Université Paris Dauphine
2022-2023

Introduction aux séries temporelles

Corrigé du Partiel du vendredi 28/10/2022

Durée 2 heures - Documents et calculatrices non autorisés

Exercice 1 (5 points) Soient A_1 et A_2 deux variables aléatoires réelles indépendantes, de carré intégrable telles que

$$\mathbb{E}[A_1] = \mathbb{E}[A_2] = 0 \qquad \text{et} \qquad \mathbb{E}\left[A_1^2\right] = \mathbb{E}\left[A_2^2\right] = 1,$$

et B une variable aléatoire réelle, indépendante de A_1 et A_2 de loi uniforme sur $[-\pi, \pi]$. On pose

$$X_t = A_1 \cos(Bt) + A_2 \sin(Bt) \qquad \forall t \in \mathbb{Z}.$$

Montrer que (X_t) est un processus stationnaire dont on calculera la fonction d'autocovariance.

Solution : On remarque que X_t est une variable aléatoire (comme somme et composition de variables aléatoires) de carré intégrable puisque

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left[|X_t|^2\right] &\leq 2\mathbb{E}\left[|A_1 \cos(Bt)|^2\right] + 2\mathbb{E}\left[|A_2 \cos(Bt)|^2\right] \\ &\leq 2\mathbb{E}\left[|A_1|^2\right] + 2\mathbb{E}\left[|A_2)|^2\right] < \infty\end{aligned}$$

De plus, par indépendance, pour tout $t \in \mathbb{Z}$,

$$\mathbb{E}[X_t] = \mathbb{E}[A_1]\,\mathbb{E}[\cos(Bt)] + \mathbb{E}[A_2]\,\mathbb{E}[\sin(Bt)] = 0.$$

Enfin, pour tout $t \in \mathbb{Z}$ et $h \in \mathbb{Z}$,

$$\begin{aligned}\operatorname{cov}(X_t, X_{t+h}) &= \mathbb{E}[X_t X_{t+h}] \\ &= \mathbb{E}\left[A_1^2\right]\mathbb{E}[\cos(Bt)\cos(B(t+h))] + \mathbb{E}\left[A_2^2\right]\mathbb{E}[\sin(Bt)\sin(B(t+h))] \\ &= \mathbb{E}[\cos(B(t)\cos(B(t+h)) + \sin(Bt)\sin(B(t+h))] = \mathbb{E}[\cos(Bh)],\end{aligned}$$

avec, puisque B suit une loi uniforme sur $[-\pi, \pi]$,

$$\mathbb{E}[\cos(Bh)] = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \cos(xh)dx = \begin{cases} 1 & \text{si } h = 0 \\ 0 & \textit{sinon.} \end{cases}$$

Donc X est un processus stationnaire centré avec $\gamma_X(h) = 0$ si $h \neq 0$ et $\gamma_X(0) = 1$: c'est un bruit blanc $BB(0,1)$.

Exercice 2 (5 points) Soit (X_t) un processus stationnaire vérifiant la relation

$$X_t = \frac{5}{2}X_{t-1} - X_{t-2} + Z_t \qquad \forall t \in \mathbb{Z},$$

où Z est un bruit blanc de moyenne nulle et de variance σ^2 (avec $\sigma \neq 0$).

1. Expliquer pourquoi un tel processus X existe et est unique.
2. Déterminer explicitement un filtre $\alpha \in \ell^1$ tel que $X = F_\alpha Z$.
   (on pourra utiliser l'identité $\dfrac{1}{z^2 - \frac{5}{2}z + 1} = \dfrac{2}{3}\left(\dfrac{1}{z-2} - \dfrac{1}{z-1/2}\right)$)

Solution :

1. *On pose $\Phi(z) = 1 - \frac{5}{2}z + z^2$. Alors l'équation ARMA s'écrit $\Phi(B)X = Z$, où B est l'opérateur de retard. Comme les deux racines de Φ sont 2 et $1/2$ (toutes deux de module différent de 1), un théorème de cours affirme que l'équation ARMA possède une unique solution stationnaire.*
2. *Pour décrire le filtre $\alpha \in \ell^1$ tel que $X = F_\alpha Z$, il faut exprimer $1/\Phi(z)$ sous la forme $\sum_{k\in\mathbb{Z}} \alpha_k z^k$ pour tout $z \in \mathbb{C}$, $|z| = 1$. Alors, d'après le cours, $X = F_\alpha Z$. On note que, pour tout $z \in \mathbb{C}$ avec $|z| = 1$, on a (puisque $|z/2| < 1$ et $|1/(2z)| < 1$)*

$$\begin{aligned}
\frac{1}{z^2 - \frac{5}{2}z + 1} &= \frac{2}{3}\left(\frac{1}{z-2} - \frac{1}{z-1/2}\right) = \frac{2}{3}\left(\frac{1}{-2}\frac{1}{1-z/2} - \frac{1}{z}\frac{1}{1-1/(2z)}\right) \\
&= \frac{2}{3}\left(\frac{1}{-2}\sum_{k=0}^{\infty} z^k 2^{-k} - \frac{1}{z}\sum_{k=0}^{\infty} 2^{-k} z^{-k}\right) = -\sum_{k=0}^{\infty} 3^{-1}2^{-k}z^k - \sum_{k=-\infty}^{-1} 3^{-1}2^{k+2}z^k \\
&= \sum_{k\in\mathbb{Z}} \alpha_k z^k, \qquad \textit{avec } \alpha_k = \begin{cases} -3^{-1}2^{-k} & \textit{si } k \geq 0 \\ -2^{k+2}/3 & \textit{si } k < 0. \end{cases}
\end{aligned}$$

Exercice 3 (10 points) Soit (Z_t) un processus stationnaire de moyenne $\bar{m} \in \mathbb{R}$. Soient également $\phi \in \mathbb{R}$ une constante, avec $|\phi| < 1$. On s'intéresse aux processus (X_t) vérifiant

$$(*) \qquad X_t = \phi X_{t-1} + Z_t \qquad \forall t \in \mathbb{Z}.$$

1. On suppose que (X_t) est un processus stationnaire vérifiant $(*)$. Déterminer $\mu = \mathbb{E}[X_t]$ en fonction de $\bar{m}$ et ϕ.

2. Soit (X_t) un processus de carré intégrable et uniformément borné dans L^2 (c'est-à-dire tel que $\sup_{t\in\mathbb{Z}} \mathbb{E}\left[(X_t)^2\right] < +\infty$) vérifiant $(*)$.

   (a) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a

   $$X_t = \phi^n X_{t-n} + \sum_{k=0}^{n-1} \phi^k Z_{t-k} \qquad \forall t \in \mathbb{Z}.$$

   (b) Démontrer que, pour tout $t \in \mathbb{Z}$, la suite $(\sum_{k=0}^{n-1} \phi^k Z_{t-k})_{n\in\mathbb{N}^*}$ a une limite dans L^2 (notée $\sum_{k=0}^{\infty} \phi^k Z_{t-k}$) et que

   $$X_t = \sum_{k=0}^{\infty} \phi^k Z_{t-k} \qquad \forall t \in \mathbb{Z}.$$

   (c) En déduire qu'il existe une unique solution de $(*)$ uniformément bornée dans L^2 et que cette solution est stationnaire.

3. Soit (X_t) un processus stationnaire vérifiant $(*)$ *avec* (Z_t) *un bruit blanc de moyenne* $\bar{m}$ *et de variance* σ^2. Pour $N \in \mathbb{N}^*$, on pose $\bar{X}_t^N = \frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N} X_{t+k}$.

   (a) Montrer que $(\bar{X}_t^N)$ vérifie une relation de récurrence de la forme

   $$\bar{X}_t^N = \phi \bar{X}_{t-1}^N + \epsilon_t^N \qquad \forall t \in \mathbb{Z},$$

   où (ϵ_t^N) est un processus stationnaire de moyenne $\bar{m}$ et de variance σ^2/N.

   (b) Déduire des questions précédentes que, pour tout $t \in \mathbb{Z}$ et lorsque $N \to +\infty$, $(\bar{X}_t^N)$ possède une limite dans L^2 que l'on déterminera.

Solution :

1. *Comme* (X_t) *est un processus stationnaire, on a* $\mathbb{E}[X_t] = \mathbb{E}[X_{t-1}] = \mu$ *pour tout* $t \in \mathbb{Z}$. *Comme* (X_t) *vérifie* $(*)$, *en prenant l'espérant dans (*) on obtient*

   $$\mu = \phi\mu + \bar{m},$$

   puisque (Z_t) *est de moyenne* $\bar{m}$. *On en déduit que* $\mu = \bar{m}/(1-\phi)$.

2. *On suppose que (X_t) est un processus de carré intégrable et uniformément borné dans L^2 vérifiant $(*)$.*

   (a) *On veut montrer par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a*

   $$(**) \qquad X_t = \phi^n X_{t-n} + \sum_{k=0}^{n-1} \phi^k Z_{t-k} \qquad \forall t \in \mathbb{Z}.$$

   Cette relation est vraie au rang $n = 1$ par $(*)$. Supposons-la vraie au rang $n \in \mathbb{N}^*$. Alors, pour tout $t \in \mathbb{Z}$, on a par hypothèse de récurrence puis par $(*)$ appliqué au temps $t - n$:

   $$\begin{aligned} X_t &= \phi^n X_{t-n} + \sum_{k=0}^{n-1} \phi^k Z_{t-k} \\ &= \phi^n (c + \phi X_{t-n-1} + Z_{t-n}) + \sum_{k=0}^{n-1} \phi^k Z_{t-k} \\ &= \phi^{n+1} X_{t-n-1} + \sum_{k=0}^{n} \phi^k Z_{t-k}, \end{aligned}$$

   ce qui montre le résultat au rang $n + 1$. Par récurrence on en déduit le résultat pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

   (b) *Posons $M = \sup_{t \in \mathbb{Z}} \mathbb{E}\left[(X_t)^2\right]$. Fixons $t \in \mathbb{Z}$. On note que, comme $|\phi| < 1$ et comme (Z_t) est stationnaire,*

   $$\sum_{k=0}^{n-1} \left\| \phi^k Z_{t-k} \right\|_{L^2} = \sum_{k=0}^{n-1} |\phi|^k \left\| Z_{t-k} \right\|_{L^2} = \left\| Z_0 \right\|_{L^2} \sum_{k=0}^{n-1} |\phi|^k \leq \left\| Z_0 \right\|_{L^2} / (1 - |\phi|).$$

   Donc la série $(\sum_{k=0}^{n-1} \phi^k Z_{t-k})_{n \in \mathbb{N}^*}$, qui est normalement convergente dans L^2, a une limite dans L^2. De plus

   $$\left\| \phi^n X_{t-n} \right\|_{L^2} = |\phi|^n \left\| X_{t-n} \right\|_{L^2} \leq M |\phi|^n \to 0$$

   lorsque $n \to +\infty$ puisque $|\phi| < 1$. Donc $(\phi^n X_{t-n})$ tend dans L^2 vers 0. Enfin, toujours parce que $|\phi| < 1$, la suite réelle $(c \frac{1-\phi^n}{1-\phi})$ tend vers $c/(1 - \phi)$. On en déduit en passant à la limite dans L^2 dans $(**)$ que

   $$X_t = \sum_{k=0}^{\infty} \phi^k Z_{t-k} \qquad \forall t \in \mathbb{Z}.$$

(c) *La question précédente affirme que, s'il existe une solution de* $(*)$ *bornée dans* L^2*, alors*

$$X_t = F_\alpha Z_t,$$

où $\alpha \in \ell^1(\mathbb{Z})$ *est défini par* $\alpha_k = \phi^k$ *si* $k \in \mathbb{N}$ *et* $\alpha_k = 0$ *si* $k < 0$*. Comme* (Z_t) *est un processus stationnaire, on sait d'après le cours que* $X = F_\alpha Z$ *est un processus stationnaire. Inversement, si on pose* $X = F_\alpha Z$*, avec* α *comme ci-dessus, alors on sait que* X *est un processus stationnaire (donc borné dans* L^2*). De plus, pour tout* $t \in \mathbb{Z}$*,*

$$X_t = \sum_{k=0}^{\infty} \phi^k Z_{t-k} = Z_t + \phi \sum_{k=1}^{\infty} \phi^{k-1} Z_{t-k} = Z_t + \phi \sum_{k'=0}^{\infty} \phi^{k'} Z_{t-1-k'} = Z_t + \phi X_{t-1}$$

Donc X *est une solution de* $(*)$*.*

3. (a) *D'après* $(*)$*, on a*

$$\bar{X}_t^N = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^{N} X_{t+k} = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^{N} (\phi X_{t+k-1} + Z_{t+k-1}) = \phi \bar{X}_{t-1}^N + \epsilon_t^N$$

où

$$\epsilon_t^N = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^{N} Z_{t+k}$$

Notons que, comme $(\epsilon_t^N = F_\beta Z_t)$ *(où* $\beta = 1/N$ *si* $k \in \{-N, \ldots, -1\}$ *et* $\beta_k = 0$ *sinon) avec* (Z_t) *stationnaire, un résultat de cours affirme que* (ϵ_t^N) *est stationnaire. De plus, comme* (Z_t) *est un bruit blanc, on a, pour tout* $t \in \mathbb{Z}$*,*

$$\mathbb{E}\left[\epsilon_t^N\right] = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^{N} \mathbb{E}\left[Z_{t+k}\right] = \bar{m}$$

et

$$\mathbb{E}\left[(\epsilon_t^N - \bar{m})^2\right] = \frac{1}{N^2} \sum_{k=1}^{N} \mathbb{E}\left[(Z_{t+k} - \bar{m})^2\right] = \sigma^2/N.$$

(b) *Notons que* $\bar{X}_t^N = F_\beta X_t$ *où* β *est défini ci-dessus. On en déduit que* $(\bar{X}_t^N)$ *est un processus stationnaire et est donc de carré intégrable* *et borné dans L^2. On déduit de la question 2 que (X_t) est donné par :*

$$\bar{X}_t^N = \sum_{k=0}^{\infty} \phi^k \epsilon_{t-k}^N \qquad \forall t \in \mathbb{Z}.$$

Donc, pour tout $t \in \mathbb{Z}$,

$$\begin{aligned}
Var(X_t^N) = \mathbb{E}\left[(\bar{X}_t^N - \frac{\bar{m}}{1-\phi})^2\right] &= \sum_{k,j=0}^{\infty} \phi^{k+j}\mathbb{E}\left[(\epsilon_{t-k}^N - \bar{m})(\epsilon_{t-j}^N - \bar{m})\right] \\
&\leq \sum_{k,j=0}^{\infty} |\phi|^{k+j}\mathbb{E}\left[(\epsilon_{t-k}^N) - \bar{m}^2\right]^{1/2} \mathbb{E}\left[(\epsilon_{t-j}^N - \bar{m})^2\right]^{1/2} \\
&= \frac{\sigma^2}{N}(\sum_{k=0}^{\infty} |\phi|^k)^2 = \frac{\sigma^2}{N(1-|\phi|)^2}.
\end{aligned}$$

Cela montre que $(\bar{X}_t^N)$ tend dans L^2 vers sa moyenne $\bar{m}/(1-\phi)$.