Notions fondamentales de L1-L2
Corrigé du contrôle continu du 27 Septembre 2021

Toutes les réponses doivent être soigneusement justifiées pour être considérées. Il est rappelé que la rédaction comptera de manière importante dans l'évaluation des copies. Aucun document n'est autorisé, aucune calculatrice. Le barème est donné à titre indicatif.

Exercice 1. (Un peu de calcul, 5 points)

1. Factoriser le polynôme X^4+1 dans $\mathbb{C}[X]$.

2. En déduire une factorisation dans $\mathbb{R}[X]$.

3. Décomposer en éléments simples dans $\mathbb{R}[X]$ la fraction rationnelle $\dfrac{1}{X^4+1}$.

Correction :
1. On résout $X^4=-1$ dans $\mathbb{C}$ on trouve $X=e^{\frac{i\pi}{4}+\frac{ik\pi}{2}}$ avec $k\in\{0,1,2,3\}$. Ainsi $X^4+1=(X-e^{\frac{i\pi}{4}})(X-e^{\frac{3i\pi}{4}})(X-e^{\frac{5i\pi}{4}})(X-e^{\frac{7i\pi}{4}})$.
2. En regroupant les conjugués on obtient : $X^4+1=(X-e^{\frac{i\pi}{4}})(X-\overline{e^{\frac{i\pi}{4}}})(X-e^{\frac{3i\pi}{4}})(X-\overline{e^{\frac{3i\pi}{4}}})=(X^2-\sqrt{2}X+1)(X^2+\sqrt{2}X+1)$.
3. On a la décomposition suivante :

$$\frac{1}{X^4+1}=\frac{aX+b}{X^2-\sqrt{2}X+1}+\frac{cX+d}{X^2+\sqrt{2}X+1}.$$

En utilisant l'unicité de cette décomposition et la parité ($X\to -X$) on obtient : $-c=a$ et $b=d$. En 0 on a $b+d=1$ donc $b=d=\frac{1}{2}$. Finalement on évalue l'expression précédente et un point (par exemple en $X=\sqrt{2}$) et on obtient : $a=-\frac{\sqrt{2}}{4}$. Finalement :

$$\frac{1}{X^4+1}=\frac{1}{4}\frac{-\sqrt{2}X+2}{X^2-\sqrt{2}X+1}+\frac{1}{4}\frac{\sqrt{2}X+2}{X^2+\sqrt{2}X+1}.$$

Exercice 2.(Asymptotique d'une série de fonctions, 7 points)

On note, pour $n \in \mathbb{N}^*$: $f_n : [0,+\infty[\to \mathbb{R} \quad x \mapsto \dfrac{(-1)^n}{\sqrt{1+nx}}$.

1. Montrer que $\sum_{n\geq 1} f_n$ converge simplement sur $]0,+\infty[$ et uniformément sur $[1,+\infty[$.

2. On note S la somme de la série. Montrer explicitement que $S(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$.

3. On note $a = \sum_{n\geq 1} \dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$. Montrer que $S(x) = \dfrac{a}{\sqrt{x}} + \mathcal{O}\left(\dfrac{1}{x\sqrt{x}}\right)$. On pourra introduire la suite de fonctions $g_n : [1,+\infty[\to \mathbb{R} \quad x \mapsto \dfrac{(-1)^n}{\sqrt{nx}}$ et étudier la différence $f_n - g_n$.

Correction :

1. Montrons la convergence simple. Soit $x \in]0,+\infty[$. La série $\sum_{n\geq 1} f_n(x)$ est alternée,

$$\frac{1}{\sqrt{1+nx}} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0,$$

et $(|f_n(x)|)_{n\geq 1}$ est décroissante. D'après le critère spécial des séries alternées cette série converge. Ainsi $\sum_{n\geq 1} f_n$ converge simplement sur $]0,+\infty[$.

Montrons la convergence uniforme, puisque la série est alternée on utilise la majoration du reste, pour tout $x \in [1,+\infty[$:

$$|\sum_{k\geq n} f_k(x)| \leq |f_n(x)| \leq \frac{1}{\sqrt{1+nx}} \leq \frac{1}{\sqrt{1+n}}.$$

Ainsi le reste $\|R_n\|_\infty \underset{n\to+\infty}{\to} 0$ et la série converge uniformément.

2. Soient $\varepsilon > 0$ et $N \in \mathbb{N}$ tel que $\|R_n\|_N < \frac{\varepsilon}{2}$. Soit $A \in [1,+\infty[$ tel que $\frac{1}{\sqrt{1+x}} < \frac{\varepsilon}{2N}$. Alors $\forall x \geq A$ on a :

$$\left|\sum_{n=1}^{N} f_n(x) + \sum_{n=N+1}^{+\infty} f_n(x)\right| \leq \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{\sqrt{1+nx}} + \|R_N\|_\infty \leq \frac{N\varepsilon}{2N} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Ainsi on a bien $S(x)$ qui tend vers 0 lorsque x tend vers $+\infty$.

3. On remarque que a existe d'après le critère spécial des séries alternées. Pour $x \in [1,+\infty[$ on a :

$$\begin{aligned}
|f_n(x) - g_n(x)| &= \left|\frac{(-1)^n}{\sqrt{1+nx}} - \frac{(-1)^n}{\sqrt{nx}}\right| \\
&= \frac{\sqrt{1+nx}-\sqrt{nx}}{\sqrt{nx}\sqrt{1+nx}} = \frac{1}{\sqrt{nx}\sqrt{1+nx}(\sqrt{1+nx}+\sqrt{nx})} \\
&\leq \frac{1}{\sqrt{nx}\sqrt{nx}(\sqrt{nx}+\sqrt{nx})} = \frac{1}{2x^{3/2}}\frac{1}{n^{3/2}}.
\end{aligned}$$

Puisque la série $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^{3/2}}$ est une série de Riemann convergente on a, pour tout $x \in [1, +\infty[$:

$$\begin{aligned}\left|S(x) - \frac{a}{\sqrt{x}}\right| &= \left|\sum_{n\geq 1} f_n(x) - \sum_{n\geq 1} g_n(x)\right| \\ &\leq \sum_{n\geq 1} |f_n(x) - g_n(x)| \leq \left(\frac{1}{2}\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n^{3/2}}\right)\frac{1}{x\sqrt{x}}.\end{aligned}$$

Ainsi

$$S(x) - \frac{a}{\sqrt{x}} = \underset{x\to+\infty}{\mathcal{O}}\left(\frac{1}{x\sqrt{x}}\right).$$

Exercice 3. (Un théorème de Dini, 5 points)
Soit (f_n) une suite croissante de fonctions réelles continues et définies sur un segment $I = [a, b]$ de $\mathbb{R}$. Supposons que (f_n) converge simplement vers une fonction f continue sur I. Soit $\varepsilon > 0$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$ on considère l'ensemble

$$F_n = \{x \in I \mid f(x) \geq f_n(x) + \varepsilon\}.$$

1. Montrer que $\bigcap_{n\geq 0} F_n = \emptyset$.

2. En déduire l'existence d'un $N \in \mathbb{N}$ tel que $F_N = \emptyset$.

3. En déduire que (f_n) converge uniformément vers f.

Correction :
1. Par l'absurde supposons que $\bigcap_{n\geq 0} F_n$ ne soit pas vide et soit $x \in \bigcap_{n\geq 0} F_n$. On a alors, pour tout $n \geq 0$:

$$f(x) \geq f_n(x) + \varepsilon.$$

En passant à la limite dans l'expression précédente et en utilisant la convergence simple de la suite (f_n) on obtient :

$$f(x) \geq f(x) + \varepsilon,$$

qui est une contradiction. Donc $\bigcap_{n\geq 0} F_n = \emptyset$.
2. Puisque $F_n = (f - f_n)^{-1}([\varepsilon, +\infty[)$ et que $f - f_n$ est continue on en déduit que F_n est fermé. De plus $F_n \subset I$ donc F_n est aussi borné. Finalement, la dimension étant finie, F_n est compact. La croissance de la suite de fonctions f_n implique de plus que les F_n sont décroissants pour l'inclusion. Une suite décroissante de compacts non vides étant non vide il existe un rang $N \in \mathbb{N}$ tel que $F_N = \emptyset$.
3. Par décroissance des F_n on a, pour tout $n \geq N$ et tout $x \in I$:

$$f(x) < f_n(x) + \varepsilon.$$

Puisque la suite (f_n) est croissante on a aussi

$$f_n(x) \leq f(x) < f_n(x) + \varepsilon.$$

Ainsi $\|f - f_n\|_\infty < \varepsilon$ et on a bien la convergence uniforme.

Exercice 4. (Composantes connexes, 6 points)
Soit (E, d) un espace métrique. On considère sur (E, d) la relation suivante :

$$x\mathcal{R}y \Leftrightarrow (\exists C \text{ connexe de } E \text{ tel que } x \in C \text{ et } y \in C).$$

1. Soit $(C_i)_{i\in I}$ une famille de parties connexes de E telle que $\bigcap\limits_{i\in I} C_i \neq \emptyset$. Montrer que $\bigcup\limits_{i\in I} C_i$ est une partie connexe.

2. Montrer que la relation $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence.

Pour $x \in E$ on note $\hat{x}$ la classe d'équivalence de x, on dit que $\hat{x}$ est la composante connexe de x.

3. Montrer que les composantes connexes sont connexes et fermées.

4. On suppose que l'ensemble des composantes connexes $E/\mathcal{R}$ est fini. Montrer que les composantes connexes sont ouvertes.

Correction :
1. Soit $f : \bigcup\limits_{i\in I} C_i \to D = \{0, 1\}$ une application continue. Puisque les C_i sont connexes f est constante sur chaque C_i, on note λ_i cette constante. Soit $x \in \bigcap\limits_{i\in I} C_i$. On a $f(x) = \lambda_i$ pour tout $i \in I$. L'application f est donc constante sur $\bigcup\limits_{i\in I} C_i$ et $\bigcup\limits_{i\in I} C_i$ est une partie connexe.
2. La symétrie est évidente. On a $x \in \{x\}$ qui est connexe donc $x\mathcal{R}x$. Supposons que $x\mathcal{R}y$ et $y\mathcal{R}z$. Soit C_1 un connexe tel que $x \in C_1$ et $y \in C_1$ et C_2 un connexe tel que $y \in C_2$ et $z \in C_2$. Alors $y \in C_1 \cap C_2$ qui est donc non vide. D'après la question qui précède $C_1 \cup C_2$ est connexe. Finalement $C_1 \cup C_2$ contient x et z donc $x\mathcal{R}z$. La relation $\mathcal{R}$ est donc une relation d'équivalence.
3. On vérifie aisément que $\hat{x}$ est l'union de tous les connexes contenant x. Cette union ayant une intersection non vide (x est dedans) elle est connexe. De plus, puisque l'adhérence d'un connexe est connexe, l'adhérence de $\hat{x}$ est un connexe contenant x. Ainsi $\hat{x}$ contient son adhérence et est donc une partie fermée.
4. Les composantes connexes forment une partition de E que l'on note $E = \bigcup\limits_{i=1}^{n} C_i$. Pour tout i on a $E \setminus C_i = \bigcup_{i\neq j} C_i$ qui est une union finie de fermées. Cette union est donc fermée et puisque le complémentaire de C_i est fermé, C_i est ouvert.