Université Paris Dauphine
DUMI2E 1e année
Analyse 2 — 2015-2016

CC1 — 22/02/2016
Durée 1h15
Documents et calculatrice non autorisés.

Exercice 1

(a) Calculer $\arccos(x) + \arcsin(x)$ pour tout $x \in [-1, 1]$.

(b) Calculer le développement limité de la fonction $f(x) = e^x\sqrt{1+x}$ à l'ordre 2 en 0.

Solution:

(a) La fonction $f(x) := \arccos(x) + \arcsin(x)$ *est continue sur* $[-1, 1]$ *et de classe* C^1 *sur* $]-1, 1[$ *(comme somme de fonctions continues et dérivables sur les intervalles considérés). Sa dérivée est*

$$f'(x) = \arccos'(x) + \arcsin'(x) = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}} + \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = 0 \qquad \forall x \in]-1, 1[.$$

On en déduit que f *est constante sur* $]-1, 1[$. *Par continuité,* f *est donc constante sur* $[-1, 1]$. *Comme* $f(0) = \arccos(0) + \arcsin(0) = \frac{\pi}{2}$, *on conclut que*

$$\arccos(x) + \arcsin(x) = \frac{\pi}{2} \qquad \forall x \in [-1, 1].$$

(b) On rappelle que les fonctions e^x *et* $\sqrt{1+x}$ *admettent des DL d'ordre 2 en 0 :*

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + x^2\epsilon(x) \qquad \text{et} \qquad \sqrt{1+x} = 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + x^2\epsilon(x)$$

où $\epsilon(x) \to 0$ *si* $x \to 0$. *Donc par théorème de cours* f *admet un DL d'ordre 2 en* 0 *donné par*

$$\begin{aligned} f(x) &= \left(1 + x + \frac{x^2}{2} + x^2\epsilon(x)\right)\left(1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + x^2\epsilon(x)\right) \\ &= \left(1 + x + \frac{x^2}{2}\right)\left(1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8}\right) + x^2\epsilon(x). \end{aligned}$$

Or

$$\begin{aligned} \left(1 + x + \frac{x^2}{2}\right)\left(1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8}\right) &= \left(1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8}\right) + \left(x + \frac{x^2}{2} + x^2\epsilon(x)\right) + \left(\frac{x^2}{2} + x^2\epsilon(x)\right) \\ &= 1 + \frac{3x}{2} + \frac{7x^2}{8} + x^2\epsilon(x). \end{aligned}$$

On conclut donc que le DL de f *à l'ordre 2 en* 0 *est*

$$f(x) = 1 + \frac{3x}{2} + \frac{7x^2}{8} + x^2\epsilon(x).$$

Exercice 2 Soit $g(x) = \dfrac{1}{2}\left(x + \dfrac{1}{x}\right)$ et $f(x) = \operatorname{argch}(g(x))$.

(a) Donner le domaine de définition de g et étudier ses variations.

(b) Montrer que f est définie et continue sur $]0, +\infty[$ et que f est dérivable sur $]0, 1[\cup]1, +\infty[$.

(c) Calculer $f'(x)$ pour $x \in]0, 1[\cup]1, +\infty[$.

(d) En déduire une expression simple de $f(x)$ si $x > 0$.

Solution:

(a) Le domaine de définition de $g(x) = \frac{1}{2}\left(x + \frac{1}{x}\right)$ *est* $\mathbb{R}^*$*. De plus,* g *est également dérivable sur* $\mathbb{R}^*$ *comme somme de fonctions dérivables sur* $\mathbb{R}^*$*. On a pour* $g'(x) = 1/2(1 - x^{-2})$*, qui est positive ou nulle si* $|x| \geq 1$*, et négative sinon.*

Le tableau de variations de g *est laissé au lecteur.*

(b) On sait que $\operatorname{argch}(y)$ *est définie et continue sur* $[1, +\infty[$*. Comme* $g(x) \geq 1$ *pour tout* $x > 0$ *et que* g *est continue sur* $]0, +\infty[$ *(puisque dérivable sur cet intervalle),* f *est définie et continue sur* $]0, +\infty[$*.*

D'autre part, $\operatorname{argch}(y)$ *est dérivable pour* $y > 1$*. Comme* $g(x) > 1$ *pour* $x > 0$ *et* $x \neq 1$ *(puisque* g *est strictement croissante sur* $]0, 1[$ *et strictement décroissante sur* $]1, +\infty[$*) et comme* g *est dérivable sur* $]0, +\infty[$*, on en déduit par dérivée des fonctions composées que* f *est dérivable sur* $]0, 1[\cup]1, +\infty[$*.*

(c) Pour $x \in]0, 1[\cup]1, +\infty[$*, on a, par dérivation des fonctions composées,*

$$f'(x) = \operatorname{argch}'(g(x))g'(x) = \frac{1}{\sqrt{(g(x))^2 - 1}}g'(x)$$

Or

$$(g(x))^2 - 1 = \frac{1}{4}(x + \frac{1}{x})^2 - 1 = \frac{1}{4}(x^2 + 2 + \frac{1}{x^2}) - 1 = \frac{1}{4}(x^2 - 2 + \frac{1}{x^2}) = \frac{1}{4}(x - \frac{1}{x})^2.$$

D'où

$$\sqrt{(g(x))^2 - 1} = \frac{1}{2}\left|x - \frac{1}{x}\right| = \begin{cases} \frac{1}{2}(x - \frac{1}{x}) & \text{si } x \geq 1 \\ -\frac{1}{2}(x - \frac{1}{x}) & \text{si } x \in]0, 1] \end{cases}$$

Donc, si $x > 1$*, on a*

$$\begin{aligned} f'(x) &= \left[\frac{1}{2}(x - \frac{1}{x})\right]^{-1} \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{x^2}\right) = \left[\frac{x^2 - 1}{2x}\right]^{-1} \frac{1}{2}\left(\frac{x^2 - 1}{x^2}\right) \\ &= \left[\frac{2x}{x^2 - 1}\right] \frac{1}{2}\left(\frac{x^2 - 1}{x^2}\right) = \frac{1}{x}. \end{aligned}$$

Si $x \in]0, 1]$*, on a par le même calcul* $f'(x) = -1/x$*.*

(d) *On rappelle que les primitives de $1/x$ sont de la forme $\ln(x)$+constante. On déduit de la question précédente qu'il existe des constantes C_1 et C_2 telles que $f(x) = \ln(x) + C_1$ sur $[1, +\infty[$ et $f(x) = -\ln(x) + C_2$ sur $]0, 1]$. Comme f est continue sur $]0, +\infty[$ et que $f(1) = \operatorname{argch}(g(1)) = \operatorname{argch}(1) = 0$, on a $C_1 = C_2 = 0$, soit*

$$f(x) = |\ln(x)| \qquad \forall x > 0.$$

Exercice 3 Soit $f :]0, +\infty[\to \mathbb{R}$ une fonction de classe C^2. On suppose que $\lim_{x \to 0^+} f(x) = 0$ et qu'il existe $M > 0$ tel que $|x^2 f''(x)| \leq M$ pour tout $x > 0$.

(a) Soit $a \in]0, 1[$. Montrer que pour tout $x > 0$ il existe $\xi \in [ax, x]$ tel que

$$f(ax) = f(x) - (1-a)xf'(x) + \frac{(1-a)^2}{2} x^2 f''(\xi)$$

(b) Soient $a \in]0, 1[$, $x > 0$ et $\xi \in [ax, x]$. Montrer que

$$\left|x^2 f''(\xi)\right| \leq \frac{M}{a^2}.$$

(c) Conclure que $\lim_{x \to 0^+} xf'(x) = 0$.

Solution:

(a) *Comme f est de classe C^2 sur $[ax, x]$ on déduit du théorème de Taylor-Lagrange qu'il existe $\xi \in [ax, x]$ tel que*

$$\begin{aligned} f(ax) &= f(x) + (ax - x)f'(x) + \frac{(ax-x)^2}{2} f''(\xi) \\ &= f(x) + (a-1)xf'(x) + \frac{(a-1)^2}{2} x^2 f''(\xi) \\ &= f(x) - (1-a)xf'(x) + \frac{(1-a)^2}{2} x^2 f''(\xi). \end{aligned}$$

D'où le résultat.

(b) *Par définition de M et comme $\xi > 0$ puisque $0 < ax \leq \xi \leq x$, on a*

$$\left|x^2 f''(\xi)\right| = \left|\frac{x^2}{\xi^2}\right| \left|\xi^2 f''(\xi)\right| \leq \left|\frac{x^2}{\xi^2}\right| M.$$

Comme $0 < ax \leq \xi \leq x$ on a aussi $1 \leq x/\xi \leq 1/a$. On en déduit donc que

$$\left|x^2 f''(\xi)\right| \leq \left|\frac{x^2}{\xi^2}\right| M \leq \frac{M}{a^2},$$

ce qui est le résultat demandé.

(c) *D'après la question (a), pour tout* $x > 0$, $a \in]0,1[$, *il existe* $\xi \in [ax, x]$ *tel que*

$$(1-a)xf'(x) = f(ax) - f(x) + \frac{(1-a)^2}{2}x^2 f''(\xi).$$

Donc, par inégalité triangulaire,

$$\begin{aligned} |(1-a)xf'(x)| &= \left| f(ax) - f(x) + \frac{(1-a)^2}{2}x^2 f''(\xi) \right| \\ &\leq |f(ax) - f(x)| + \left| \tfrac{(1-a)^2}{2}x^2 f''(\xi) \right| \\ &\leq |f(ax)| + |f(x)| + \frac{(1-a)^2}{2}\frac{M}{a^2} \end{aligned}$$

où on a utilisé la question (b) pour la seconde inégalité. Fixons $\epsilon > 0$, *et choisissons* $a \in]0,1[$ *suffisamment proche de* 1 *pour que*

$$\frac{(1-a)}{2}\frac{M}{a^2} \leq \frac{\epsilon}{2}.$$

Comme, par hypothèse, $\lim_{x \to 0^+} f(x) = 0$, *il existe* $\eta > 0$ *tel que*

$$|f(y)| \leq \frac{\epsilon(1-a)}{4} \qquad \forall y \in]0, \eta[.$$

Alors, pour tout $x \in]0, \eta[$, *on a, puisque* $ax \in]0, \eta[$,

$$\begin{aligned} |xf'(x)| &= \frac{|f(ax)| + |f(x)|}{1-a} + \frac{(1-a)}{2}\frac{M}{a^2} \\ &\leq \frac{\epsilon}{4} + \frac{\epsilon}{4} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon. \end{aligned}$$

Cela prouve que $xf'(x)$ *tend vers* 0 *lorsque* x *tend vers* 0.