Université de Paris-Dauphine
Algèbre Linéaire 1

Algèbre Linéaire 1 -Galop d'essai 2
Durée 2 heures

Exercice 1. (examen du 20/01/2014) On pose

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad U = \begin{pmatrix} 5 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

On note A^T la matrice transposée de A et I_3 la matrice identité de format $(3,3)$.

(i) Calculer (très soigneusement) les produits A^TA et AA^T.

(ii) Vérifier sans calcul que A^TA est inversible et donner son inverse.

(iii) Calculer $(AA^T)U$ et en déduire que AA^T n'est pas inversible.

(iv) On pose $B = AA^T - 4I_3$. Montrer par la méthode du pivot de Gauss que B est inversible et calculer son inverse.

Exercice 2. (examen du 20/01/2014) Soit $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ définie par

$$f(z) = -4 - z^4 \qquad \forall z \in \mathbb{C}.$$

(i) Déterminer toutes les racines 4ièmes de -4 (on exprimera le résultat sous forme algébrique).

(ii) Calculer $f^{-1}(\{0\})$. f est-elle injective ?

(iii) f est-elle surjective ?

(iv) Soient $S_1 = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = \sqrt{2}\}$ et $S_2 = \{z \in \mathbb{C} \mid |z+4| = 4\}$. Montrer que $f(S_1) = S_2$.

Exercice 3. (examen du 20/01/2014) On considère les polynômes $P(X) = X^2 - X + 1$ et $Q(X) = X^4 - 7X^3 + 16X^2 - 15X + 9$.

(i) Le polynôme P est-il premier dans $\mathbb{C}[X]$? Dans $\mathbb{R}[X]$?

(ii) On note Q' le polynôme dérivé de Q. Factoriser Q' dans $\mathbb{R}[X]$ en remarquant que 1 est racine évidente de Q'.

(iii) En déduire la factorisation de Q dans $\mathbb{C}[X]$ et dans $\mathbb{R}[X]$ sachant que Q possède une racine double.

Exercice 4. (rattrapage du 01/09/2014) Soit P un polynôme *non constant* à coefficients dans $\mathbb{C}$. On appellera également P l'application $z \to P(z)$.

(i) Démontrer que P est surjective.
(Indication : on pourra utiliser le théorème de d'Alembert).

(ii) On suppose que P est injective. Montrer que P a une et une seule racine dans $\mathbb{C}$. En déduire qu'il existe $\alpha \in \mathbb{C}^*$, $\beta \in \mathbb{C}$ et $n \in \mathbb{N}^*$ tels que $P(X) = \alpha(X - \beta)^n$.

(iii) On suppose toujours que P est injective. Montrer que P est nécessairement de degré 1.