est complet. Elle converge donc vers un élément $Z \in \mathbb{K}^n$. Finalement, par continuité de T, $T(T^{-1}(v^k)) = v^k$ converge vers $T(Z) \in E$ et (E, N_0) est complet. De manière plus générale on vient de démontrer que les isométries entre les espaces métriques préservent la complétude.

3) Un sous espace vectoriel de dimension finie est complet donc fermé.

4) Soit A une partie fermée et bornée de (E, N_0). Puisque T est une isométrie $T^{-1}(A)$ est une partie fermée et bornée de $(\mathbb{K}^n, \|\cdot\|_\infty)$ et est donc compacte. Finalement, puisque T est continue $T(T^{-1}(A)) = A$ est compact. La notion de compacité étant topologique, l'équivalence des normes permet de conclure.

$\square$