Notions fondamentales de L1-L2
Contrôle continu du 27 Septembre 2021

Toutes les réponses doivent être soigneusement justifiées pour être considérées. Il est rappelé que la rédaction comptera de manière importante dans l'évaluation des copies. Aucun document n'est autorisé, aucune calculatrice. Le barème est donné à titre indicatif.

Exercice 1. (Un peu de calcul, 5 points)

1. Factoriser le polynôme $X^4 + 1$ dans $\mathbb{C}[X]$.

2. En déduire une factorisation dans $\mathbb{R}[X]$.

3. Décomposer en éléments simples dans $\mathbb{R}[X]$ la fraction rationnelle $\dfrac{1}{X^4+1}$.

Exercice 2.(Asymptotique d'une série de fonctions, 7 points)

On note, pour $n \in \mathbb{N}^*$: $f_n : [0, +\infty[\to \mathbb{R} \quad x \mapsto \dfrac{(-1)^n}{\sqrt{1+nx}}$.

1. Montrer que $\sum\limits_{n\geq 1} f_n$ converge simplement sur $]0, +\infty[$ et uniformément sur $[1, +\infty[$.

2. On note S la somme de la série. Montrer explicitement que $S(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$.

3. On note $a = \sum\limits_{n\geq 1} \dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$. Montrer que $S(x) = \dfrac{a}{\sqrt{x}} + \mathcal{O}\left(\dfrac{1}{x\sqrt{x}}\right)$. On pourra introduire la suite de fonctions $g_n : [1, +\infty[\to \mathbb{R} \quad x \mapsto \dfrac{(-1)^n}{\sqrt{nx}}$ et étudier la différence $f_n - g_n$.

Exercice 3. (Un théorème de Dini, 5 points)
Soit (f_n) une suite croissante de fonctions réelles continues et définies sur un segment $I = [a, b]$ de $\mathbb{R}$. Supposons que (f_n) converge simplement vers une fonction f continue sur I. Soit $\varepsilon > 0$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$ on considère l'ensemble

$$F_n = \{x \in I \mid f(x) \geq f_n(x) + \varepsilon\}.$$

1. Montrer que $\bigcap_{n \geq 0} F_n = \emptyset$.

2. En déduire l'existence d'un $N \in \mathbb{N}$ tel que $F_N = \emptyset$.

3. En déduire que (f_n) converge uniformément vers f.

Exercice 4. (Composantes connexes, 6 points)
Soit (E, d) un espace métrique. On considère sur (E, d) la relation suivante :

$$x\mathcal{R}y \Leftrightarrow (\exists C \text{ connexe de } E \text{ tel que } x \in C \text{ et } y \in C).$$

1. Soit $(C_i)_{i \in I}$ une famille de parties connexes de E telle que $\bigcap_{i \in I} C_i \neq \emptyset$. Montrer que $\bigcup_{i \in I} C_i$ est une partie connexe.

2. Montrer que la relation $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence.

Pour $x \in E$ on note $\hat{x}$ la classe d'équivalence de x, on dit que $\hat{x}$ est la composante connexe de x.

3. Montrer que les composantes connexes sont connexes et fermées.

4. On suppose que l'ensemble des composantes connexes $E/\mathcal{R}$ est fini. Montrer que les composantes connexes sont ouvertes.